This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

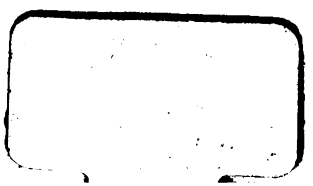
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie

von

H. Müller,
Oberlehrer am Kaiserin Augusta-Gymnasium in Charlottenburg

und

M. Kutnewsky,
Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin.

Ausgabe B, für Realschulen.

Leipzig und Berlin,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie

von

H. Müller,
Oberlehrer am Kaiserin Augusta-Gymnasium in Charlottenburg

und

M. Kutnewsky,
Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin.

Ausgabe B, für Realschulen.

Leipzig und Berlin,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1900.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
251129
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1951 L.

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Vorwort.

Die vorliegende Bearbeitung des ersten Teils unserer Aufgabensammlung ist aus dem Bestreben hervorgegangen, in einem Bande den gesamten Übungsstoff zusammenzustellen, den die **Realschulen** für den rechnenden Teil des mathematischen Unterrichts brauchen. Während andere bewährte Sammlungen entweder nur arithmetische oder nur trigonometrische, bez. stereometrische Aufgaben enthalten und somit für den Schüler die Anschaffung mehrerer Bücher nötig machen oder den Lehrer zum Diktieren von Übungsbeispielen aus den fehlenden Gebieten zwingen, bringt die Ausgabe B aus der Arithmetik, Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie sowie auch aus der Physik, d. h. aus allen Zweigen des Unterrichts, welche zu Berechnungen Veranlassung geben, den für Realschulen erforderlichen Übungsstoff. Wenn die Sammlung die für diese Schulen festgesetzten Grenzen gelegentlich überschreitet, wie in der Aufnahme der Reihenlehre, der Zinseszins- und Rentenrechnung, der Verwendung des Tangential-Satzes und der Mollweideschen Gleichungen, so ist dies mit Rücksicht auf die besonderen Bedürfnisse der Berliner Anstalten geschehen.

Die Sammlung ist so reichhaltig, daß der Lehrer in ihr außer den Beispielen für den Unterricht hinreichenden und zuverlässig geordneten Übungsstoff für die häuslichen Arbeiten und Wiederholungen vorfindet. Dies trifft nicht nur für die Arithmetik und deren Anwendungen zu, sondern auch die trigonometrischen und stereometrischen Abschnitte sind so ausgestattet, daß sie für mehrere Jahre Wechsel bieten.

Die Anwendungen (Textgleichungen) enthalten außer den notwendigen Vorübungen möglichst nur Aufgaben, die sich mit Vorkommnissen des praktischen Lebens und thatsächlichen Naturereignissen beschäftigen. Die Gedankenkreise, welche die Sammlung berührt, gehören fast ausnahmslos der **Wirklichkeit** an. Die sogenannten klassischen Aufgaben sind fortgeblieben und dafür die Übungen lieber auf solche

Gebiete verlegt worden, mit denen die Schüler auf ihrem weiteren Lebenswege sich in der mannigfachsten Weise zu beschäftigen haben. Dabei sind die Zahlen nach Möglichkeit so gewählt, daß die Rechnung zu einem einfachen Ergebnis führt.

Die Sammlung enthält nur Aufgaben und überläßt deren Besprechung dem Lehrer.

Von den Aufgaben aus der Planimetrie ist ein Teil den Textgleichungen geometrischen Inhalts von Prof. Dr. Th. Harmuth (Berlin, J. Springer) mit gütiger Erlaubnis des Verfassers entnommen. Zahlreiche Aufgaben aus der Reihenlehre, der Trigonometrie und Stereometrie sind aus Programmen gesammelt oder dort aufgefundenen Aufgaben nachgebildet. Dabei ist die verdienstvolle Zusammenstellung von Aufgaben aus Abschlußprüfungen auf höheren Schulen von Dr. Quensen-Gandersheim in Hoffmanns Zeitschr. Jahrg. XXV u. XXVIII vielfach benutzt worden.

Die Zusammenstellung der Ergebnisse wird binnen kurzem folgen, aber nur an Lehrer der Mathematik abgegeben werden.

Mit der Versicherung, daß wir für jeden Verbesserungs- und Erweiterungsvorschlag, der uns mitgeteilt wird, dankbar sein werden, verbinden wir den Wunsch, daß die Sammlung die Zustimmung der Herrn Fachgenossen finden und sich in der Hand der Schüler bewähren möge.

Charlottenburg und Berlin, im September 1900.

Die Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Kapitel 1. Die Grundrechnungsarten.

Seite

Nr. 1. Addition und Subtraktion 1
„ 2. Multiplikation 2
„ 3. Division 3

Kapitel 2. Verbindung der 4 Rechnungsarten.

Nr. 4. Mehrgliedrige Ausdrücke. Klammerausdrücke 4
„ 5. Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen. 6
„ 6. Eingliedrige algebraische Zahlen 7
„ 7. Addition und Subtraktion algebraischer Summen. Auflösung der Klammern 7
„ 8. Multiplikation algebraischer Summen 10
„ 9. Division algebraischer Summen durch eingliedrige Divisoren. Zerlegung in Faktoren 13
„ 10. Division algebraischer Summen durch algebraische Summen. 16

Kapitel 3. Brüche und Proportionen.

Nr. 11. Gemeinschaftliche Faktoren. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache . . 20
„ 12. Erweitern und Kürzen der Brüche 22
„ 13. Addition und Subtraktion von Brüchen.
a. Gleichnamige Brüche 24
b. Ungleichnamige Brüche 25
„ 14. Multiplikation von Brüchen 29
„ 15. Division von Brüchen 32
„ 16. Doppelbrüche 34
„ 17. Verhältnisse 35
„ 18. Proportionen.
a. Übungen 36
b. Anwendungen 39

Kapitel 4. Gleichungen ersten Grades.

Nr. 19. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.
a. Erster Teil 43
b. Zweiter Teil 49
„ 20. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Erster Teil
a. Vorübungen 57

Seite

b. Leichtere vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben 57
c. Verteilungsaufgaben 63
d. Prozentrechnung.
α. Zinsrechnung 65
β. Gewinn- und Verlustrechnung 67
γ. Rabatt- und Diskontrechnung 68
δ. Brutto- und Nettogewicht 71
e. Mischungsrechnung 72

Nr. 21. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Zweiter Teil.
a. Vorübungen 74
b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben 77
c. Verteilungsaufgaben 85
d. Prozentrechnung.
α. Zinsrechnung 87
β. Gewinn- und Verlustrechnung 90
γ. Rabatt- und Diskontrechnung 92
δ. Terminrechnung 95
e. Mischungsrechnung. Aufgaben aus der Physik 97
f. Aufgaben aus der Planimetrie 104

„ 22. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.
a. Mit zwei Unbekannten 106
b. Mit mehr als zwei Unbekannten 118

„ 23. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.
a. Vorübungen 126
b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben 127
c. Prozentrechnung 136
d. Mischungsrechnung. Aufgaben aus der Physik 140
e. Aufgaben aus der Planimetrie 146

Kapitel 5. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

Nr. 24. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.
a. Übungen zum Begriff der Potenz 148
b. Multiplikation von Potenzen 149
c. Division von Potenzen 150
d. Potenzen von Produkten und Quotienten 151
e. Potenzen von Potenzen 152
f. Potenzen mehrgliedriger Ausdrücke 153

„ 25. Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.
a. Übungen zum Begriff der Wurzel 154
b. Multiplikation von gleichnamigen Wurzeln 156
c. Division von gleichnamigen Wurzeln 161
d. Multiplikation und Division von ungleichnamigen Wurzeln . . 165
e. Wurzeln aus Wurzeln 166
f. Ausziehung der Quadratwurzel 168
g. Ausziehung der Kubikwurzel 170

Seite

Nr. 26. Potenzen und Wurzeln mit ganzen negativen Exponenten 171
„ 27. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten 174
„ 28. Gleichungen ersten Grades, in denen die Unbekannten unter Wurzeln auftreten.
a. Mit einer Unbekannten 176
b. Mit zwei Unbekannten 180
„ 29. Logarithmen.
a. Übungen zum Begriff des Logarithmus 181
b. Anwendung der Hauptsätze über Logarithmen 182
c. Logarithmische Berechnung von Zahlenausdrücken 183
d. Exponentialgleichungen.
α. Ohne Benutzung der Logarithmentafel 185
β. Mit Benutzung der Logarithmentafel 186
e. Einfache Anwendungen 187
f. Verwendung der Logarithmen bei der Berechnung regelmäßiger Vielecke 190
g. Berechnungen beim Kreise 192

Kapitel 6. Quadratische Gleichungen.

Nr. 30. Rein-quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 194
„ 31. Gemischt-quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 196
„ 32. Gleichungen, welche durch Einführung neuer Unbekannten lösbar oder einfacher werden 203
„ 33. Anwendungen der Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.
a. Vorübungen 205
b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben 207
c. Prozentrechnung 212
d. Aufgaben aus der Planimetrie 215
e. Aufgaben aus der Physik 221

Kapitel 7. Aufgaben zur Reihenlehre.

Nr. 34. Arithmetische Reihen.
a. Allgemeine Übungen 228
b. Anwendungen 231
„ 35. Geometrische Reihen.
a. Allgemeine Übungen 233
b. Anwendungen.
α. Vermischte Aufgaben 236
β. Zinseszins-Rechnung 238
γ. Zinseszins-Rechnung mit Zu- und Auszahlungen 242
δ. Kapital- und Lebensversicherung 245
ε. Renten-Rechnung. Tilgung von Anleihen 246

Kapitel 8. Trigonometrische Aufgaben.

Nr. 36. Aufgaben zur Bestimmung von Winkeln 250
„ 37. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks 251

Seite

Nr. 38. Anwendungen 254
„ 39. Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks 257
„ 40. Anwendungen 259
„ 41. Funktionen von Winkeln zwischen 0° und 180° 263
„ 42. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.
a. Anwendung des Sinus-Satzes 263
b. Anwendung der Mollweideschen Gleichungen und des Tangential-Satzes 265
c. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes 267
d. Aufgaben über die Halbmesser der Berührungskreise 269
„ 43. Einige Aufgaben aus der angewandten Geometrie und aus der Physik 270

Kapitel 9. Stereometrische Aufgaben.

Nr. 44. Berechnung des Würfels 272
„ 45. Berechnung des Quaders 273
„ 46. Berechnung des Prismas 274
„ 47. Berechnung des geraden Cylinders 275
„ 48. Berechnung der geraden Pyramide 276
„ 49. Berechnung des Kegels 278
„ 50. Berechnung des Pyramidenstumpfs und des Kegelstumpfs 280
„ 51. Berechnung der Kugel 282
„ 52. Vermischte Aufgaben 283
„ 53. Anwendungen 285

„ 54. Anhang. Dreieckstafel 288

Erstes Kapitel.

Die Grundrechnungsarten.

Nr. 1. Addition und Subtraktion.

1. a) $23+45+15=23+(45+15)$. b) $76+39+24$.
c) $887+2125+113$. d) $483+719+517$.
e) $9{,}4+6{,}7+1{,}3$. f) $5{,}49+3{,}75+1{,}25$.
g) $0{,}92+1{,}47+1{,}08$. h) $8{,}23+9{,}34+0{,}77$.
i) $6{,}28+7{,}93+3{,}72$. k) $0{,}504+0{,}72+0{,}296$.
l) $5\frac{1}{8}+3\frac{4}{5}+4\frac{7}{8}$. m) $2\frac{11}{18}+7\frac{2}{13}+9\frac{5}{6}$.
n) $8\frac{11}{15}+5\frac{4}{9}+1\frac{4}{15}$. o) $13\frac{71}{85}+9\frac{11}{19}+4\frac{14}{85}$.

2. a) $287-98-37$. b) $226-85-66$.
c) $615-374-235$. d) $1263-819-343$.
e) $3{,}5-1{,}9-0{,}5$. f) $67{,}3-25{,}8-19{,}3$.
g) $0{,}875-0{,}296-0{,}225$. h) $0{,}468-0{,}196-0{,}098$.
i) $6\frac{3}{4}-2\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}$. k) $19\frac{11}{12}-5\frac{2}{5}-6\frac{5}{12}$.
l) $8\frac{17}{24}-3\frac{4}{15}-2\frac{3}{8}$. m) $15\frac{13}{18}-5\frac{3}{16}-4\frac{2}{9}$.
n) $48\frac{29}{36}-27\frac{5}{32}-13\frac{1}{18}$. o) $34\frac{31}{48}-17\frac{7}{9}-11\frac{5}{16}$.

3. a) $87+46-36$. b) $46-23+13$.
c) $219+198-57$. d) $359-397+188$.
e) $62{,}5-83{,}8+26{,}3$. f) $75{,}3-91{,}7+23{,}4$.
g) $37{,}25-36{,}7+5{,}75$. h) $93{,}46-87{,}25+6{,}54$.
i) $45\frac{3}{16}-57\frac{3}{4}+17\frac{9}{16}$. k) $37\frac{5}{12}-29\frac{1}{4}+5\frac{1}{3}$.
l) $18\frac{71}{96}-5\frac{5}{18}+3\frac{3}{32}$. m) $26\frac{15}{56}-11\frac{13}{42}-9\frac{3}{8}$.

4. Welchen Wert nimmt der Ausdruck $a-b+c-d$ an, wenn man

a) $a=27$, $b=13$, $c=55$, $d=19$ setzt?
b) $a=24{,}75$, $b=19{,}28$, $c=37{,}25$, $d=23{,}45$ „
c) $a=126{,}43$, $b=98{,}67$, $c=85{,}57$, $d=57{,}63$ „
d) $a=35\frac{11}{12}$, $b=13\frac{5}{16}$, $c=24\frac{7}{12}$, $d=14\frac{3}{16}$ „
e) $a=71\frac{47}{60}$, $b=65\frac{14}{15}$, $c=84\frac{11}{12}$, $d=29\frac{1}{8}$ „
f) $a=86\frac{15}{91}$, $b=48\frac{49}{65}$, $c=31\frac{7}{13}$, $d=35\frac{4}{5}$ „

5. Welchen Wert nimmt der Ausdruck $a - (b + c) + (d - e)$ an, wenn man

a) $a = 38$, $b = 25$, $c = 27$, $d = 48$, $e = 31$ setzt?
b) $a = 45{,}3$, $b = 19{,}8$, $c = 21{,}7$, $d = 16{,}9$, $e = 5{,}4$ „
c) $a = 18{,}275$, $b = 3{,}824$, $c = 11{,}676$, $d = 14{,}275$, $e = 9{,}825$ „
d) $a = 23\frac{17}{24}$, $b = 5\frac{5}{6}$, $c = 7\frac{3}{4}$, $d = 11\frac{7}{18}$, $e = 8\frac{2}{9}$ „
e) $a = 15\frac{18}{27}$, $b = 17\frac{25}{36}$, $c = 9\frac{16}{105}$, $d = 28\frac{19}{28}$, $e = 19\frac{23}{42}$ „
f) $a = 8\frac{1}{8}$, $b = 39\frac{4}{21}$, $c = 29\frac{17}{28}$, $d = 82\frac{13}{40}$, $e = 7\frac{17}{35}$ „
g) $a = 14\frac{8}{16}$, $b = 3\frac{7}{18}$, $c = 4\frac{11}{20}$, $d = 18\frac{19}{36}$, $e = 13\frac{25}{48}$ „

6. Wie groß ist x, wenn man hat

a) $x + 24 = 53$? b) $x + 99 = 125$?
c) $x + 6{,}5 = 19{,}3$? d) $x + 3{,}75 = 5$?
e) $x + 3\frac{5}{8} = 7\frac{1}{4}$? f) $x + 13\frac{5}{18} = 24\frac{17}{24}$?
g) $x - 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{4}$? h) $x - 5\frac{3}{4} = 6\frac{7}{8}$?
i) $x - 8{,}43 = 2{,}57$? k) $x - 27{,}46 = 1{,}84$?
l) $25 + x = 39$? m) $11\frac{5}{27} - x = 3\frac{5}{18}$?
n) $62{,}78 - x = 37{,}22$? o) $0{,}653 - x = 0{,}553$?

7. a) Welche Zahl muß man zu 13 addieren, um 57 zu erhalten?
b) Welche Zahl muß man von 95 subtrahieren, um 78 zu erhalten?
c) Zu welcher Zahl muß man 23 addieren, um 41 zu erhalten?
d) Von welcher Zahl muß man 19 subtrahieren, um 13 zu erhalten?
e) Ein Knabe schenkte einem Freunde 6 Nüsse und besaß dann noch 14 Nüsse. Wie groß war sein Vorrat?
f) Beim Bezahlen einer Rechnung erhielt A auf einen Hundertmarkschein 65,25 ℳ heraus. Wie viel ℳ betrug die Rechnung?

Nr. 2. Multiplikation.

8. a) $(8 \cdot 13) \cdot 9$. b) $(2{,}75 \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}25$.
c) $2{,}5 \cdot (5{,}4 \cdot 15)$. d) $1{,}25 \cdot (0{,}25 \cdot 1{,}6)$.
e) $3\frac{2}{3} \cdot (1\frac{5}{7} \cdot 5\frac{1}{4})$. f) $(1\frac{11}{25} \cdot 3\frac{1}{18}) \cdot (2\frac{5}{11} \cdot 8\frac{1}{3})$.

9. a) $6 \cdot 8 \cdot 5$. b) $25 \cdot 19 \cdot 4$.
c) $12 \cdot 18 \cdot 5 \cdot 25$. d) $64 \cdot 9 \cdot 125 \cdot 17$.
e) $35 \cdot 75 \cdot 14 \cdot 24$. f) $55 \cdot 215 \cdot 8 \cdot 12$.
g) $4{,}5 \cdot 8 \cdot 1{,}4$. h) $0{,}75 \cdot 0{,}36 \cdot 24$.
i) $1{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 12 \cdot 32$. k) $2{,}5 \cdot 3{,}75 \cdot 0{,}16 \cdot 8$.
l) $11\frac{11}{22} \cdot 4\frac{1}{11} \cdot 2\frac{2}{5}$. m) $5\frac{1}{7} \cdot 1\frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{9}$.
n) $9\frac{3}{13} \cdot 9\frac{7}{13} \cdot 3\frac{3}{15} \cdot 3\frac{9}{23}$. o) $14\frac{2}{5} \cdot 4\frac{4}{15} \cdot 3\frac{3}{64} \cdot 1\frac{1}{9}$.

10. a) $3a \cdot 7$. b) $5x \cdot 19$.
c) $4 \cdot 6y$. d) $7 \cdot 18z$.

e) $6{,}5a \cdot 2{,}4$. f) $12{,}5t \cdot 0{,}16$.
g) $6{,}25 \cdot 0{,}64z$. h) $3{,}75 \cdot 2{,}4a$.
i) $5\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{15}p$. k) $9\frac{3}{13} \cdot 3\frac{7}{15}q$.

11. a) $6x \cdot 7y$. b) $3u \cdot 7v \cdot 5w$.
c) $15a \cdot 13b \cdot 8c$. d) $25r \cdot 16s \cdot 15t \cdot 8u$.
e) $0{,}5a \cdot 0{,}8b \cdot 2{,}3c$. f) $4{,}25r \cdot 1{,}7s \cdot 0{,}04t$.
g) $1{,}25p \cdot 2{,}25q \cdot 0{,}8r$. h) $8{,}75x \cdot 0{,}04y \cdot 2{,}6z$.
i) $6{,}25ab \cdot \frac{4}{25}cd$. k) $0{,}35a \cdot 0{,}45bc \cdot 1{,}6def$.
l) $9{,}2xu \cdot 0{,}25yv \cdot \frac{9}{23}z$. m) $3\frac{1}{8}ab \cdot 0{,}28c \cdot 3\frac{3}{7}de$.

12. a) $3x \cdot 4x$. b) $0{,}7y \cdot 0{,}3y \cdot 0{,}5y$.
c) $ax^2 \cdot bx^3$. d) $5ax \cdot 7a^2y$.
e) $12a^2b \cdot 5ab^2$. f) $3\frac{1}{3}a^3x^2 \cdot 3\frac{3}{4}a^2x^5$.
g) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^7$. h) $x^2 \cdot y \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot x$.
i) $2ab \cdot 3a^2b^3 \cdot 4a^3b^2$. k) $0{,}5x^4y^3 \cdot 0{,}4x^2y^7 \cdot 5xy^2$.
l) $18x^2y^3z^4 \cdot 12x^3y^4z^3$. m) $2{,}5a^3bc^2 \cdot 1{,}2ab^2c^4$.
n) $9p^4qr \cdot 4pq^3r^2 \cdot 5pqr^3$. o) $2\frac{1}{2}x^2y^3z^7 \cdot 3\frac{3}{5}xy^5z^2 \cdot 3\frac{1}{3}x^4yz$.
p) $6\frac{2}{9}u^2v \cdot 5\frac{1}{4}v^2w \cdot 10\frac{2}{7}uv$. q) $8\frac{2}{5}a^2b^3 \cdot 2\frac{19}{22}a^3c^4 \cdot 7\frac{6}{7}b^5c^3$.

13. Welchen Wert hat die Größe

a) $3a^2b$
1. für $a = 4$ und $b = 3$?
2. „ $a = 6{,}5$ „ $b = 1{,}25$?
3. „ $a = 6{,}25$ „ $b = 3{,}75$?
4. „ $a = 7\frac{1}{5}$ „ $b = 4\frac{1}{6}$?
5. „ $a = 5\frac{5}{8}$ „ $b = 7\frac{1}{9}$?

b) $4a^3b^3$
1. für $a = 3$ und $b = 2$?
2. „ $a = 2{,}5$ „ $b = 0{,}5$?
3. „ $a = 4{,}9$ „ $b = 3{,}7$?
4. „ $a = 6\frac{1}{4}$ „ $b = 2\frac{2}{5}$?
5. „ $a = 11\frac{3}{7}$ „ $b = 2\frac{5}{8}$?

c) $2a^3bc^2$
1. für $a = 4$, $b = 5$ und $c = 3$?
2. „ $a = 1{,}5$, $b = 32$ „ $c = 2{,}5$?
3. „ $a = 7{,}5$, $b = 6{,}25$ „ $c = 1{,}6$?
4. „ $a = 2\frac{2}{3}$, $b = 5\frac{1}{3}$ „ $c = 2\frac{1}{4}$?
5. „ $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 4\frac{4}{9}$ „ $c = 4\frac{1}{5}$?

Nr. 3. Division.

14. a) $xy : y$. b) $abc : b$. c) $abc : bc$.
d) $3xyz : yz$. e) $8uvw : 4uv$. f) $35uvwt : 7vt$.
g) $42a^2b : 6a^2b$. h) $108x^3y^2 : 18x^3y^2$. i) $119x^5z^7 : 17x^5z^7$.
k) $0{,}75r^4s^5 : 0{,}25r^2s^2$. l) $1{,}75a^3b^4 : 3{,}5a^3b^3$. m) $2{,}56p^7q^3 : 1{,}6p^3q^2$.

n) $\frac{11}{24}a^5b^3 : \frac{15}{32}a^3b$. o) $4\frac{2}{5}p^7q^5 : 3\frac{2}{3}p^5q^5$. p) $5\frac{2}{3}r^4s^5 : 1\frac{5}{12}rs$.
q) $6\frac{1}{8}a^5b^3c^4 : 9\frac{1}{3}a^2b^2c^3$. r) $7\frac{1}{5}x^7y^5z^6 : 3\frac{3}{7}x^4y^3z^3$. s) $26\frac{2}{3}a^7bc^5 : 3\frac{1}{5}a^2bc$.

15. a) $(24x \cdot 13y) : 12x$.*) b) $(75r \cdot 7t) : 25r$.
c) $(169a^2b \cdot 9c) : 13a$. d) $(225a^2b^2 \cdot 17a^3b) : 15a^4b^2$.
e) $(81x^3y \cdot 36x^2y^3) : 27x^4y^4$. f) $(91p^5q \cdot 12pq^5) : 13p^3q^3$.

16. a) $72a^5b^7 : (9a^2b^2 \cdot 4a^3b^3)$. b) $144x^8y^8 : (18x^3y^2 \cdot 4x^2y^3)$.
c) $180p^5q^6 : (12p^2q \cdot 3pq^2)$. d) $156u^9v^7 : (13u^5v^2 \cdot 4u^2v^5)$.
e) $6\frac{6}{55}a^5b^7 : (5\frac{9}{11}a^3b^2 \cdot 7\frac{1}{5}ab^4)$. f) $22\frac{2}{9}x^8y^6 : (5\frac{7}{25}x^3y^2 \cdot 4\frac{4}{15}x^2y^3)$.
g) $6\frac{5}{8}p^9q^{12} : (7\frac{1}{12}p^5q^5 \cdot 5\frac{2}{5}p^3q^4)$. h) $17\frac{1}{2}m^8n^{11} : (9\frac{3}{13}m^3n^5 \cdot 7\frac{7}{12}m^4n^6)$.

17. Wie groß ist x, wenn man hat:

a) $6x = 24$? b) $17x = 85$? c) $19x = 171$?
d) $0{,}7x = 5{,}6$? e) $0{,}25x = 7{,}5$? f) $2{,}5x = 0{,}75$?
g) $3\frac{3}{4}x = 5\frac{1}{5}$? h) $8\frac{1}{3}x = 7\frac{1}{7}$? i) $5\frac{1}{7}x = 2\frac{2}{35}$?
k) $8\frac{17}{26}x = 6\frac{3}{37}$? l) $7\frac{1}{24}x = 5\frac{24}{29}$? m) $9\frac{4}{13}x = 12\frac{2}{9}$?
n) $\frac{x}{5} = 6$? o) $\frac{7x}{9} = 42$? p) $\frac{3ax}{4} = 9a$?

18. a) Welche Zahl muß man mit 5 multiplizieren, um 55 zu erhalten?
b) Welche Zahl muß man durch 9 dividieren, um 7 zu erhalten?
c) Mit welcher Zahl muß man 19 multiplizieren, um 57 zu erhalten?
d) Durch welche Zahl muß man 85 dividieren, um 5 zu erhalten?
e) Von welcher Zahl ist 154 das 11fache?
f) Von welcher Zahl ist 8 der 5te Teil?

Zweites Kapitel.

Verbindung der 4 Rechnungsarten.

Nr. 4. Mehrgliedrige Ausdrücke. Klammerausdrücke.

1. a) $a + a + a + a + a$.
b) $a + 2a + 3a + 4a$.
c) $2a + 5a + 9a + a + 14a$.
d) $4a^2 + 7a^2 + 3a^3 + 6a^2$.
e) $25ab + 32ab + 47ab + 19ab$.
f) $0{,}7x^2y + 1{,}2x^2y + 2{,}4x^2y + 1{,}7x^2y$.
g) $32{,}75u^2v^3 + 27{,}84u^2v^3 + 52{,}59u^2v^3 + 26u^2v^3 + 1{,}87u^2v^3$.
h) $6{,}285ax^3 + 8{,}72ax^3 + 15{,}3ax^3 + 0{,}9254ax^3 + 12ax^3$.

---

*) $= 2 \cdot 18y$!

i) $\frac{5}{16}u^4v^5 + \frac{4}{9}u^4v^5 + \frac{17}{24}u^4v^5 + \frac{25}{36}u^4v^5 + \frac{41}{48}u^4v^5$.
k) $46\frac{3}{4}p^2q^2 + 18\frac{5}{12}p^2q^2 + 19\frac{11}{15}p^2q^2 + 13\frac{7}{20}p^2q^2 + 25\,p^2q^2$.
l) $6{,}4a^5bc + 23\frac{14}{45}a^5bc + 9\frac{7}{18}a^5bc + 4{,}9a^5bc$.
m) $12{,}25x^4 + 19\frac{11}{15}x^4 + 4{,}52x^4 + 8\frac{67}{75}x^4 + 7\frac{7}{12}x^4$.

2. a) $6a - 3a + 5a + 7a - 9a - a$.
b) $14x - 21x - 25x + 48x + 13x$.
c) $8xy - 12xy + 3xy - 9xy + 24xy$.
d) $43a^4b^3 - 96a^4b^3 - 29a^4b^3 + 85a^4b^3 - 2a^4b^3$.
e) $8{,}5xy - 9{,}7xy + 18{,}3xy - 4{,}7xy - 3{,}9xy$.
f) $2{,}483\,p^2q - 3{,}75\,p^2q - 5{,}4\,p^2q + 9{,}65\,p^2q - 1{,}875\,p^2q$.
g) $23\frac{14}{15}rs^3 - 19\frac{11}{12}rs^3 - 27\frac{9}{20}rs^3 - 17\frac{53}{60}rs^3 + 48\frac{3}{10}rs^3$.
h) $34\frac{5}{12}a^2b - 15\frac{7}{27}a^2b - 11\frac{11}{72}a^2b + 9\frac{49}{54}a^2b - 5\frac{101}{108}a^2b$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 3, 4 und 5 in Nr. 19.)

3. a) $(15 - 4) \cdot 3$.
b) $15 - 4 \cdot 3$.
c) $(27 + 45) \cdot 100$.
d) $47 + 45 \cdot 100$.
e) $(830 - 7) \cdot 100$.
f) $830 - 7 \cdot 100$.
g) $(8 + 7) \cdot (11 + 4)$.
h) $8 + 7 \cdot (11 + 4)$.
i) $8 + 7 \cdot 11 + 4$.
k) $(8 + 7) \cdot 11 + 4$.
l) $24 : 6 + 2 \cdot 5$.
m) $96 : 4 + 3 \cdot 12$.
n) $96 : (4 + 3 \cdot 12)$.
o) $(96 : 4 + 3) \cdot 12$.
p) $5 \cdot 14 + 7\,(3 \cdot 6 + 4)$.
q) $(8 \cdot 3 - 19) \cdot 4 - 80 : 16$.
r) $84 - 3\,(112 : 14 + 26 : 13)$.
s) $125 - (8{,}5 + 56 : 7) : 3$.

4. a) $34 + [5 \cdot (8 - 3) - 28 : 4] : 9$.
b) $72 - 8[63 : (9 \cdot 2 - 11) - 125 : 25]$.
c) $[18 \cdot (52 : 3 + 5) - 11 \cdot 12] : [85 : (8 + 3 \cdot 3) + 6 \cdot (2 \cdot 7 - 144 : 36) - 35]$.
d) $[6{,}87 + (2{,}83 + 0{,}6) \cdot 1{,}5 - 24 \cdot 0{,}375] : 2{,}5$.
e) $[23{,}8 - (5{,}93 - 2{,}76) \cdot 2{,}5 + 2{,}56 : 0{,}32] \cdot (0{,}873 - 0{,}247)$.
f) $56{,}25 - [8{,}2 - (9{,}5 : 0{,}5 - 0{,}92 \cdot 20)] \cdot (5{,}16 - 2{,}87)$.
g) $[(3{,}275 + 1{,}02) \cdot 2{,}7 - 3{,}01264] \cdot [6{,}9 - (7{,}2 : 2{,}4 + 2{,}3)]$.
h) $[9{,}357 \cdot 2{,}4 - (13{,}8 - 2{,}7899) \cdot 0{,}2] : [22{,}5 - 65{,}6 : (8{,}9 - 4{,}9) - 5{,}85]$.
i) $[0{,}725 \cdot (22{,}7 - 8{,}24 : 1{,}25) - 6{,}83] \cdot [96{,}4 : (87{,}7 - 85{,}2) - 6{,}9 \cdot 3{,}7]$.
k) $[(5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2}) \cdot 4\frac{2}{7} - 6\frac{1}{2}] : (8\frac{1}{2} - 3\frac{6}{7})$.
l) $[(32\frac{7}{8} + 24\frac{5}{12}) \cdot \frac{24}{125}] \cdot [(16\frac{2}{15} - 6\frac{3}{35}) : 3\frac{1}{7}]$.
m) $[(44\frac{3}{8} - 25\frac{17}{24}) : 8\frac{1}{6} + 15\frac{37}{42}] \cdot [4\frac{1}{5} \cdot (\frac{8}{21} + 27 : 81) + 2\frac{1}{13} : \frac{9}{26}] \cdot 3\frac{9}{13}$.
n) $\frac{14}{45} + [\frac{5}{8} \cdot (\frac{1}{3} + \frac{3}{5}) + \frac{2}{9} : \frac{2}{3}] : [3\frac{1}{8} : (\frac{2}{3} + \frac{7}{12}) - \frac{1}{4} : \frac{3}{10}]$.

5. a) $\{2{,}786 - 0{,}012 \cdot [13{,}8 - (11{,}579 + 0{,}02) : 2{,}5] + 18{,}37\} : 0{,}625$.
b) $\{26{,}73 : (4{,}97 - 1{,}77) - [43{,}7 + (8{,}43 - 48{,}5 : 6{,}4) \cdot 0{,}25] + 19{,}2\} \cdot 1{,}25$.
c) $\{(14\frac{4}{9} + 36\frac{2}{5} - 22\frac{2}{7}) : [(14\frac{8}{13} - 4\frac{34}{39}) \cdot 1\frac{1}{19} - 3\frac{21}{65}]\} : 2\frac{5}{84}$.
d) $\{[(12\frac{9}{14} - 10\frac{3}{7}) \cdot 1\frac{2}{31} + 1\frac{3}{8}] : 6\frac{11}{14} - \frac{13}{25}\} : (6\frac{3}{5} - 6\frac{72}{125})$.

Nr. 5. Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen.

6. a) $a+2b+3a+5b+7b+4a=(a+3a+4a)+(2b+5b+7b)$.
b) $7x+9y+13y+5x+2x+9y$.
c) $3a+4b+2c+7b+4c+6a+9c$.
d) $15p+39+7r+9r+6p+21q+7r$.
e) $7\frac{19}{35}a+8\frac{2}{3}b+5\frac{25}{89}b+4\frac{13}{21}a+9\frac{4}{15}a+7\frac{7}{18}b$.
f) $2\frac{1}{19}a+9\frac{7}{30}b+6\frac{14}{85}a+8\frac{5}{40}b+11\frac{7}{24}b+5\frac{25}{44}a$.

7. a) $7a-9b-11a-13b+17b+6a$.
b) $9m+7n-8m+13m-4n-5m+6n$.
c) $13a^2-17a-19a-12a^2+26a+5a^2$.
d) $5ab^2-8a^2b-3a^2b-17ab^2+18a^2b+9ab^2$.
e) $13\frac{1}{5}x^2y^3+4\frac{2}{7}x^2y-5\frac{4}{15}x^2y^3-3\frac{1}{2}x^2y-2\frac{11}{14}x^2y-3\frac{3}{10}x^2y^3$.
f) $8\frac{3}{4}u^3-5\frac{5}{11}u^3v-4\frac{18}{44}u^3v+4\frac{18}{44}u^3+12\frac{14}{35}u^3v$.

8. a) $48a+13b+(15a+7b)$.
b) $23a+37b+(11a-19b)$.
c) $36a+7b+19c+(8a-5b+17c)$.
d) $123x+115y+102z+(63x-19y-27z)+(17z-94x-62y)$.
e) $87p-23q+49r+(39q-47p-25r)+(13r-5p-7q)$.
f) $7\frac{11}{12}a^2+9\frac{11}{15}a+(5\frac{5}{18}a^2-4\frac{3}{5}a)+(13\frac{7}{25}a-10\frac{5}{24}a^2)$.
g) $14\frac{17}{35}xy+37\frac{19}{48}xy^2+(9\frac{23}{56}xy+4\frac{17}{32}xy^2)+(13\frac{91}{96}xy^2-18\frac{29}{40}xy)$.

9. a) $25x+17y-(19x+13y)$.
b) $36a+15b-(9a+4b)-(11a+7b)$.
c) $62r+49s-(47r-18s)-(61s-19r)$
d) $17x-(3y+4z)-(8x-11z)-(5x-7y)$.
e) $14x-(2y-3x)-(5y-6x)-(3y+9x)-(13y+11x)$.
f) $27a-(15b-12c)-(12a-9b)-(9c-5a)-(c-8b)$.
g) $3\frac{3}{4}a-4\frac{11}{15}b-(9\frac{4}{25}b-4\frac{4}{9}a)-(5\frac{5}{12}a-22\frac{11}{75}b)$.
h) $13\frac{13}{18}x-(5\frac{5}{24}x+6\frac{9}{35}y)-(9\frac{17}{42}y-7\frac{19}{36}x)-(9\frac{43}{72}x-21\frac{11}{30}y)$.
i) $17\frac{5}{12}a-(3\frac{5}{8}b-4\frac{4}{7}c)-(6\frac{7}{18}a-15\frac{13}{21}c)-(8\frac{2}{3}a-7\frac{9}{16}b)$.
k) $22\frac{5}{9}u-(24\frac{11}{16}v+17\frac{8}{15}w)-(11\frac{7}{15}u+9\frac{23}{24}v+8\frac{17}{25}w)+43\frac{4}{5}w-(4\frac{68}{75}w-38\frac{43}{48}v)$.

10. a) $13x-19y-(15x-34y)+(9x-7y)$.
b) $25a-(17b-5a)+(24b-18a)-(3a-8b)$.
c) $26r-(47r-59s)-(67s-45r)+(12s-4r)$.
d) $27x-(13y+11z)+(15z-11x)-(4x-18y)$.
e) $19\frac{7}{8}a^3-(5\frac{7}{15}a^2-11\frac{5}{14}a)-(13\frac{5}{12}a^3-17\frac{16}{21}a)+(8\frac{2}{5}a^2-2\frac{7}{24}a^3)$.
f) $7\frac{1}{2}xyz-(2\frac{2}{5}yz-8\frac{1}{3}z)+(5\frac{3}{4}xyz-2\frac{5}{6}z)-(9\frac{1}{8}xyz-6\frac{7}{10}yz)$.

Nr. 6. Eingliedrige algebraische Zahlen.

11. a) $4a - 9a = -5a$. b) $23x - 31x$.
c) $16r - 7r - 19r$. d) $25y - 48y + 29y - 15y$.
e) $13b - 9b - 18b + 24b - 36b$. f) $8c - 9c - 11c + 12c - 14c$.
g) $14a - 27b - 19a + 13b$. h) $34x + 17y - 53x - 32y$.
i) $7a - 5b - 6c - 19b + 3a - 11c - 15a + 14b + 9c$.
k) $45u - 67v + 11w - 68u - 19w + 42v - 15w$.
l) $3\frac{11}{15}w - 4\frac{2}{9}v - 11\frac{9}{16}u - 8\frac{7}{10}w + 2\frac{5}{6}v + 7\frac{5}{24}u$.
m) $75\frac{19}{26}z - 56\frac{21}{25}x + 44\frac{39}{42}y - 87\frac{14}{39}z + 44\frac{7}{10}x - 53\frac{5}{7}y$.
n) $6{,}25r - 8{,}47s + 5{,}24t - 9{,}62r - 3{,}69s - 7{,}13t$.
o) $0{,}825a^2 - 0{,}873ab - 0{,}694b^2 + 0{,}657ab - 1{,}041a^2 + 0{,}478b^2$.

12. a) $(+3a) \cdot (+4b)$. b) $(-3a) \cdot (+4b)$.
c) $(+3a) \cdot (-4b)$. d) $(-3a) \cdot (-4b)$.
e) $(+25a^2b) \cdot (-4ab^2)$. f) $(-15x^3y) \cdot (-5x^2y^4)$.
g) $(-7x^2) \cdot (+5xy) \cdot (+3y^2)$ h) $(+0{,}5a^2) \cdot (-0{,}4ab) \cdot (+8b^2)$.
i) $(-\frac{3}{4}a) \cdot (-\frac{5}{3}b) \cdot (+\frac{4}{5}c)$. k) $(-3\frac{1}{5}x) \cdot (+3\frac{1}{3}y) \cdot (-5\frac{1}{4}z)$.
l) $(-3a)(-4b) \cdot (-6c) \cdot (+5d)$.
m) $(-5ab)(-2a^3b^5) \cdot (-6a^4) \cdot (+3b^4)$.
n) $(-4\frac{1}{2}x^2)(+2\frac{2}{9}y^2) \cdot (+3\frac{3}{4}xy) \cdot (-5\frac{1}{8}x^2y^3)$.
o) $(-2{,}5a^2) \cdot (-6{,}4bc) \cdot (-0{,}15ac) \cdot (-0{,}24ab)$.
p) $(-6{,}5r^3) \cdot (-1{,}2s^2) \cdot (-0{,}45r^2s) \cdot (-3{,}6rs^3)$.
q) $(-3a)^3$ (oder $(-3a) \cdot (-3a)$) r) $(-2\frac{1}{5}x)^2$ s) $(-0{,}5u)^2$.
t) $(-12a)^2$. u) $(-8\frac{1}{3}x)^2$. v) $(-0{,}25p)^2$.

13. a) $(+12ab) : (+4a)$. b) $(+12ab) : (-4a)$.
c) $(-12ab) : (+4a)$. d) $(-12ab) : (-4a)$.
e) $(+72a^5b^4) : (-9a^3b^2)$. f) $(-112x^2y^5) : (-28xy^3)$.

Nr. 7. Addition und Subtraktion algebraischer Summen. Auflösung der Klammern.

14. a)
$$\begin{array}{r} 5a - 6b - 7c + 8d \\ -3a + 2b - 9c - 3d \\ -8a - 5b + 11c - 9d \\ +15a + 4b - 3c + 5d. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 8x - 5y + 7z - 9t \\ +5x + 9y - 8z - 11t \\ -4x - 5y + 3z + 26t \\ -14x + 6y - z - 7t. \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} -3{,}5a - 5{,}7b + 1{,}8c - 2{,}9d \\ +5{,}3a - 3{,}6b - 4{,}3c + 7{,}6d \\ -7{,}4a + 11{,}2b - 2{,}2c - 5{,}2d \\ -0{,}8a + 2{,}7b + 2{,}9c + 4{,}8d. \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 23{,}59x - 16{,}75y - 9{,}84z \\ -9{,}25x + 12{,}64y - 7{,}53z \\ -23{,}48x + 15{,}06y + 11{,}68z \\ +38{,}32x - 4{,}99y + 8{,}24z. \end{array}$$

e) $4\frac{1}{4}p - 3\frac{7}{15}q - 8\frac{4}{5}r$
$-3\frac{1}{6}p + 6\frac{4}{15}q + 5\frac{3}{4}r$
$-7\frac{11}{12}p + 7\frac{11}{30}q - 7\frac{7}{10}r$
$+9\frac{3}{15}p - 4\frac{1}{3}q + 4\frac{13}{20}r.$

f) $8\frac{5}{7}u + 7\frac{5}{6}v - 6\frac{18}{21}w$
$+9\frac{3}{14}u - 3\frac{4}{5}v + 9\frac{3}{7}w$
$-3\frac{9}{28}u - 9\frac{11}{15}v + 2\frac{2}{3}w$
$-7\frac{1}{2}u + 2\frac{3}{10}v - 8\frac{1}{2}w.$

15. a) Min. $32a - 19b + 17c.$
Subtr. $-17a + 4b + 23c.$

b) $-8a - 9b + 11c - 17d.$
$-11a + 2b + 3c - 19d.$

c) $25x - 23y + 17z - 19.$
$4x - 11y + 9z - 26.$

d) $6p - 7q - 9r + 16.$
$-8p - 11q + 2r - 4.$

e) $8{,}3a - 5{,}7b + 2{,}9c - 11{,}4d.$
$6{,}9a + 2{,}5b - 8{,}4c - 5{,}7d.$

f) $-9{,}2p + 8{,}2q - 2{,}7r + 0{,}925.$
$-11{,}8p + 5{,}7q - 6{,}3r + 0{,}526.$

g) $0{,}258x - 0{,}725y - 2{,}834z.$
$0{,}629x - 0{,}947y + 0{,}164z.$

h) $-2{,}534a^2 + 4{,}719a - 2{,}764.$
$-5{,}6a^2 + 2{,}94a - 4{,}038.$

i) $5\frac{2}{3}a - 6\frac{13}{15}b + 5\frac{11}{12}c.$
$3\frac{1}{4}a - 8\frac{1}{5}b - 3\frac{2}{3}c.$

k) $-4\frac{18}{42}x + 9\frac{11}{15}y - 7\frac{19}{36}z.$
$-8\frac{31}{35}x + 5\frac{13}{25}y + 2\frac{7}{24}z.$

l) $19\frac{23}{45}x^2 - 2\frac{19}{28}xy + 5\frac{32}{39}z^2.$
$12\frac{17}{30}x^2 + 7\frac{11}{42}xy - 2\frac{17}{52}z^2.$

m) $1\frac{18}{25}pqr - 6\frac{41}{51}pq - 4\frac{52}{57}p.$
$-3\frac{17}{35}pqr - 9\frac{61}{68}pq + 5\frac{17}{76}p.$

16. a) $26a - (9a - 5b + 6c) + (13a + 11b - 17c) - (4a - 3b - 9c) - (17b - 11c).$

b) $43x - 29y - 14z - (-19x + 21y - 2z) - (6x + 11y - 13z) - (14x - 4y) + (13y - 4z) - (26z - 11x).$

c) $86y - 42z - (-27x + 23y - 33z) - (-47y - 49x + 12z) - (32z - 19x + 7y) - (-4x + 5y - z).$

d) $5{,}3a^2 - 7{,}5ab + 1{,}9b^2 - (2{,}7ab - 1{,}6a^2 - 2{,}4b^2) - (2{,}2a^2 + 1{,}2ab - 3{,}4b^2) - (2{,}7b^2 - 1{,}3a^2 + 0{,}8ab).$

e) $4{,}27a^2 + 3{,}58a - 6{,}52 - (-8{,}48 - 2{,}75a^2 + 1{,}97a) - (2{,}15a - 1{,}17a^2 - 7{,}6) - (-3{,}25a^2 + 2{,}04a - 8{,}45).$

f) $13\frac{5}{6}pq - 7\frac{7}{8}pr + 5\frac{4}{9}qr - (8\frac{4}{9}pq - 3\frac{7}{24}pr + 7\frac{11}{18}qr) - (-5\frac{5}{12}pr + 8\frac{1}{3}pq - 3\frac{5}{6}qr) - (-3\frac{7}{12}qr - 7\frac{7}{18}pq + 9\frac{5}{12}pr).$

g) $4\frac{12}{35}x^2y - 8\frac{19}{27}xy - 6\frac{31}{25}xy^2 - (2\frac{5}{7}x^2y - 5\frac{8}{9}xy + 9\frac{3}{5}xy^2) - (-2\frac{11}{18}xy + 6\frac{4}{5}x^2y + 8\frac{7}{15}xy^2) - (-3\frac{2}{3}xy^2 + 4\frac{61}{70}x^2y - 7\frac{19}{54}xy).$

17. a) $123a - 147b - [25a - (17a - 19b) - (23b + 4a) - 11b].$

b) $6a - 9b + 7c - [13c - (4a - 11b + 9c) - (15b + 6a) + (7a - 8b - 9c)] - (16b - 27a - 29c).$

c) $43x - [-4y - (8z - 6x) - (9x - 5y) - (27z - 6x - 8y)] - [-16z - (24x - 9y - 13z) + (15x - 7y)].$

d) $8{,}3a^2 - [2{,}7a - (1{,}9a^2 - 7{,}4ab) - (2{,}7ab - 6{,}2a)] - [3{,}2a^2 - (5{,}6ab - 1{,}9a + 2{,}9a^2) + (1{,}1ab - 4{,}6a)].$

e) $8{,}84x^2 - [-6x^3 - (2{,}52x - 5{,}33x^2) - (-2{,}75x^3 - 6{,}8x + 7{,}55x^3)] - [4{,}81x - 6{,}15x^3 + (2{,}77x^3 - 5{,}12x) - (-4{,}23x^3 + 3{,}4x - 1{,}73x^3)].$

f) $2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{3}b - [4\frac{2}{5}ab - (-2\frac{5}{8}a - 4\frac{5}{9}b + 3\frac{11}{15}ab) - (5\frac{1}{4}a - 3\frac{1}{6}b)]$
$-[-3\frac{7}{18}b - 2\frac{11}{30}ab - (4\frac{13}{16}a - 1\frac{13}{18}b - 2\frac{7}{10}ab) + (6\frac{7}{8}a - 4\frac{1}{2}b)]$.

g) $3\frac{19}{30}x^2 - 4\frac{11}{28} - [8\frac{5}{8}x - (-4\frac{28}{45}x^2 + 3\frac{7}{16}x - 9\frac{13}{42}) - (18\frac{17}{21} - 6\frac{49}{60}x^2 - 7\frac{19}{24}x)]$
$-(-7\frac{5}{6}x^2 - 3\frac{7}{12}x - 8\frac{3}{7}) - [4\frac{9}{10}x^2 - (3\frac{9}{14} - 4\frac{3}{4}x)]$.

18. a) $75x - 39y - \{23z - [-14x - (17y - 19z)] - (22y - 27x)\}$.

b) $2a - \{-3b - [4c - (5a - 6b - 7c) - (-5b + 3c - 4a)] - (7b - 8c)\}$
$-\{9c - (11a + 5b) + [-3c - (14a - 5b) + (6c - 7b)] - 4b\}$.

c) $95r^3 - (57r + 11) - [54 - (36r^2 - 19r) - (37r - 25r^2)]$
$-\{-32r + 66 - [-26r + (23 - 17r^2)] - (19 - 4r)\}$.

d) $0{,}5a - 0{,}7ab + 0{,}6b^2 - \{0{,}8ab - [0{,}3b^2 - (0{,}7a - 1{,}2ab)] - (0{,}7ab - 0{,}8b^2)\}$.

e) $2{,}7x^3 - 6{,}57x - \{5{,}75 - (4{,}23x^3 - 2{,}78x) - [6{,}51x^3 - (9{,}4 - 4{,}3x)]\}$
$-\{-3x + [-2{,}25x^3 + (-9{,}1 + 4{,}68x) + (7{,}4x^3 - 5{,}61x)] - 16{,}4\}$.

f) $3\frac{4}{5}p - 4\frac{7}{9}q - \{6\frac{5}{12}r - (3\frac{7}{15}p - 5\frac{5}{6}q) - [7\frac{3}{10}p - (3\frac{11}{18}q - 2\frac{7}{16}r)]\}$
$-\{5\frac{5}{6}q - [2\frac{3}{4}r - (1\frac{11}{30}p - 2\frac{1}{8}q)]\}$.

g) $27\frac{11}{36}x^2 - \{-13\frac{17}{24}xy + [12\frac{19}{30}y^2 - (7\frac{4}{9}x^2 - 6\frac{13}{16}xy)] - (8\frac{38}{45}y^2 - 4\frac{5}{8}xy)\}$
$-\{9\frac{17}{18}x^2 - [15\frac{5}{12}xy - (3\frac{47}{60}y^2 + 4\frac{7}{12}x^2)]\}$.

19. In den Aufgaben 17 den Wert der algebraischen Summen zu berechnen 1) nach Auflösung der Klammern und Ausführung der Addition; 2) durch Ausführung der Rechnungen in der vorgeschriebenen Reihenfolge, wenn man setzt:

a) $a = 2$, $b = 3$. a′) $a = -0{,}4$, $b = -0{,}3$.
b) $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$. b′) $a = 0{,}2$, $b = -0{,}3$, $c = -0{,}1$.
c) $x = -4$, $y = 3$, $z = -1$. c′) $x = 0{,}2$, $y = -0{,}5$, $z = 0{,}3$.
d) $a = 1{,}2$, $b = -0{,}5$ d′) $a = 0{,}25$, $b = -0{,}01$.
e) $x = -4$. e′) $x = -0{,}2$. e″) $x = -0{,}05$.
f) $a = 80$, $b = 36$. f′) $a = 3{,}2$, $b = -1{,}8$.
g) $x = 72$. g′) $x = -18$. g″) $x = -2{,}4$.

20. In den Aufgaben 18 den Wert der algebraischen Summen zu berechnen 1) nach Auflösung der Klammern und Ausführung der Addition; 2) durch Ausführung der Rechnungen in der vorgeschriebenen Reihenfolge, wenn man setzt:

a) $x = -2$, $y = -3$, $z = -1$. a′) $x = -0{,}1$, $y = -0{,}2$, $z = 0{,}3$.
b) $a = 8$, $b = -5$, $c = -3$. b′) $a = 0{,}5$, $b = 0{,}3$, $c = -0{,}7$.
c) $r = 0{,}4$. c′) $r = -0{,}2$.
d) $a = 30$, $b = -40$. d′) $a = -0{,}2$, $b = -0{,}5$.
e) $x = 2$. e′) $x = -0{,}3$.
f) $p = 30$, $q = -18$, $r = -48$. f′) $p = -6$, $q = 9$, $r = -24$.
g) $x = 72$, $y = -48$. g′) $x = -12$, $y = -16$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 6, 7 und 8 in Nr. 19.)

Nr. 8. Multiplikation algebraischer Summen.

21. a) $3(x+y)$. b) $7(x-y)$.
c) $2(a-b+c)$. d) $12(a+b-c-d)$.
e) $3(2a-3b-4c)$. f) $5(3x-7y+2z)$.
g) $2{,}4(1{,}5a-2{,}5b-0{,}5c)$. h) $0{,}16(2{,}5x-1{,}5y+3{,}5z)$.
i) $0{,}6(0{,}7p-0{,}8q-0{,}1r)$. k) $0{,}002(25r-45s-65t$.
l) $1\frac{2}{3}(3\frac{3}{4}a^3-5\frac{1}{4}a+1\frac{4}{5})$. m) $2\frac{2}{5}(6\frac{1}{4}a^2-8\frac{1}{8}ab-7\frac{1}{2}b^2)$.
n) $7\frac{1}{12}(7\frac{1}{5}x^2-2\frac{4}{17}xy-24y^2)$. o) $4\frac{16}{21}(6\frac{3}{10}p^2+8\frac{2}{5}p-3\frac{9}{25})$.

22. a) $(2a-5b)\cdot 5m$. b) $(2a-5b)\cdot 3a$.
c) $9ab(4a-7b)$. d) $12a^2(5ab+3b^2)$.
e) $(2{,}7a-3{,}2b+4{,}3c-6{,}2d)\cdot 0{,}5f$.
f) $(4{,}3a^2-5{,}4ab-2{,}4b^4+7{,}8a-3{,}2b)\cdot 0{,}7ab$.
g) $(3{,}75x^4-5{,}25x^3-2{,}25x^2+8{,}5x-1{,}75)\cdot 0{,}16x^2$.
h) $(11\frac{2}{3}x^2y-5\frac{4}{9}xy^2-4\frac{1}{5}xy+23\frac{1}{3}x-12\frac{4}{9}y)\cdot 6\frac{3}{7}xy$.

23. a) $5(2x-7y)+6(5y-2x)-3(4x+6y)$.
b) $3(2a-11b)-17a-4(5b-8a)+19b$.
c) $3a(4a-5b)-4b(5a+7b)$.
d) $8x(3x-5y)-5y(2x-7y)-7y(4x-3y)+6x(11x-9y)$.
e) $(5m-7n)\cdot 4m-(3m-8n)\cdot 5n-(7n-2m)\cdot 6m+(5m-n)\cdot 3n$.
f) $(12u-3v)\cdot 4u-(11v-6u)\cdot 5v+(7v-3u)\cdot 8v-(9u+2v)\cdot 7v$.
g) $3a[5b-(7a-4b)]-8b[3a-(7b-5a)+(6a-11b)]$.
h) $5x^2[3x^3-2(4x^2-5x)+7]+3x[5x^3+4(3x^2-7)+11x]$.
i) $0{,}5r(0{,}8r-0{,}6s)-0{,}4s(1{,}5s-2{,}5r)$.
k) $0{,}7a(0{,}5a-0{,}3b)+0{,}9b(0{,}4b-0{,}7a)-3{,}4(0{,}4a^2-0{,}9ab+0{,}2b^2)$.
l) $(2{,}5a^2-3{,}5a)\cdot 0{,}6a-(2{,}4a+1{,}6)\cdot 0{,}5a^2-0{,}9(2{,}7a^2-1{,}8a+1{,}2)$.
m) $0{,}5p^2[2{,}4p^2-0{,}3q(0{,}8p-0{,}7q)]-0{,}6q^2[1{,}8p^2-0{,}8p(0{,}4p-0{,}7q)+1{,}2q^2]$.
n) $2{,}5x\{2{,}8x^2-0{,}2x[0{,}8-(0{,}4x^2-0{,}7x)]+3{,}6\}-7{,}2x^2(0{,}15x^2-0{,}25x+0{,}5)$.
o) $2\frac{1}{2}a(4\frac{2}{5}a-6\frac{1}{4}b)-2\frac{2}{5}b(3\frac{3}{4}a+8\frac{1}{8}b)$.
p) $6\frac{3}{7}p(4\frac{1}{5}p-11\frac{2}{3}q)-4\frac{4}{9}q(3\frac{3}{8}p-5\frac{2}{5}q)$.
q) $2\frac{21}{8}x[2\frac{1}{4}x-(1\frac{7}{8}y-15\frac{3}{4})]-[6\frac{3}{5}x-(5\frac{5}{7}-4\frac{1}{6}y)]\cdot 8\frac{2}{5}y$.
r) $1\frac{1}{2}a\{2\frac{2}{3}a^2-[3\frac{5}{4}a^3-4\frac{1}{8}a(5\frac{1}{4}a-6\frac{3}{4})+4\frac{3}{8}]\cdot 4\frac{4}{5}a\}$
$-1\frac{2}{7}a^2(9\frac{1}{3}a^2-3\frac{8}{9}a+5\frac{4}{9})$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 9 und 10 in Nr. 19.)

24. a) $(2a-5b)(7a+4b)$. b) $(5x-3y)(6x-5y)$.
c) $(9r+7s)(2r-5s)$. d) $(8p-3q)(5q-7p)$.
e) $(a+b+c)(d+e)$. f) $(a-b+c)(d-e+f)$.
g) $(2a-3b-5c)(4a-2b+6c)$.
h) $(6p+3q-r)(2p-4q+5r)$.

i) $(4x - 5y - 7z)(8x - 7y - 5z)$.
k) $(0{,}3a + 0{,}7b - 0{,}8c)(0{,}5a - 0{,}6b + 0{,}3c)$.
l) $(1{,}25x - 2{,}75y + 3{,}5z)(1{,}2x + 2{,}8y - 0{,}8z)$.
m) $(6{,}4p - 4{,}8q + 4r)(0{,}25p - 0{,}75q - 1{,}25r)$.
n) $(0{,}25u + 0{,}35v - 0{,}55w)(0{,}24u - 0{,}12v + 0{,}16w)$.
o) $(6\frac{2}{5}a + 5\frac{1}{4}b)(8\frac{2}{5}a - 2\frac{2}{5}b)$.
p) $(2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{5}y)(5\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{4}y)$.
q) $(\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{5}{6}c)(1\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{4}b - 1\frac{1}{6}c)$.
r) $(\frac{5}{9}x - 2\frac{2}{3}y - 3\frac{1}{5}z)(3\frac{3}{5}x - 2\frac{1}{4}y + 1\frac{7}{8}z)$.

25. a) $(5a^2 - 3a + 2)(3a^2 - 5a - 4)$.
b) $(7x^2 + 4x - 9)(8x^2 - 2x + 7)$.
c) $(4p^2 + 3p - 2)(2p^2 - 3p - 4)$.
d) $(3r^2 - 9r + 7)(7r^2 - 8r + 5)$.
e) $(3r^2 + 9r - 7)(7r^2 + 8r - 5)$.
f) $(6u^2 - 5u + 4)(6u^2 + 5u - 4)$.
g) $(9x^2 - 7x + 8)(9x^2 + 7x - 8)$.
h) $(4x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 9)$.
i) $(0{,}8a^2 - 0{,}3a + 0{,}5)(0{,}7a - 0{,}4a + 0{,}9)$.
k) $(0{,}6a^2 - 0{,}7a + 0{,}4)(0{,}6a^2 + 0{,}7a - 0{,}4)$.
l) $(0{,}25x^2 - 0{,}5x + 6)(0{,}4x^2 + 2{,}8x - 0{,}8)$.
m) $(0{,}35p^2 + 0{,}45p - 0{,}7)(0{,}12p^2 - 0{,}16p + 0{,}5)$.
n) $(6{,}4r^2 - 1{,}2r - 0{,}48)(1{,}5r^2 - 2{,}5r + 0{,}3)$.
o) $(1\frac{1}{8}a^2 - 1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{5})(1\frac{1}{2}a^2 + 1\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{5})$.
p) $(\frac{4}{5}r^2 + \frac{3}{10}r - \frac{2}{15})(\frac{3}{8}r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{5}{4})$.
q) $(\frac{7}{8}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2})(\frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{2}{7})$.
r) $(11\frac{3}{7}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 13\frac{1}{3})(3\frac{5}{4}x^2 - 4\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{2})$.

26. a) $(2a + 5b)(3a - 4b) + (7a - 3b)(6a - 4b)$.
b) $(7x - 5y)(3x + 4y) - (6x + 7y)(2x - 3y)$.
c) $(3r - 7s)(5r - 4s) - (8r - 3s)(2r - 5s)$.
d) $(9p - 4q)(2p + 3q) - (5p - 6q)(6q - 5p)$.
e) $(2a + 3b)(4a - 5b) - (5a - 3b)(2a - 7b) + (a - 6b)(5b - a)$.
f) $(5x - 7y)(3x - 8y) - (7x - 3y)(9x - 4y) + (8x - 3y)(7x + 9y)$.
g) $(6p - 5q)(2p - 3q) - (8q - 7q)(4p - 5q) - (9p - q)(2q - 5p)$.
h) $(9u + 2v)(2u - 9v) - (7v - 3u)(3u + 7v) - (5v - 6u)(8v - u)$.
i) $(3a - 4b - 5c)(4a + 5b - 3c) - (7a + b - 2c)(2a - 3b + c)$.
k) $(5x - 7y + 9z)(5x + 7y - 9z) - (2x + 3y - 5z)(2x + 3y + 3z)$.
l) $(6r + 5s - 4t)(6r - 5s + 4t) - (4r - 5s + 6t)(9r + 2s - 3t)$.
m) $(0{,}8a - 0{,}7b)(0{,}6a + 0{,}5b) + (0{,}9a - 0{,}5b)(0{,}4a - 0{,}3b)$.
n) $(0{,}2x - 0{,}9y)(0{,}7x - 0{,}4y) - (0{,}3x - 0{,}5y)(0{,}4x - 0{,}8y)$.

o) $(0{,}9r+0{,}3t)(0{,}2r-0{,}5t)-(0{,}4r-0{,}7t)(0{,}8r+0{,}3t)+(0{,}2r-0{,}7t)(0{,}7r-0{,}1t)$.
p) $(0{,}2p-0{,}5q)(0{,}3p-0{,}4q)-(0{,}5p-0{,}2q)(0{,}6p+0{,}3q)-(0{,}7p-0{,}8q)(0{,}5q-0{,}3p)$.
q) $(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b)(\frac{3}{2}a-\frac{4}{3}b)+(\frac{5}{6}a-\frac{4}{5}b)(\frac{6}{5}a+\frac{5}{4}b)$.
r) $(2\frac{1}{2}a-3\frac{1}{3}b)(5\frac{1}{3}a+2\frac{1}{4}b)-(3\frac{1}{2}a+4\frac{1}{2}b)(2\frac{1}{6}a-2\frac{1}{4}b)$.
s) $(\frac{3}{4}x-\frac{4}{5}y)(\frac{3}{5}x-\frac{3}{4}y)-(\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}y)(\frac{3}{5}x+\frac{3}{2}y)$
$+(\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}y)(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}y)$.
t) $(2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3}y)(4\frac{1}{2}x-2\frac{2}{3}y)+(1\frac{1}{3}x+1\frac{1}{4}y)(2\frac{1}{4}x-1\frac{1}{2}y)$
$-(3\frac{3}{4}x-8\frac{1}{3}y)(2\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}y)$.
u) $(\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{5}{6})(\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{3})-(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{8}{27})(\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8})$.
v) $(\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{10}x+\frac{8}{15})(\frac{5}{8}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{5}{8})-(\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{8}x+\frac{5}{2})(\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{7}x+4)$.
w) $(\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{5})(\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{5})-(\frac{4}{5}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{4})(\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4})$.

27. a) $(3a+5b)^2$. b) $(5x-7y)^2$.
c) $(6p-7q)^2$. d) $(7m+3)^2$.
e) $(5r-q)^2$. f) $(7r^2+4)^2$.
g) $(0{,}4a+0{,}3b)^2$. h) $(0{,}5a-0{,}7b)^2$.
i) $(0{,}9r+7s)^2$. k) $(0{,}8u-0{,}3)^2$.
l) $(2x+3y)(2x-3y)$. m) $(5a-8b)(5a+8b)$.
n) $(0{,}9a-0{,}7b)(0{,}9a+0{,}7b)$. o) $(0{,}3x+0{,}5y)(0{,}3x-0{,}5y)$.
p) $(1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{3}y)(1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{3}y)$. q) $(2\frac{1}{4}a^2b-3\frac{1}{2}ab^2)(2\frac{1}{4}a^2b-3\frac{1}{2}ab^2)$.
r) $(2a-3b)(4a^2+9b^2)(2a+3b)$.
s) $(5x+3y)(25x^2+9y^2)(5x-3y)$.
t) $(7r-5s)(49r^2-25s^2)(7r+5s)$.
u) $(4a^2+3)(16a^4-9)(4a^2-3)$.
v) $(0{,}2x+0{,}5y)(0{,}04x^2-0{,}25y^2)(0{,}2x-0{,}5y)$.

28. a) $\mathbf{82^2(=(80+2)^2)}$. b) 53^2. c) 68^2.
d) 79^2. e) 103^2. f) 196^2.
g) $4{,}1^2$. h) $9{,}8^2$. i) $10{,}2^2$.
k) $0{,}72^2$. l) $0{,}88^2$. m) $50{,}4^2$.
n) $\mathbf{23\cdot 17\,[=(20+3)(20-3)]}$. o) $16\cdot 24$. p) $4{,}8\cdot 5{,}2$.
q) $6{,}5\cdot 7{,}5$. r) $496\cdot 504$. s) $20{,}6\cdot 19{,}4$.
t) $61{,}2\cdot 38{,}8$. u) $0{,}492\cdot 0{,}508$. v) $0{,}512\cdot 0{,}488$.

29. a) $(2a+3b+5c)^2$. b) $(7x+5y+2z)^2$.
c) $(8p+2q+7r)^2$. d) $(9u+4v+5w)^2$.
e) $(2a+5b-6c)^2$. f) $(4x-5y+7z)^2$.
g) $(5a^2-3a-2)^2$. h) $(3t^2-4t-5)^2$.
i) $(0{,}4a+0{,}5b-0{,}3c)^2$. k) $(1{,}2x-0{,}8y-0{,}5z)^2$.
l) $(0{,}7p-0{,}5q-0{,}4r)^2$. m) $(0{,}9m+0{,}3n+1)^2$.
n) $(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+2)^2$. o) $(1\frac{1}{2}x^2-2\frac{1}{3}x-\frac{1}{4})^2$.
p) $(\frac{5}{6}p^2-\frac{3}{5}p+\frac{1}{3})^2$. q) $(\frac{3}{4}r^2-\frac{2}{3}r-1\frac{1}{2})^2$.
r) $(\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{4}{5})^2$. s) $(\frac{5}{12}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5})^2$.

t) $(3a + 4b - 6c) \cdot (3a + 4b + 6c)$.
u) $(4x - 5y + 3z) \cdot (4x - 5y - 3z)$.
v) $(6x^2 - 3x + 5) \cdot (6x^2 + 3x - 5)$.
w) $(7a^2 - 5a - 4) \cdot (7a^2 + 5a + 4)$.
x) $(0{,}8x^4 + 0{,}3x^2 - 0{,}7) \cdot (0{,}8x^4 - 0{,}3x^2 + 0{,}7)$.
y) $(\frac{2}{3}r^2 - \frac{3}{4}r + \frac{5}{6}) \cdot (\frac{2}{3}r^2 + \frac{3}{4}r - \frac{5}{6})$.
z) $(\frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{4}{5}x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{3})$.

30. a) $(2a + 3b)^3$. b) $(5a - 2b)^3$.
c) $(6x - 5y)^3$. d) $(2ab + 3c)^3$.
e) $(3x^2y - 5z)^3$. f) $(0{,}5rs + 0{,}4t)^3$.
g) $(0{,}8a^2b - 0{,}3ab^2)^3$. h) $(0{,}2x^2 - 0{,}5xy)^3$.
i) $(\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5})^3$. k) $(\frac{4}{5}x^3 + \frac{5}{2}x)^3$.
l) $(\frac{7}{9}ax^2 - \frac{3}{5}bx)^3$. m) $(\frac{3}{10}ax - \frac{5}{3}a^3)$.

31. a) $(5x + 6y)^2 - (3x - 7y)^2 + (4x - 5y)(4x + 5y)$.
b) $(7x - 8y)^2 - (4x - y)^2 - (3x + 4y)(3x - 4y)$.
c) $(3x - 7)^2 - (5x - 2)^2 - (6x + 7)(7 - 6x)$.
d) $(9p - 8q)(9p + 8q) - (7p - 3q)^2 - (2p - 5q)^2$.
e) $(4x^2 - 3)(4x^2 + 3) - (3x - 4)^3 + (5x + 6)^3$.
f) $(6x^2 - 4)^3 - (5x^3 - 2x)^3 - (7x + 2)^3$.
g) $(0{,}4a^2 - 0{,}7a)^3 - (0{,}6a^2 - 0{,}5)^3 + (0{,}08a^3 + 0{,}2a^2)(0{,}08a^3 - 0{,}2a^2)$.
h) $(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3})^3 - (\frac{4}{3}x + \frac{3}{2})^3 + 2(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3})$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 11a—δ und 12a—w in Nr. 19.)

Nr. 9. Division algebraischer Summen durch eingliedrige Divisoren. Zerlegung in Faktoren.

32. a) $(56ax - 63bx + 42cx) : 7x$.
b) $(169ab - 156ac + 117ad - 91ac) : 13a$.
c) $(95ax + 133ax^2 - 76a^2x - 209a^2x^2) : 19ax$.
d) $(187x^4y^2 - 121x^3y^3 - 88x^2y^4 + 231x^2y^5) : 11xy$.
e) $(92r^5s^5 - 115r^3s^4 - 161r^3s^6 + 69r^6s^5) : 23rs$.
f) $(75ab^2 - 105a^2b - 165a^2b^2 + 180ab - 135a^3b^2) : 15ab$.
g) $(0{,}68ab - 0{,}85ac - 0{,}51ad + 0{,}34ae - 1{,}02af) : 1{,}7a$.
h) $(2{,}3x^2y^2 - 5{,}7x^3y^3 - 1{,}9x^3y^3 + 0{,}8x^3y^3) : 0{,}25xy$.
i) $(9\frac{3}{4}mn + 15\frac{3}{5}mo - 11\frac{7}{10}mp - 97\frac{1}{2}mq) : 1\frac{19}{20}m$.
k) $(12\frac{2}{3}a^3b^7 - 14\frac{1}{4}a^4b^6 - 15\frac{5}{6}a^5b^5 + 11\frac{1}{12}a^6b^4) : 4\frac{3}{4}ab$.
l) $(28\frac{1}{8}r^3s^2 - 22\frac{1}{2},^3s^4 + 33\frac{3}{4}r^4s^6 - 4\frac{11}{16}r^5s^8) : 1\frac{7}{8}rs$.

33. $$ax + bx = x(a + b).$$

a) $49ab + 63ac$. b) $56xy - 72xz$.

c) $24pq - 36pr$. d) $57mn - 38m$.
e) $85ax^2 + 34ax$. f) $77x^5y^3 - 55x^2y^7$.
g) $16a^2x^3 - 24ax^2 + 28ax$. h) $70p^5q^4 - 56p^4q^3 - 35p^3q^4$.
i) $52a^5b^6 - 65a^4b^7 + 78a^4b^5 - 39a^3b^8$.
k) $102x^2y^2 - 136x^3y^2 - 85x^2y^3 + 51x^3y^4$.
l) $0{,}35ab - 0{,}49ac$. m) $5{,}6ax + 4{,}2bx$.
n) $0{,}7p^2q - 0{,}6pq^2$. o) $2{,}3a^4b^5 - 2{,}1a^5b^4$.
p) $0{,}24r^3s^3 - 0{,}36r^2s^4 + 4{,}8r^3s^2$ q) $0{,}51x^7y^5 - 0{,}68x^5y^5 + 0{,}85x^5x^7$.
r) $2{,}4a^4m^2 - 3{,}3a^3m^3 - 4{,}2a^2m^3 + 5{,}1am^4$.
s) $2\frac{2}{5}rs - 2\frac{1}{10}rt$. t) $3\frac{3}{8}a^2b + 3\frac{3}{20}ab^2$.
u) $1\frac{5}{7}a^6b^4 - 1\frac{1}{14}a^5b^5 - 2\frac{25}{28}a^4b^6$.
v) $4\frac{2}{13}x^2y^5 + 8\frac{1}{6}xy^4 - 6\frac{2}{9}x^3y^3 - 7\frac{7}{12}x^4y^2$.

34. a) $x(a + b) + y(a + b)$.
b) $(x + y)a - (x - y)b$.
c) $a(r + s) - b(r + s) - c(r + s)$.
d) $3x(p - q) - 4y(p - q) + 5z(p - q)$.
e) $(3a - 5b)(2x + 5y) - (5a - 8b)(2x + 5y)$.
f) $(2r - 3s)(5p - 3q) - (7p - 8q)(2r - 3s)$
$- (2r - 3s)(9q - 4p) + (p - q)(2r - 3s)$.
g) $(5x - 4y)(7n - 4m) - (2x - 5y)(7n - 4m) + (7n - 4m)(6x - 7y)$
$- (7n - 4m)(6y - 7x)$.
h) $(3p + 4q)(5a - 9b) - (7q - 2p)(5a - 9b) - (8p - 11q)(5a - 9b)$
$+ 5a - 9b$.
i) $(1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}b)(1\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{2}b) + (1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}b)(2\frac{1}{2}a - 1\frac{2}{3}b)$
$- (3\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{4}b)(1\frac{1}{3}a - 2\frac{1}{3}b) - (1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}b)$.

35. a) $16a^2 - 40ab + 25b^2$. b) $9r^2 + 24rs + 16s^2$.
c) $49a^2b^4 - 70a^3b^3 + 25a^4b^2$. d) $121p^6q^4 - 44p^5q^5 + 4p^4q^6$.
e) $169a^2x^2 + 390abx + 225b^2$. f) $81m^4 - 108m^2n + 36n^2$.
g) $289a^4 - 204a^2 + 36$. h) $625x^6 + 550x^3 + 121$.
i) $0{,}25a^2 + 0{,}7ab + 0{,}49b^2$. k) $0{,}81x^4 - 1{,}26x^2y + 0{,}49y^2$.
l) $2{,}56p^2q^2 - 4{,}8pqr + 2{,}25r^2$. m) $1{,}96b^2 + 3{,}36bc^2 + 1{,}44c^4$.
n) $\frac{4}{9}a^2 + \frac{8}{15}ab + \frac{4}{25}b^2$. o) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{5}{4}xy + \frac{25}{36}y^2$.
p) $\frac{64}{121}r^2 - 2rs + \frac{121}{64}s^2$. q) $\frac{81}{25}a^4 + 12a^2b + \frac{100}{9}b^2$.
r) $2\frac{14}{25}x^4y^4 - 12x^2y^2z^2 + 14\frac{1}{16}z^4$. s) $5\frac{19}{25}a^2 - 5\frac{3}{5}ab^2 + 1\frac{13}{36}b^4$.
t) $49x^2 - 25y^2$. u) $81a^2 - 121b^2$.
v) $64a^2x^2 - 169b^2y^2$. w) $225r^2t^2 - 196p^2q^2$.
x) $16a^4 - 49$. y) $289x^2y^4 - 169$.
z) $1{,}44u^2v^2 - 1$. α) $3{,}24a^4 - 1$.
β) $0{,}0016r^4 - 0{,}01$. γ) $0{,}0576x^2y^2 - 0{,}0001$

δ) $87^2 - 13^2$. ε) $126^2 - 26^2$.
ζ) $289^2 - 211^2$. η) $512^2 - 488^2$.
ϑ) $5{,}23^2 - 4{,}77^2$. ι) $0{,}584^2 - 0{,}416^2$.
κ) $(12\frac{1}{2})^2 - (7\frac{1}{2})^2$. λ) $(25\frac{1}{3})^2 - (24\frac{2}{3})^2$.

36. a) $4a^2 + 12ab + 20ac + 9b^2 + 30bc + 25c^2$.
b) $49x^2 - 70xy + 28xz + 25y^2 - 20yz + 4z^2$.
c) $64p^2 - 32pq - 112pr + 4q^2 + 28qr + 49r^2$.
d) $4a^2 + 20ab - 24ac + 25b^2 - 60bc + 36c^2$.
e) $81u^2 - 72uv - 90uw + 16v^2 + 40vw + 25w^2$.

37. $$z + ax + bx = z + x(a + b).$$

a) $7a + 18xy + 45xz$. b) $9m + 15am - 25an$.
c) $12r - 35ps - 49pt$. d) $6a - 51bc + 68bd$.
e) $19pq + 45pr - 75ps$. f) $23a^3 - 18a^2x + 27b^2x$.
g) $17t + 0{,}45a^2b^3 - 0{,}55a^3b^2$. h) $6{,}5s - 5{,}6xy^2 + 2{,}1x^2y$.
i) $0{,}8x^2 - 0{,}35a^4b^2 - 0{,}4a^2b^4$. k) $2{,}3m - 2{,}25r^2 + 1{,}5rs$.
l) $6a + 1{,}25x^3y^3 - 2x^2y^4$. m) $19v - 1{,}29u^5v^7 + 2{,}15u^3v^9$.
n) $12u + 13\frac{1}{8}ab - 5\frac{5}{7}ac$. o) $29m - 6\frac{2}{9}x^2y - 12\frac{3}{5}xy^2$.
p) $23\frac{1}{4}t - 23\frac{1}{8}p^4q + 10\frac{8}{9}pq^4$. q) $5x - 8\frac{1}{8}r^2s^4 - 22\frac{3}{4}r^3s^2$.
r) $19a - 10\frac{5}{12}b^3 - 9\frac{3}{8}b$. s) $2u - 4\frac{11}{20}ab^2 + 3\frac{7}{15}a^2b^3$.
t) $24ap - 36aq + 35bp - 42bq$.
u) $8ax - 15bx - 20ay + 40by$.
v) $33x^4y^3 - 44x^3y^4 + 54u^5x^4 - 66u^4y^5$.
w) $0{,}96a^2b^2 - 0{,}72a^2c^2 - 1{,}15b^4 + 0{,}46b^2c^2$.
x) $5{,}2a^2x^3 - 3{,}9a^2y^3 - 6{,}5b^2x^3 + 7{,}5b^2y^3$.
y) $5{,}1ax - 6{,}8ay - 4{,}2bx - 5{,}6by$.

38. $$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

a) $ac + ad + bc + bd$. b) $pr - ps + qr - qs$.
c) $ax + ay - bx - by$. d) $mu - nu - mv + nv$.
e) $24ap - 36aq + 14bp - 21bq$.
f) $8ax - 12bx - 20ay + 30by$.
g) $33x^2y - 55xy^2 + 39a^2x - 65a^2y$.
h) $6p^2x - 15pqx + 2py - 5qy$.
i) $3a^3 - 20bc^2 - 5b + 12a^3c^2$.
k) $12b + 20a^2b - 15a - 16ab^2$.
l) $18r^2 - 35s^3 - 45rs^2 + 14rs$.
m) $40p^2q^2 - 15q^3 - 56p^3 + 21pq$.
n) $12x^3y^3 - 12x^2y^2 - 16y^5 + 9x^5$.
o) $0{,}32x^2 - 0{,}2xz - 0{,}4xy + 0{,}25yz$.
p) $1{,}2p^2 + 0{,}2pr - 2{,}4pq - 0{,}4qr$.

q) $0{,}15a^2 - 0{,}21bc - 0{,}35ab + 0{,}09ac$.
r) $5{,}1ax - 6{,}8ay - 4{,}2bx + 5{,}6by$.
s) $0{,}92a^2b^2 + 0{,}69a^2c^2 - 1{,}05b^2c^2 - 1{,}4b^4$.
t) $0{,}52a^2x^3 - 0{,}65b^2x^3 - 0{,}28a^2y^3 + 0{,}35b^2y^3$.
u) $8\frac{8}{9}ac + 5\frac{5}{7}bc + 7\frac{1}{2}ad + 4\frac{4}{7}bd$.
v) $1\frac{1}{9}ax + 1\frac{1}{24}bx - 3\frac{1}{3}ay - 3\frac{1}{8}by$.
w) $7\frac{17}{25}a^2b^3 - 12b^5 - 16a^2c^2 + 20b^3c^2$.
x) $r^2 - \frac{5}{8}r^2s^2 - 1\frac{3}{5}t^3 + s^2t^3$.
y) $3\frac{3}{4}ax^2 - 3\frac{1}{3}ay^2 - 1\frac{5}{6}bx^2 + 1\frac{17}{27}by^2$.

39. a) $ax - ay + bx - by - cx + cy$.
b) $2ax + 3bx - 2ay - 3by + 4az + 6bz$.
c) $24ab - 18ac - 28b^2 + 21bc + 40bd - 30cd$.

40. a) $(5a-9b)(3x-4y) - (4a-7b)(8y-9x) - (4a-7b)(3x-23y) - (4a-7b)(9x+11y)$.
b) $(3r-5s)(6p-5q) - (7r+5s)(8p-3q) + (3r+11s)(8p-3q) - (s-r)(8p-3q)$.
c) $(0{,}5a + 0{,}3b)(0{,}3c - 0{,}8d) + (0{,}2a - 0{,}3b)(2{,}3c - 1{,}5d) \cdot - (1{,}6c-1{,}3d)(0{,}2a-0{,}3b) - (0{,}2a-0{,}3b)(0{,}4c+0{,}6d)$.

41. a) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 25z^2$.
b) $9a^2 - 24ab + 16b^2 - 36c^2$.
c) $36x^2 - 60x + 25 - 49y^2$
d) $49a^4 - 70a^3 + 25a^2 - 81b^2$.
e) $16a^2b^2 - 40ab^3 + 25b^4 - 121c^2$.
f) $0{,}64r^2 - 0{,}48rs + 0{,}09s^2 - 0{,}25t^2$.
g) $0{,}49a^4 - 0{,}56a^2 + 0{,}16 - 0{,}81a^6$.
h) $0{,}81 - 1{,}98r + 1{,}21r^2 - 1{,}69s^2$.
i) $\frac{16}{25}a^2 - 2\frac{2}{5}ab + 2\frac{1}{4}b - 5\frac{4}{9}c^2$.
k) $\frac{4}{9}r^2 + r + \frac{9}{16} - 6\frac{1}{4}$.
l) $1\frac{7}{9}x^2 - 6xy + 5\frac{1}{16}y^2 - 6\frac{19}{25}z^2$.
m) $9\frac{49}{64}p^2 - 2\frac{1}{2}pq + \frac{4}{25}q^2 - 2\frac{7}{9}$.

42. a) $x^2 + 9xy + 20y^2$.
b) $42a^2 - 13ab + b^2$.
c) $r^2 - 16rs + 15s^2$.
d) $10a^2 - 11ab + b^2$.
e) $a^2 + 11ab + 30b^2$.
f) $18x^2 + 9ab + b^2$.
g) $p^2 - 17pq + 60q^2$.
h) $r^2 - 13rs + 22s^2$.
i) $a^2 - 2ab - 35b^2$.
k) $c^2 - 4cd - 45d^2$.
l) $x^2 + xy - 56y^2$.
m) $a^4 + 5a^2 - 104$.

Nr. 10. Division algebraischer Summen durch algebraische Summen.

43. a) $(9x + 9y) : (x + y)$.
b) $(21a - 35b) : (3a - 5b)$.
c) $(24u + 16v) : (3u + 2v)$.
d) $(75r - 30s) : (15r - 6s)$.
e) $(135a^2b - 81ab^2) : (15a - 9b)$.
f) $(12r^3s^2 - 16r^2s^3) : (3r - 4s)$.
g) $(35x^2y^2z - 42xyz^2) : (5xy - 6z)$.
h) $(75ab^2 + 20a^2y) : (15b^2 + 4ay)$.
i) $(72p^2q^3r - 88pqr^2) : (9pq^2 - 11r)$.
k) $(25x^3 + 45x) : (5x^2 + 9)$.
l) $(24a^2b^3 - 56ab^3) : (3ab - 7b^3)$.
m) $(44a^4b^3 + 60a^3b^4) : (11a^3 + 15ab^3)$.

n) $(2{,}8a + 3{,}6b) : (0{,}7a + 0{,}9b)$. o) $(3{,}5a - 2{,}1b) : (5a - 3b)$.
p) $(0{,}27ab + 0{,}45b^2) : (0{,}3a + 0{,}5b)$. q) $(0{,}81x^2y - 0{,}54xy^2) : (0{,}3x - 0{,}2y)$.
r) $(0{,}8u^3v^2 - 2{,}4u^2v^3) : (0{,}5u - 1{,}5v)$. s) $(0{,}7ab - 0{,}3b^2) : (0{,}28a - 0{,}12b)$.
t) $(2\frac{1}{4}a^5b^2 + 2\frac{1}{2}a^2b^5) : (\frac{3}{5}a^3 + \frac{4}{9}b^3)$. u) $(2\frac{2}{3}x^3y^2 - 3\frac{1}{5}x^2y^3) : (1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}y)$.
v) $(6\frac{2}{5}a^2b + 10\frac{2}{3}abc) : (\frac{1}{2}a + \frac{5}{6}c)$. w) $(9pq^2 - 20q^2) : (3\frac{3}{4}pq - 8\frac{1}{3}q)$.

44. a) $(35ab - 42ac + 56ad) : (5b - 6c + 8d)$.
b) $(39x^5 - 52x^4 + 91x^3 - 117x^2 + 26x) : (3x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$.
c) $(0{,}48a^4b^5 + 0{,}54a^3b^4 - 0{,}36a^2b^3 + 0{,}72ab^2) : (0{,}8a^3b^3 + 0{,}9a^2b^2 - 0{,}6ab + 1{,}2)$.
d) $(2{,}4a^5b^3 - 6a^4b^2 + 8{,}4a^3b) : (0{,}2a^4b^2 - 0{,}5a^3b + 0{,}7a^2)$.
e) $(6\frac{3}{4}a^7b^3 + 7\frac{1}{2}a^5b^5 - 10\frac{4}{5}a^3b^7) : (\frac{4}{5}a^4 + \frac{8}{9}a^2b^2 - 1\frac{7}{25}b^4)$.
f) $(12\frac{4}{5}a^4b^2 - 21\frac{1}{3}a^3b^3 + 25\frac{5}{5}a^2b^4) : (1\frac{1}{2}a^2 - 2\frac{1}{2}ab + 3b^2)$.

45. a) $(ac + bc + ad + bd) : (a + b)$.
b) $(ac + bc - ad - bd) : (a + b)$.
c) $(ax - bx + ay - by) : (a - b)$.
d) $(xu - xv - yu + yv) : (x - y)$.
e) $(4ax - 5bx - 4ay + 5by) : (x - y)$.
f) $(24ap - 36aq - 30bp + 45bq) : (4a - 5b)$.
g) $(35mx - 28my - 20nx + 16ny) : (7m - 4n)$.
h) $(10pr - 15ps - 6qr + 9qs) : (5p - 3q)$.
i) $(8a^3 - 12a^2b + 18ab^2 - 27b^3) : (2a - 3b)$.
k) $(125x^3 - 75x^2y - 45xy^2 + 27y^3) : (25x^2 - 9y^2)$.
l) $(35x^2u - 21x^2z - 40y^2u + 24y^2z) : (5u - 3z)$.
m) $(0{,}48ar - 0{,}42br + 0{,}4as - 0{,}35bs) : (0{,}8a - 0{,}7b)$.
n) $(0{,}14x^5y^3 - 0{,}63x^3y^2 - 0{,}08x^4y^4 + 0{,}36x^2y^5) : (0{,}7x^2y - 0{,}4xy^2)$.
o) $(1{,}8r^4 + 0{,}6r^2t - 4{,}5r^2s - 1{,}5st) : (0{,}2r^2 - 0{,}5s)$.
p) $(0{,}92a^2x^3 - 0{,}69a^2y - 1{,}4bx^2 + 1{,}05by) : (2{,}3a^2 - 3{,}5b)$.
q) $(0{,}052a^2x^3 - 0{,}065b^2x^3 + 0{,}28a^2y^3 - 0{,}35b^2y^3) : (0{,}04a^2 - 0{,}05b^2)$.
r) $(2\frac{2}{9}ax + 2\frac{1}{12}bx - 6\frac{2}{3}ay - 6\frac{1}{4}by) : (3\frac{1}{5}a + 3\frac{1}{8}b)$.
s) $(13\frac{1}{3}ap - 17\frac{7}{9}bp + 5\frac{5}{8}aq - 7\frac{1}{2}bq) : (2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{3}b)$.
t) $(7\frac{7}{12}xu - 9\frac{3}{4}yu - 7\frac{7}{8}xv + 10\frac{1}{8}yv) : (2\frac{1}{6}u - 2\frac{1}{4}v)$.
u) $(\frac{1}{2}x^2u + \frac{8}{15}y^2u - \frac{9}{16}x^2v - \frac{3}{5}y^2v) : (\frac{2}{3}u - \frac{3}{4}v)$.
v) $(9x^3 - 20xy^2 - 2\frac{1}{2}x^2y + 5\frac{5}{9}y^3) : (2\frac{2}{5}x - \frac{2}{3}y)$.

46. a) $(6a^2 + 23ab + 20b^2) : (2a + 5b)$.
b) $(42a^2 - 10ab - 12b^2) : (7a + 3b)$.
c) $(21x^2 + 13xy - 20y^2) : (7x - 5y)$.
d) $(16r^2 - 46rs + 15s^2) : (2r - 5s)$.
e) $(18p^2 + 19pq - 12q^2) : (2p + 3q)$.
f) $(40u^2 - 53uv + 6v^2) : (5u - 6v)$.
g) $(15x^2 - 19xy - 56y^2) : (3x - 8y)$.

h) $(72p^2 + 7pq - 2q^2) : (8p - q)$.
i) $(90m^2 - 27mn - 85n^2) : (15m - 17n)$.
k) $(51x^4 + 164x^2y^2 - 247y^4) : (3x^2 + 13y^2)$.
l) $(336x^{10}y^6 - 572x^8y^8 + 180x^6y^{10}) : (12x^4y^2 - 5x^2y^4)$.
m) $(0{,}48a^2 - 0{,}02ab - 0{,}35b^2) : (0{,}6a + 0{,}5b)$.
n) $(0{,}32r^2 - 0{,}68rs + 0{,}21s^2) : (0{,}4r - 0{,}7t)$.
o) $(0{,}3p^2 + 0{,}03pq - 0{,}06q^2) : (0{,}5p - 0{,}2q)$.
p) $(1{,}4x^2 - 63{,}08xy + 3{,}6y^2) : (7x - 0{,}4y)$.
q) $(0{,}015a^2 + 0{,}17ab - 0{,}56b^2) : (0{,}3a - 0{,}8b)$.
r) $(\frac{16}{27}x^2 + \frac{5}{12}xy - \frac{9}{32}y^2) : (\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y)$.
s) $(p^2 - \frac{1}{12}pq - \frac{1}{2}q^2) : (\frac{3}{2}p + q)$.
t) $(\frac{2}{3}a^2x^2 - \frac{11}{45}axy - \frac{2}{3}y^2) : (1\frac{1}{2}ax + 1\frac{1}{4}y)$.
u) $(6\frac{2}{9}u^4 + 3\frac{1}{2}u^2v^2 - 3\frac{15}{16}v^4) : (4\frac{2}{3}u^2 + 5\frac{1}{4}v^2)$.
v) $(2\frac{1}{4}a^4b^4 + \frac{729}{800}a^2b^2c^2 - 1\frac{1}{2}c^4) : (3\frac{3}{4}a^2b^2 - 2\frac{2}{5}c^2)$.

47. a) $(21ax - 28bx - 35cx - 27ay + 36by + 45cy) : (7x - 9y)$.
b) $(12ap + 6aq - 2ar - 24bp - 12bq + 4br) : (2a - 4b)$.
c) $(32ax + 25bz + 35by - 20az - 40bx - 28ay) : (8x - 7y - 5z)$.
d) $(81x^3y^3 + 72y^3 - 63xy^3 + 56y - 49xy + 63x^2y) : (9x^3 + 8 - 7x)$.
e) $(96p^5x^3 - 32px^2 + 16p^3x - 36p^5x^3 - 48p^5x^2 + 12p^3x^2) : (4p^2 - 8x + 3p^2x)$.
f) $(10a^3b^3 + 20ab^3c^2 - 15a^2bc^2 - 4b^2c^3x + 3ac^3x - 2a^2b^2cx)$
$: (2a^2b^2 - 3ac^2 + 4b^2c^2)$.
g) $(15x^6y^6 - 21x^3y^5 - 12x^5y^3 + 12x^4y^4 - 15x^5y^7 + 21x^2y^6)$
$: (5x^4y^5 - 4x^3y^3 - 7xy^4)$.
h) $(0{,}24ax + 0{,}21cx - 0{,}27bx - 0{,}32ay + 0{,}36by - 0{,}28cy)$
$: (0{,}3x - 0{,}4y)$.
i) $(0{,}45a^2x^2 - 0{,}72a^2y^2 - 0{,}56b^2y^2 - 0{,}54a^2xy + 0{,}35b^2x^2$
$- 0{,}42b^2xy) : (0{,}5x^2 - 0{,}6xy - 0{,}8y^2)$.
k) $(0{,}6r^2u - 0{,}75ru + 0{,}7u - 0{,}48r^2v + 0{,}6rv - 0{,}56v)$
$: (1{,}2r^2 - 1{,}5r + 1{,}4)$.
l) $(\frac{4}{9}ax + \frac{8}{15}az - \frac{1}{2}ay - \frac{8}{15}bx + \frac{3}{5}by - \frac{16}{25}bz) : (\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + \frac{4}{5}z)$.
m) $(3a^2p - 3\frac{1}{5}abp - \frac{2}{5}c^2p - 6\frac{2}{5}a^2q + 7\frac{1}{9}abq + \frac{8}{9}c^2q)$
$: (1\frac{1}{4}a^2 - 1\frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}c^2)$.
n) $(5a^2x^4 + 6a^2x^2 - 11\frac{1}{4}a^2 - 3\frac{11}{18}b^2x^4 - 4\frac{1}{8}b^2x^2 + 8\frac{1}{8}b^2)$
$: (4\frac{1}{3}x^4 + 5\frac{1}{5}x^2 - 9\frac{3}{4})$.

48. a) $(8a^2 - 16ab - 8ac + 6b^2 - 8bc - 30c^2) : (2a - 3b - 5c)$.
b) $(12p^2 - 18pq + 28pr - 12q^2 + 19qr - 5r^2) : (2p - 4q + 5r)$.
c) $(32x^2 - 68xy - 76xz + 35y^2 + 74yz + 35z^2) : (4x - 5y - 7z)$.
d) $(143a^2 + 57ab + 4ac - 108b^2 + 213bc - 99c^2)$
$: (13a - 9b + 11c)$.

e) $(75p^2 - 55pq - 173pr - 60q^2 - 11qr + 80r^2) : (25p + 15q - 16r)$.

f) $(0{,}02a^2 + 0{,}05ab + 0{,}02b^2 + 0{,}09ac + 0{,}09bc + 0{,}09c^2) : (0{,}1a + 0{,}2b + 0{,}3c)$.

g) $(0{,}2x^2 - 0{,}9yz - 0{,}5xy + 1{,}6xz + 3z^2 - 1{,}2y^2) : (0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}6z)$.

h) $(2{,}4x^2 - 9{,}2xy + 8{,}4y^2 - 1{,}6xz - 1{,}6yz - 12{,}8z^2) : (0{,}6x - 1{,}4y - 1{,}6z)$.

i) $(0{,}125a^2 - 0{,}165ab + 0{,}052b^2 - 0{,}041bc + 0{,}025ac - 0{,}06c^2) : (0{,}25a - 0{,}13b + 0{,}2c)$.

k) $(x^2 - \frac{7}{24}xy + \frac{17}{36}xz - \frac{15}{16}y^2 + \frac{23}{12}yz - \frac{35}{36}z^2) : (1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}y - 1\frac{1}{6}z)$.

l) $(2a^2 + 6b^2 - 6c^2 - 10\frac{17}{20}ab - 13\frac{17}{30}ac + 5bc) : (3\frac{3}{5}a - 2\frac{1}{4}b + 1\frac{1}{2}c)$.

m) $(\frac{4}{5}p^2 - \frac{7}{30}pq + \frac{17}{45}px - \frac{3}{4}q^2 + \frac{23}{15}qr - \frac{7}{9}r^2) : (1\frac{1}{3}p - 1\frac{1}{2}q + 1\frac{2}{3}r)$.

49. a) $(15a^4 - 34a^3 + a^2 + 2a - 8) : (3a^2 - 5a - 4)$.

b) $(42r^4 + 174r^3 + 16r^2 - 202r + 70) : (3r^2 + 9r - 7)$.

c) $(18p^4 - 9pq^3 - 33p^3q + 32p^2q^2 - 8q^4) : (6p^2 - 7pq + 8q^2)$.

d) $(56a^4 + 119a^2b^2 + 45b^4 - 53a^3b - 47ab^3) : (7a^2 - 4ab + 9b^2)$.

e) $(0{,}35a^4 - 0{,}22a^3 - 0{,}28a^2 + 0{,}42a - 0{,}15) : (0{,}5a^2 - 0{,}6a + 0{,}3)$.

f) $(2{,}4x^4 - 5{,}12x^3 + 2{,}85x^2y^2 + 1{,}09xy^3 - 0{,}8y^4) : (1{,}2x^2 - 2{,}5xy + 1{,}6y^2)$.

g) $(1{,}08u^4 + 0{,}03y^3v - 3{,}81u^2v^2 - 0{,}92uv^3 + 0{,}96v^4) : (0{,}9u^2 - 1{,}1uv - 1{,}2v^2)$.

h) $(2\frac{2}{5}p^4 - 3\frac{3}{5}p^3q + 3\frac{1}{5}p^2q^2 + 3\frac{4}{5}pq^3 - q^4) : (2p^2 + pq - \frac{1}{3}q^2)$.

i) $(2x^4 + \frac{17}{20}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{10}x + 1\frac{1}{5}) : (3\frac{1}{5}x^2 - 1\frac{1}{5}x - 1\frac{3}{5})$.

k) $(1\frac{1}{2}a^4 - \frac{63}{80}a^3 - \frac{3}{5}a^2 - \frac{3}{15}a - \frac{209}{270}) : (2\frac{2}{5}a^2 - \frac{3}{10}a + 1\frac{4}{15})$.

50. a) $(9a^2 + 24ab + 16b^2 - 36c^2) : (3a + 4b + 6c)$.

b) $(16x^2 - 40xy + 25y^2 - 9z^2) : (4x - 5y - 3z)$.

c) $(49a^4 - 25a^2 - 40a - 16) : (7a^2 - 5a - 4)$.

d) $(0{,}64x^8 - 0{,}09x^4 + 0{,}42x^2 - 0{,}49) : (0{,}8x^4 + 0{,}3x^2 - 0{,}7)$.

e) $(1{,}08a^4 - 0{,}27a^2 + 0{,}9a - 0{,}75) : (0{,}6a^2 - 0{,}3a + 0{,}5)$.

f) $(1{,}44x^4 - 0{,}49x^2 + 0{,}84x - 0{,}36) : (1{,}2x^2 + 0{,}7x - 0{,}6)$.

g) $(\frac{4}{9}r^4 + r^3 + \frac{9}{16}r^2 - \frac{25}{36}) : (\frac{2}{3}r^2 + \frac{3}{4}r - \frac{5}{6})$.

h) $(2\frac{14}{25}x^6 - 2\frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{4}{9}) : (1\frac{3}{5}x^3 - 1\frac{1}{2}x - \frac{2}{3})$.

i) $(\frac{49}{64}a^4 - 2\frac{1}{3}a^3 + 1\frac{7}{9}a^2 - 3\frac{6}{25}) : (\frac{7}{8}a^2 - 1\frac{1}{3}a + 1\frac{4}{5})$.

51. a) $(a^3 - b^3) : (a - b)$. b) $(a^3 + b^3) : (a + b)$.

c) $(x^4 - y^4) : (x - y)$. d) $(x^4 - y^4) : (x + y)$.

e) $(x^5 - y^5) : (x - y)$. f) $(x^5 + y^5) : (x + y)$.

g) $(8x^6 - 27y^3) : (2x^2 - 3y)$. h) $(81a^4b^4 - 625c^8) : (3ab - 5c^2)$.

i) $(0{,}001a^6 + 0{,}027b^9) : (0{,}1a^2 + 0{,}3b^3)$.
k) $(0{,}512x^3 - 0{,}729y^3) : (0{,}8x - 0{,}9y)$.
l) $(3\frac{3}{8}u^3v^6 + 13\frac{108}{125}w^9) : (1\frac{1}{2}uv^2 + 2\frac{2}{5}w^3)$.
m) $(7\frac{58}{81}a^4 - 2\frac{113}{256}b^4c^8) : (1\frac{2}{3}a + 1\frac{1}{4}bc^2)$.
☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 11 ε—x und 12 x—z in Nr. 19.)

Drittes Kapitel.

Brüche und Proportionen.

Nr. 11. Gemeinschaftliche Faktoren. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

1. Die gemeinschaftlichen Faktoren zu bestimmen bei den Ausdrücken

a) ax und ay. b) a^2x und ay.
c) a^2b „ ab^2. d) $4a^2x^2$ „ $6abx^2$.
e) $15a^2b^2$ „ $25abc$. f) $36p^4q^3$ „ $48p^3q^4$.
g) $65x^2y^4$ „ $91x^3y^3$. h) $12a^5b^2$ „ $18a^3b^4$.
i) $144a^3x^3$ „ $96a^5x^4$. k) $105c^2d^2$ „ $175c^3d^3$.

2. Den größten gemeinschaftlichen Faktor zu bestimmen bei den Ausdrücken

a) $35a^4b^3$ und $45a^3b^5$. b) $72x^2y^4$ und $48x^3y^3$.
c) $56a^2x^2$ „ $70ax^3$. d) $39r^4s^5$ „ $65r^3s^7$.
e) $85a^3y^2$ „ $119a^2y^4$. f) $57p^3q^5$ „ $133p^4q^2$.
g) $105x^2y$ „ $167xy^2$. h) $92u^4v^3$ „ $161u^2v^5$.
i) $45a^3b^2$, $63a^2b^3$ und $81a^3b^3$.
k) $28x^3y^2z^4$, $49x^2y^3z^4$ und $63x^4y^2z^3$.
l) $26p^4q^3r^2$, $39p^3q^2r^4$ „ $65p^2p^4r^3$.
m) $136a^5b^6c^4$, $85a^3b^7c^5$ „ $51a^4b^3c^8$.
n) $25a^4b^5$, $45a^3b^6$, $60a^3b^3$ und $85a^2b^4$.
o) $40x^6y^3$, $80x^4y^5$, $56x^5y^4$ „ $72x^3y^6$.
p) $77r^2s^4$, $66r^3s^3$, $99r^4s^2$ „ $132r^4s^4$.

3. Bestimme in den Aufgaben 2 a—p die Ergänzungsfaktoren, die bei den einzelnen Gliedern zu dem größten gemeinschaftlichen Faktor gehören!

4. Die (größten) gemeinschaftlichen Faktoren und die zugehörigen Ergänzungsfaktoren zu bestimmen bei den Ausdrücken

a) $4a + 6b$ und $12a + 18b$.

b) $a^2 + ab$ und $ab + b^2$.
c) $a^2 - ab$ „ $ab - b^2$.
d) $a^3 - ab^2$, $a^2b - ab^3$ und $a^2 + ab$.
e) $x^4 + 2x^3y + x^2y^2$, $x^4 - x^2y^2$ und $x^3 + x^2y$.
f) $a^3 - 2a^2b + ab^2$, $a^3 - ab^2$ und $a^2 - ab$.
g) $9x^2 - 16y^2$, $12x^2 + 16xy$ und $15xy + 20y^2$.
h) $12a^2b - 75b^3$, $10a^2 - 25ab$ und $4ab - 10b^2$.
i) $3a^4 + 18a^3b + 27a^2b^2$, $4a^3 - 36ab^2$ und $12a^2 + 36ab$.
k) $18x^4 - 48x^3y + 32x^2y^2$, $36x^3 - 64xy^2$ und $18x^2 - 24xy$.
l) $a^2 + ab$, $a^2b - b^3$ und $a^3 + b^3$.
m) $x^2 - xy$, $x^3 - 2x^2y + xy^2$ und $x^4 - xy^3$.
n) $p^3 + 2p^2q + pq^2$, $p^4 - p^2q^2$ und $p^5 - pq^4$.
o) $p^4 - p^3q$, $p^4 - p^2q^2$ und $p^5 - pq^4$.

5. Bestimme die (größten) gemeinschaftlichen Faktoren und die zugehörigen Ergänzungsfaktoren bei den Ausdrücken

a) $ac + bc + ad + bd$ und $ax + bx - ay - by$.
b) $ac + bc - ad - bd$ und $cx - cy - dx + dy$.
c) $xu - xv - yu + yv$ und $px - py + qx - qy$.
d) $36ax + 57bx + 48ay + 76by$ und $9mx + 12my + 12nx + 16ny$.
e) $24ap - 36aq - 30bp + 45bq$ und $6ap - 9aq - 8bp + 12bq$.
f) $10pr - 15ps - 6qr + 9qs$ und $15ap - 9aq + 20bp - 12bq$.
g) $9a^2x - 6ax^2 + 15ab - 10bx$ und $12a^2x - 3ax^2 + 20ab - 5bx$.
h) $8a^3 - 12a^2b + 18ab^2 - 27b^3$ und $2a^3 - 3a^2b - 4ab^2 + 6b^3$.
i) $125x^3 - 75x^2y - 45xy^2 + 27y^3$ und $20xu + 12yu - 25xv - 15yv$.
k) $35x^2u - 40y^2u - 21x^2z + 24y^2z$ u. $50u^3 - 18uz^2 - 75u^2v + 27vz^2$.
l) $8a^2x^2 - 3b^3 - 6abx + 4ab^2x$ u. $12a^3x^2 - 9a^2bx + 20abx - 15b^2$.
m) $92a^2b^2 + 69a^2c^2 - 105b^2c^2 - 140b^4$ u $24a^2b^2 + 18a^2c^2 - 20b^3c - 15bc^3$.
n) $52a^2x^3 - 65b^2x^3 - 28a^2y^3 + 35b^2y^3$ u. $28a^2x^2 + 44a^2yz - 35b^2x^2 - 55b^2yz$.

6. Bestimme die (größten) gemeinschaftlichen Faktoren und die zugehörigen Ergänzungsfaktoren bei den Ausdrücken

a) $a^2 + 5ab + 6b^2$ und $a^2 + 3ab + 2b^2$.
b) $x^2 - 8xy + 15y^2$ „ $x^2 - 7xy + 10y^2$.
c) $p^2 - 2pq - 8q^2$ „ $p^2 - 5pq - 14q^2$.
d) $r^2 + rs - 12s^2$ „ $r^2 - 2rs - 3s^2$.
e) $a^2 + 14ab + 49b^2$ „ $a^2 + 5ab - 14b^2$.
f) $u^2 - 6uv + 9v^2$ „ $u^2 + uv - 12v^2$.
g) $a^2 + 4ab + 3b^2$, $a^2 + 2ab - 3b^2$ und $a^3 + 9ab + 18b^2$.
h) $x^2 - 4xy + 4y^2$, $x^2 - 4y^2$ „ $x^2 - 3xy + 2y^2$.
i) $p^2 - 4pq + 3q^2$, $p^2 - 9q^2$ „ $p^2 - 5pq + 6q^2$.

k) $a^2 - 5ab + 4b^2$, $2a^2b - 8ab^2$ und $a^3 - 16ab^2$.
l) $x^3 - 4x^2y + 3xy^2$, $x^2y + 2xy^2 - 3y^3$ und $x^3y - x^2y^2 - 2xy^3$.
m) $u^4 + u^3v - 2u^2v^2$, $u^3v + 4u^2v^2 + 4uv^3$ „ $u^2v^2 + 5uv^3 + 6v^4$.

7. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und die Ergänzungsfaktoren zu bestimmen zu den Ausdrücken
a) $24a^2y^3$ und $36a^3y$. b) $45x^4y^2$ und $65x^3y^4$.
c) $35p^2qr$ „ $49pq^2r^3$. d) $52a^4b^2c^3$ „ $39a^3b^4c^2$.
e)—u) zu den Ausdrücken a—p in Aufgabe 2.

8. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und die Ergänzungsfaktoren zu den Ausdrücken a—o in Aufgabe 4 zu bestimmen.

9. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und die Ergänzungsfaktoren zu bestimmen zu den Ausdrücken
a) $x^2 + xy$, $xy - y^2$ und $x^2 - y^2$.
b) $a^2 - ab$, $ab + b^2$, $a^2 - b^2$ und ab.
c) $3x + 4y$, $6xy - 8y^2$ $9x^2 - 16y^2$ und $2x^2y$.
d) $15u^2 + 12uv$, $25u^2 - 16v^2$, $25u^2 + 40uv + 16v^2$ und $10uv - 6v^2$.
e) a, $a + b$, und b.
f) $a - x$, x „ $a + x$.
g) ax, $a - x$ „ $a^2 + ax$.
h) $3a - 2b$, $2a - 3b$ und $6ab$.
i) $5x^2 - 3y^2$, $5x^2 - 3y$ und $15xy$.
k) $a^2 + ab + b^2$, $a + b$ „ $a - b$.
l) $4x - 3$, $4x - 2$ „ $4x - 4$.
m) $x^2 - x - 2$, $x^2 - 5x + 6$ und $x^2 - x - 6$.
n) $12ab + 16b^2$, $9a^2 + 12ab$ „ $9a^2 - 24ab + 16b^2$.

Nr. 12. Erweitern und Kürzen der Brüche.

10. Erweitere den Bruch
a) $\frac{5}{7}$ auf den Nenner 56. a′) $\frac{11}{19}$ auf den Nenner 57.
b) $\frac{15}{23}$ „ „ „ 207. b′) $\frac{19}{31}$ „ „ „ 403.
c) $\frac{5}{9}$ auf den Nenner 45. c′) $\frac{9}{13}$ auf den Nenner 429.
d) $\frac{a}{b}$ „ „ „ a^2b. d′) $\frac{x}{y}$ „ „ „ yzt.
e) $\frac{5x}{6y}$ „ „ „ $42y^3$. e′) $\frac{3a}{7b}$ „ „ „ $84a^2b^2$.
f) $\frac{7rs}{5ab}$ „ „ „ $40a^2b^3$. f′) $\frac{9}{11p^2q}$ „ „ „ $55p^3q^3$.
g) $\frac{a+b}{a-b}$ „ „ „ a^2-b^2. g′) $\frac{x-y}{x+y}$ „ „ „ x^2-y^2.
h) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ a. d. Nenner $25a^2-16b^2$. h′) $\frac{4p-q}{2p+3q}$ a. d. Nenner $4p^2-9q^2$.

i) $\frac{r+s}{3r-2s}$ a. d. Nenner $9r^2-4s^2$. i') $\frac{2a+3}{a-1}$ a. d. Nenner a^2-1.

k) $\frac{2x-3}{x-3}$ „ „ „ x^2-9. k') $\frac{4x+5}{5-2x}$ „ „ „ $25-4x^2$.

l) $\frac{a+b}{a-b}$ „ „ „ $a^2-2ab+b^2$. l') $\frac{x-y}{x+y}$ „ „ „ $x^2+2xy+y^2$.

m) $\frac{2a-3b}{a+2b}$ „ „ „ $a^2+4ab+4b^2$. m') $\frac{p+q}{p-3q}$ „ „ „ $p^2-6pq+9q^2$.

n) $\frac{5r-7s}{2a-3}$ „ „ „ $4a^2-12a+9$. n') $\frac{2x-5y}{3x-1}$ „ „ „ $9x^2-6x+1$.

o) $\frac{4x-q}{x-7}$ „ „ „ $x^2-16x+63$. o') $\frac{2a+7}{a-3}$ „ „ „ $a^2+5a-24$.

p) $\frac{3u-11}{u+5}$ „ „ „ $u^2-4u-45$. p') $\frac{6z-1}{z-7}$ „ „ „ $z^2-5z-14$.

11. Erweitere den Bruch

a) $\frac{7r-9s}{5p-3q}$ auf den Nenner $10pr-15ps-6qr+9qs$.

b) $\frac{2x+3y}{7m-4n}$ „ „ „ $35mx-28my-20nx+16ny$.

c) $\frac{a^2+ab+b^2}{2a-3b}$ „ „ „ $8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$.

d) $\frac{5p-6q}{4p-5q}$ „ „ „ $24ap-36bp-30aq+45bq$.

e) $\frac{7x^2-9y^2}{5u-3z}$ „ „ „ $35x^2u-21x^2z-40y^2u+24y^2z$.

f) $\frac{2x-3y}{7x^2y-4xy^2}$ auf den Nenner $14x^5y^3-63x^3y^3-8x^4y^4+36x^2y^3$.

g) $\frac{4x^2-3y}{23a^2-35b}$ „ „ „ $92a^2x^2-69a^2y-140bx^2+105by$.

12. Erweitere den Bruch

a) $\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ auf den Nenner a^3-b^3.

b) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ „ „ „ a^3+b^3.

c) $\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ „ „ „ a^4-b^4.

d) $\frac{a}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}$ „ „ „ a^4-b^4.

13. Kürze den Bruch

a) $\frac{abc}{bcd}$. b) $\frac{axy}{bxy}$. c) $\frac{pq^2r}{pq}$.

d) $\frac{a}{ax}$. e) $\frac{abc}{4abcd}$. f) $\frac{a^2x^3}{7a^2x^3y^2}$.

g) $\frac{12x^4}{8x^3}$. h) $\frac{7a^3b^2}{56a^2b^3}$. i) $\frac{24a^5b^7}{36a^8b^4}$.

k) $\frac{75x^4y^3z^5}{105x^5y^3z^4}$. l) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^5s^6t^4}$. m) $\frac{147a^4p^3x^6}{189a^4bcx^3}$.

14. Kürze den Bruch

a) $\frac{ax+bx}{cx}$.

b) $\frac{12ax-18ay}{24ap+30aq}$.

c) $\frac{25rx-35ry}{35sx-49sy}$.

d) $\frac{65a^2x^2+91ax^3}{85a^2x+119ax^2}$.

e) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

f) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

g) $\frac{15xy-25y^2}{9x^2-30xy+25y^2}$.

h) $\frac{21a^2+9a}{49a^2+42a+9}$.

i) $\frac{50a^3-72ab^2}{25a^2-60ab+36b^2}$.

k) $\frac{9r^4-36r^2s^2}{r^2s^2+4rs^3+4s^4}$.

l) $\frac{a^2+ab-12b^2}{a^2-ab-20b^2}$.

m) $\frac{15r^2+2rs-s^2}{12r^2+rs-s^2}$.

n) $\frac{14a^2x^2-63a^2y^2-8b^2x^2+36b^2y^2}{49a^4-56a^2b^2+16b^4}$.

o) $\frac{8a^2u^2-3b^2-6abu+4ab^2u}{12a^2u^2-9a^2bu+20abu-15b^2}$.

p) $\frac{15a^2-21bc-35ab+9ac}{9ab-15ac-21b^2+35bc}$.

q) $\frac{48ax-42bx+40ay-35by}{16au-14bu-24av+21bv}$.

Nr. 13. Addition und Subtraktion von Brüchen.

a. Gleichnamige Brüche.

15. a) $\frac{7a}{5x}+\frac{9a}{5x}-\frac{6a}{5x}$.

b) $\frac{13a}{7b}-\frac{17a}{7b}+\frac{19a}{7b}-\frac{11a}{7b}$.

c) $\frac{14x^2}{25y}-\frac{3x^2}{25y}-\frac{17x^2}{25y}+\frac{7x^2}{25y}+\frac{9x^2}{25y}$.

d) $\frac{2a-3b}{5}+\frac{5a-6b}{5}-\frac{4b-3a}{5}-\frac{2b}{5}$.

e) $\frac{7x-9y}{18}-\frac{12x-13y}{18}-\frac{14x+15y}{18}+\frac{x-7y}{18}$.

f) $\frac{5m-6n}{13}+\frac{8n-9m}{13}-\frac{7n-6m}{13}+\frac{5n-2m}{13}$.

g) $\frac{2a^2+3ab}{a+b}-\frac{3a^2+2ab}{a+b}-\frac{a^2+2b^2}{a+b}+\frac{5a^2+ab+3b^2}{a+b}$.

h) $\frac{x^2+4xy-y^2}{x-y}-\frac{3xy-2x^2-4y^2}{x-y}-\frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$.

i) $\frac{5a^2+2ab-3b^2}{a^2-b^2}-\frac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-ab+7b^2}{a^2-b^2}$.

k) $\frac{2x^2-4xy+5y^2}{x^2-y^2} - \frac{7xy-4x^2+3y^2}{x^2-y^2} - \frac{5x^2-9xy+y^2}{x^2-y^2}$.

l) $\frac{7a^3-5a^2+4}{a^2-1} - \frac{2a^2+3a-5}{a^2-1} + \frac{10a-16}{a^2-1}$.

m) $\frac{3p^3+4p^2-5p}{p^2-1} - \frac{p^3-3p^2+3}{p^2-1} - \frac{5p^2-7p-5}{p^2-1}$.

16. a) $\frac{(a+b)^2}{2ab} - \frac{(a-b)^2}{2ab}$.

b) $\frac{(2x+3y)^2}{2xy} + \frac{(3x-4y)^2}{2xy} - \frac{(2x-5y)(6x+5y)}{2xy}$.

c) $\frac{(3p-2q)^2}{4pq} - \frac{(5p+3q)^2}{4pq} - \frac{(5q+4p)(q-4p)}{4pq}$.

d) $\frac{(5r-8s)^2}{12rs} - \frac{(3r+10s)^2}{12rs} + \frac{(4r+6s)^2}{12rs}$.

e) $\frac{(3x-4y)(5x-2y)}{x+y} - \frac{(4x-7y)(7x+3y)}{x+y} + \frac{(2x+3y)(6x+10y)}{x+y}$.

f) $\frac{(2a-5b)(4a-3b)}{2a-b} - \frac{(5a-7b)(a-2b)}{2a-b} + \frac{a^2+5ab}{2a-b}$.

g) $\frac{(7a-8b)(5a+2b)}{4a-5b} - \frac{(2a-b)(5a-4b)}{4a-5b} - \frac{(9a+b)(a-5b)}{4a-5b} + \frac{31ab}{4a-5b}$.

h) $\frac{(5x+4y)(2x-3y)}{x^2-4y^2} - \frac{(4x-3y)^2}{x^2-4y^2} - \frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x^2-4y^2} + \frac{11x^2-13xy}{x^2-4y^2}$.

17. a) $\frac{(6a-5b)^2}{7a+3b} - \frac{15ab-11b^2}{7a+3b} + \frac{(4a-3b)(a+17b)}{7a+3b} + \frac{3b^2}{7a+3b}$.

b) $\frac{(2x-3y)^2}{3x-8y} - \frac{(5x+7y)(3x-y)}{3x-8y} + \frac{(4x-3y)(5x-9y)}{3x-8y} + \frac{21(y^2-xy)}{3x-8y}$.

c) $\frac{(u+4v)^2}{5u-6v} + \frac{(2u-5v)^2}{5u-6v} - \frac{(2u-7v)(3v-5u)}{5u-6v} - \frac{118v^2-34uv}{5u-6v}$.

d) $\frac{(4r-3s)^2}{4r-7s} - \frac{(2r-7s)(3s-8r)}{4r-7s} + \frac{9s(2r-s)}{4r-7s}$.

b. Ungleichnamige Brüche.

18. a) $\frac{5x-7y}{4} - \frac{3x-5y}{6} + \frac{11x-3y}{12}$.

b) $\frac{3a+4b}{9} - \frac{5a-7b}{15} - \frac{6a+11b}{45} + \frac{2a+5b}{5}$.

c) $\frac{7p-9q}{10} - \frac{8p-11q}{15} + \frac{9p+4q}{20} - \frac{5q-2p}{6}$.

d) $\frac{6m-11n}{21} + \frac{3m-7n}{28} - \frac{9m-5n}{12} - \frac{8m-9n}{14}$.

e) $\frac{2x-3y}{8} - \frac{5x+4y}{9} - \frac{13x-11y}{12} + \frac{5x-7y}{36}$.

f) $\frac{3u+7v}{35} - \frac{5u+9v}{21} + \frac{11v-3u}{14} - \frac{6u-13v}{30}$.

g) $\frac{19a-17b}{22} - \frac{11a+5b}{30} - \frac{23a-13b}{55} + \frac{a-b}{2}$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 15—17 in Nr. 19.)

19. a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. b) $\frac{x}{z} - \frac{y}{u}$. c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

d) $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$. e) $\frac{1}{cd} - \frac{1}{ab}$. f) $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d}$.

g) $\frac{a}{u} - \frac{b}{v} + \frac{c}{w}$. h) $\frac{u}{a} + \frac{v}{b} - \frac{w}{c}$. i) $\frac{p}{x} - \frac{r}{y} - \frac{s}{z}$.

k) $\frac{5bc}{3a} + \frac{3ac}{4b} - \frac{7ab}{2c}$. l) $\frac{1}{4x^2} - \frac{2}{5y^2} + \frac{3}{z^2}$.

m) $\frac{3x}{7a^2} - \frac{4y}{9b^2} - \frac{5z}{11cz}$. n) $\frac{15ax}{8by} - \frac{3by}{7ax} + \frac{11abxy}{9cz}$.

o) $\frac{2a+3b}{4a} - \frac{3a-7b}{5b}$. p) $\frac{11x-4y}{7x} - \frac{14x+3y}{11y}$.

q) $\frac{6p+11q}{13p} - \frac{15q-8p}{17q}$. r) $\frac{13u-9v}{19u} - \frac{8u-19v}{13v}$.

20. a) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} - \frac{2b}{a}$. b) $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{2x}{y}$.

c) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$. d) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$.

e) $\frac{3a+5b}{2a+3b} - \frac{2a-3b}{3a-5b}$. f) $\frac{4u-7v}{6u-v} + \frac{6u-v}{4u+7v}$.

g) $\frac{2a(a+b)}{a-b} - \frac{2b(a-b)}{a+b}$. h) $\frac{3x(x-y)}{x+y} + \frac{y(3x+y)}{x-y}$.

i) $\frac{4a-5b}{6a+7b} + \frac{5a+3b}{2a-b}$. k) $\frac{8u-9v}{3u+5v} - \frac{2u-9v}{u+6v}$.

l) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} - \frac{2b}{a}$. m) $\frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} + \frac{1}{x}$.

n) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \frac{a+y}{x-y}$. o) $\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

p) $\frac{c}{a+b} - \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}$. q) $\frac{z}{x+y} + \frac{y}{x-z} - \frac{x}{y-z}$.

r) $\frac{1}{a+1} + \frac{2}{a+2} - \frac{3}{a+3}$. s) $\frac{7}{x-3} - \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-4}$.

t) $\frac{5}{2z+1} - \frac{3}{3z+2} + \frac{4}{4z+3}$. u) $\frac{9}{2x-3} - \frac{11}{3x+4} + \frac{5}{2x+3}$.

v) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} + \frac{x-3}{x+1}$. w) $\frac{a-3}{a+1} + \frac{a-2}{a+3} - \frac{a-1}{a+2}$.

x) $\frac{8}{x} - \frac{7}{x+1} - \frac{6}{x+2} + \frac{5}{x+3}$. y) $\frac{1}{a+5} + \frac{3}{a+1} - \frac{5}{a-3} + \frac{7}{3a}$.

z) $\frac{x-2}{x+4} - \frac{x-3}{x-5} + \frac{x-4}{x+3} - \frac{x+5}{x+2}$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 18 in Nr. 19.)

21. a) $\frac{x}{ab}+\frac{y}{ac}$.

b) $\frac{x}{ab}-\frac{y}{ac}+\frac{z}{bc}$.

c) $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}$.

d) $\frac{m}{x^2}-\frac{n}{xy}+\frac{p}{y^2}$.

e) $\frac{p}{a^2b}-\frac{q}{b^2c}-\frac{r}{ac^2}$.

f) $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$.

g) $\frac{a^3}{b^3c^6}-\frac{b^3}{a^6c^3}-\frac{c^3}{a^3b^6}$.

h) $\frac{7a}{13b}-\frac{8b}{5a}+\frac{12a^2-63b^2}{65ab}$.

i) $\frac{6x-5y}{7x}+\frac{4x-9y}{8y}-\frac{(3x-4y)^2}{56xy}$.

k) $\frac{m}{5a^3}-\frac{n}{35a^2}+\frac{p}{7a}$.

l) $\frac{4a}{15cx^2}-\frac{3b}{25ax}-\frac{8c}{75b}$.

m) $\frac{13}{27x^4}-\frac{11}{36x^2}+\frac{3}{4}$.

n) $\frac{19x^2}{4y^2z^3}-\frac{13y^3}{9x^2z^2}+\frac{11z^2}{12x^3y^2}$.

o) $\frac{4x-5y}{5yz}+\frac{6y-7z}{3xy}-\frac{9x+8z}{15xz}$.

p) $\frac{7x+5y}{5x^2}-\frac{2y-3z}{7yz}+\frac{5x-6y}{21xy}-\frac{4y}{3xz}+\frac{11xz}{15y^2}$.

q) $\frac{3x}{5y^2}-\frac{2x-3y}{6xy}+\frac{x-8y}{10x^2}+\frac{2y^2+7xy-3x^2}{5xy}$.

r) $\frac{2}{5a}+\frac{9a-2b}{15ab}-\frac{a+b}{10a^2}+\frac{b^2-3a^2}{10a^2b}$.

s) $\frac{3}{4x^2}-\frac{4x-3y}{6x^2y}+\frac{2x-5y}{9xy^2}-\frac{(5x-6y)^2}{36x^2y^2}+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$.

t) $\frac{7u-3v}{12uv}-\frac{5u^2+6v^2}{18v}-\frac{5uv-8v^2}{30u}+\frac{6u^2-11v^2}{9uv}$.

u) $\frac{(a+b)^2}{14a^2}-\frac{(a-b)^2}{21ab}-\frac{(a+b)(a-b)}{28b^2}+\frac{(a-b)(a^2+2b^2)}{84a^2b^2}$.

v) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2-2ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab+b^2}{b^2}-2$.

w) $\frac{5a^2-3ab+8b^2}{16a^2b}-\frac{2a^2-4ab-3b^2}{24ab^2}+\frac{11a^3+3a^2b-2ab^2-6b^3}{12a^2b^2}$.

x) $\frac{7x^2-5xy-3y^2}{12x^2y}-\frac{5x^2+6xy-4y^2}{18xy^2}-\frac{2x^3-3x^2y+4xy^2-5y^3}{9x^2y^2}-2(x+y)$.

y) $\frac{a^2-12ab}{2b^2}+\frac{32a+17b}{8a}+\frac{2a^3b+12a^2b-3a^3}{2ab^2}+\frac{7b}{8a}$.

z) $\frac{5x^2-7xy-9y^2}{3x^2}-\frac{2xy-5y^2}{4y^2}-\frac{8x^2y-7}{12x^2y}+\frac{3xy^2-2}{6xy^2}-4(x-y)$.

22. a) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

b) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

c) $\frac{2a-3b}{2a+3b}-\frac{2a+3b}{2a-3b}+\frac{8a^2+18b^2}{4a^2-9b^2}$.

d) $\frac{3p+4q}{3p-4q}+\frac{3p-4q}{3p+4q}-\frac{24pq}{9p^2-16q^2}$.

e) $\frac{2(4a-b)}{4a+b}-\frac{3(4a+b)}{4a-b}+\frac{32a^2+2b^2}{16a^2-b^2}$.

f) $\frac{5(2x-3y)^2}{4x-5y} - \frac{4(2x+3y)^2}{4x+5y} + \frac{2x^2-5y^2}{16x^2-25y^2}$.

g) $\frac{a}{a+b-c} - \frac{b}{a-b+c} + \frac{ab}{a^2-(b-c)^2}$.

h) $\frac{2x}{2x-3y+z} - \frac{3y}{2x+3y-z} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4x^2-(3y-z)^2}$.

i) $\frac{3a+b-2c}{3a-b+2c} - \frac{3a-b+2c}{3a+b-2c} - \frac{4(b-2c)^2}{9a^2-(b-2c)^2}$.

k) $\frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b}{(a-b)^2} + \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$.

l) $\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{(x+y)^2} + \frac{2xy}{x^2-y^2} - \frac{1}{y-x}$.

m) $\frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b}{b^2-a^2} + \frac{2}{b-a} - \frac{ab}{2ab-a^2-b^2}$.

n) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{y^2-x^2}$.

o) $\frac{p}{p-q} + \frac{q^2}{p^2+pq+q^2} - \frac{pq}{p^3-q^3}$.

p) $\frac{1}{x+y} + \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} - \frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$.

23. a) $\frac{x-3}{x+4} - \frac{x^2-9x+12}{(x+4)(x-3)} + \frac{x-5}{x-3}$.

b) $\frac{x+5}{x-7} + \frac{x^2-2x+3}{(x-7)(x+3)} - \frac{x-8}{x+3}$.

c) $\frac{2x-5}{x+7} - \frac{3x^2-6x+8}{(x+7)(x-9)} + \frac{2x+4}{x-9}$.

d) $\frac{3a-1}{a+9} + \frac{5a^2-7a+11}{(a+9)(a-1)} - \frac{3a-8}{a-1}$.

e) $\frac{2x-5}{3x+2} - \frac{7x+3}{5x-4} + \frac{42x^2-37}{(3x+2)(5x-4)}$.

f) $\frac{5a-7b}{3a+4b} + \frac{6a-b}{4a-3b} - \frac{23a^2+25ab-11b^2}{(3a+4b)(4a-3b)}$.

g) $\frac{6x-y}{4x+3y} - \frac{2x-5y}{3x-4y} - \frac{9x^2+41xy+18y^2}{(4x+3y)(3x-4y)}$.

h) $\frac{7m-3n}{5m-4n} - \frac{3m-4n}{4m-3n} - \frac{22mn-8m^2}{(5m-4n)(4m-3n)} - 2$.

i) $\frac{2r-3s}{3r+4s} - \frac{3r-4s}{2r-3s} + \frac{7s^2-19rs-5r^2}{(3r+4s)(2r-3s)} - 3$.

k) $\frac{2p}{7p-8q} + \frac{3q}{5p+3q} - \frac{31p^2+31pq-56q^2}{(7p-8q)(5p+3q)} + 1$.

l) $\frac{3x}{4x-y} - \frac{4y}{2y-3x} + \frac{(2x-5y)^2}{(y-4x)(3x-2y)} - \frac{1}{2}$.

24. a) $\frac{x+y}{3x-3y} - \frac{2x}{7x-7y} + \frac{5y}{4x-4y}$.

b) $\frac{13a^2}{15a-20b} - \frac{16ab}{9a-12b} + \frac{5ab^2-7b^2}{6a-8b} - \frac{3a-19b}{30}$.

c) $\frac{5r^2}{10r-4s}+\frac{3rs}{25r-10s}-\frac{5s^2}{20r-8s}-\frac{3r-2s}{10}$.

d) $\frac{a^2+b^2}{2ab}-\frac{2b}{a^2-ab}+\frac{ab}{ab-b^2}$.

e) $\frac{x^2-y^2}{2xy}-\frac{x^2y}{x+y}-\frac{xy^2}{x-y}+\frac{x^3+2y^3}{x^2y-xy^2}$.

f) $\frac{2a-3b}{6ab}-\frac{3ab}{4a-6b}-\frac{5a^2}{6a^2-9ab}+\frac{7b^2}{8ab-12b^2}$.

g) $\frac{2a-3b}{4a^2+2ab}-\frac{3a+4b}{6ab+3b^2}+\frac{2a^2-3ab}{6ab}-\frac{3a^2-b^2}{8a^2+4ab}$.

h) $\frac{4a^2}{6ab+9b^2}+\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{2a}-\frac{9b^2}{4a^2+6ab}$.

i) $\frac{4a^2}{10ab-25b^2}+\frac{25b^2}{4a^2-10ab}+\frac{2a}{5b}-\frac{5b}{2a}$.

k) $\frac{3a-5b}{6a^2-9ab}-\frac{2a+7b}{4ab+6b^2}-\frac{2a^2+5ab}{12a^3-27ab^2}+\frac{3ab-4b^3}{8a^2b-18b^3}$.

l) $\frac{7x+3y}{6xy-2y^2}-\frac{3x-4y}{9x^2+3xy}+\frac{5x^2-3xy}{27x^3-3xy^2}-\frac{xy-2y^2}{18x^2y-2y^3}$.

25. a) $\frac{a}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2+2ab+b^2}-\frac{2b-a}{a^2-b^2}$.

b) $\frac{x^2}{4x^2-4xy+y^2}-\frac{y^2}{4x^2+4xy+y^2}+\frac{x^2+y^2}{4x^2-y^2}$.

c) $\frac{a^2-6b^2}{a^2+6ab+9b^2}-\frac{5a^2+8b^2}{a^2-6ab+9b^2}-\frac{2a^2-3ab+4b^2}{a^2-9b^2}$.

d) $\frac{3x^2+5y^2}{4x^2-20xy+25y^2}-\frac{3y^2-5x^2}{4x^2+20xy+25y^2}-\frac{(3x-4y)^2}{4x^2-25y^2}$.

e) $\frac{2a-3b}{a^2+2ab+b^2}-\frac{2a+3b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{2a^2-3b^2}{a^4-2a^2b^2+b^4}$.

f) $\frac{5}{4x^2-4x+1}-\frac{8}{4x^2+4x+1}+\frac{(2x-3)^2}{16x^4-8x^2+1}$.

g) $\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}-\frac{2x+1}{4x^2-4x+1}-\frac{9(x^4+2)}{16x^4-8x^2+1}$.

☞ (Hieran schließen sich die Gleichungen 19—24 in Nr. 19.)

Nr. 14. Multiplikation von Brüchen.

26. a) $\frac{a}{b}\cdot c$. b) $\frac{x}{y}\cdot z$. c) $z\cdot\frac{x}{y}$.

d) $\frac{a}{b}\cdot b$. e) $\frac{3x}{y}\cdot 2y$. f) $\frac{4m}{n}\cdot n$.

g) $5xy\cdot\frac{7ab}{15xy}$. h) $3pq\cdot\frac{8yz}{15pq}$. i) $95ax\cdot\frac{3by}{19ax}$.

k) $\frac{5ab}{12xy}\cdot 4xz$. l) $\frac{13uv}{15a^2b}\cdot 5ab^2$. m) $\frac{11rs}{21u^3v}\cdot 7u^2v^2$.

n) $\frac{17xy}{12a^2bc}\cdot 18ab^2c$. o) $\frac{9r^2v}{28x^4y^3z^2}\cdot 21x^3y^2z^3$. p) $\frac{5a^2b^3}{57x^3y^3z^5}\cdot 76x^3y^4z^3$.

q) $\frac{19(a-b)}{27(a+b)^2} \cdot 36(a^2-b^2)$.

r) $\frac{25xy}{24(x^2-y^2)} \cdot 32(xy+y^2)$.

s) $\frac{3a^2b}{25(a^2-b^2)} \cdot 35(a^2+ab)$.

t) $\frac{19pq}{27(p^2+pq)} \cdot 45(pq+q^2)$.

u) $\frac{11p^2q^2}{18(2p^2-5pq+3q^2)} \cdot 27(2p^2+pq-6q^2)$.

v) $\frac{2xy}{39(x^2-3xy-2y^2)} \cdot 52(x^2-4y^2)$.

w) $\frac{7ab}{8p^2qr \cdot pq^2r^2} \cdot 12p^4q^4r^2$.

x) $\frac{13rs}{6a^2b \cdot 9ab^2} \cdot 12a^4b^5$.

y) $\frac{11ab}{51rs^3 \cdot 68r^2s^2} \cdot 17r^2s^6$.

z) $\frac{15pq}{57ab \cdot 76ac \cdot 38b^2c} \cdot 361a^2b^2c^2$

α) $\frac{7a}{15xy \cdot 9x^2y^2 \cdot 45xy^3 \cdot 81y^2} \cdot 225x^7y^5$.

β) $\frac{19uv}{24(a-b)^2 \cdot 36(a^2-b^2) \cdot 48(a+b)^2} \cdot 432(a^4-2a^2b^2+b^4)$.

27. a) $\left(\frac{7x^3}{12y^3}+\frac{9x^2}{4y^2}-\frac{7x}{8y}\right) \cdot 4xy$.

b) $\left(\frac{x}{2y}+\frac{y}{3z}-\frac{z}{4x}\right) \cdot 12xyz$.

c) $\left(\frac{5p}{7qr}-\frac{7q}{15pr}-\frac{11r}{21pq}\right) \cdot 35pqr$.

d) $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a}{ab-b^2}\right) \cdot (a^2-b^2)$.

e) $\left(\frac{2x}{3x-4y}-\frac{3x^2}{6xy+8y^2}+\frac{3y^2}{6x^2-8xy}-\frac{x^2-y^2}{9x^2-16y^2}\right) \cdot (9x^2-16y^2)$.

28. a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

b) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.

c) $\frac{3a}{5b} \cdot \frac{4a}{7b}$.

d) $\frac{9ab}{28xy} \cdot \frac{35xz}{27ac}$.

e) $\frac{25xy}{36ab} \cdot \frac{24a^2}{35xy^2}$.

f) $\frac{6a^3x^5}{25b^2y^4} \cdot \frac{15by^5}{4a^4x^4}$.

g) $\frac{34a^5b^2}{57x^2y^4} \cdot \frac{76x^3y^5}{51a^2b^5}$.

h) $\frac{111p^2q}{124ab^2} \cdot \frac{155a^2b^3}{74p^3q^3}$.

i) $\frac{75x^4y^3z^2}{258u^3v^2} \cdot \frac{86uv^4w^2}{125x^2y^3z^4}$.

k) $\frac{52a^2b^3}{69x^4y} \cdot \frac{92x^5y^7}{39a^4b^6} \cdot \frac{91a^3b}{115xy^2}$.

l) $\frac{15a^4b^3x^5y^4}{28p^4q^5r^3s^2} \cdot \frac{21a^3x^3p^5r^5}{40b^7y^5q^6s^3} \cdot \frac{80b^3y^2q^7s^5}{27a^6x^7p^2r^2}$.

m) $\frac{32u^5v^3r^3s^4}{15x^2y^3t^5} \cdot \frac{25y^4t^4s^2}{48u^6v^4r^5} \cdot \frac{27x^3r}{29v^4ts^3}$.

n) $\frac{a^2+2ab+b^2}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}$.

o) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x^3+1}{x^3-1}$.

p) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} \cdot \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$.

q) $\frac{a^3+27}{a^3-27} \cdot \frac{a-3}{a^2-3a+9}$.

r) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+2}$.

s) $\frac{x^2-9x+20}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x-5}$.

t) $\frac{x^2+2x-3}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x-1}$.

u) $\frac{x^2+x-2}{x+3} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+2}$.

29. a) $\left(\frac{12a^2b^2}{35x^3y^4}-\frac{18a^3b}{49x^2y^3}+\frac{24ab^3}{7x^5y}\right) \cdot \frac{56x^3y^2}{9a^2b^2}$.

b) $\left(\frac{21p^4q^5}{16x^3z^2} - \frac{35p^3q^6}{24x^4z^3} + \frac{49p^2q^7}{48x^2z^5}\right) \cdot \frac{32x^3y^3}{7p^2q^2}$.

c) $\left(\frac{28p^3q^4}{45r^2s^5} - \frac{42p^2q^5}{25r^3s^4} - \frac{56p^4q^5}{75r^4s^3}\right) \cdot \frac{60r^2s^2}{49p^3q^3}$.

d) $\left(\frac{81a^5b^7}{32x^4y^3} - \frac{45a^6b^5}{16x^3y^4} + \frac{63a^7b^4}{64x^2y^5}\right) \cdot \frac{128x^2y}{27a^5b^5}$.

e) $\left(\frac{9u^3v^3}{16a^5b} - \frac{7u^4v^5}{20a^4b^2} - \frac{12u^2v^2}{25a^3b} + \frac{28uv}{45ab}\right) \cdot \frac{80a^2b^3}{63u^2v^2}$.

f) $\left(\frac{2x+3y}{3x-4y} - \frac{2x-3y}{3x+4y}\right) \cdot \frac{9x^2-16y^2}{4x^2-9y^2}$.

g) $\left(\frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2} - \frac{y}{x-y} + \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{2xy}$.

30. a) $(a+b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

b) $(x-y) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.

c) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot (ad+bc)$.

d) $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{b}{a} + 1\right)$.

e) $\left(\frac{3x}{4y} - 2\right) \cdot \left(\frac{5y}{6x} + 3\right)$.

f) $\left(\frac{4q}{7p} - 2\right) \cdot \left(1 - \frac{21p^2}{20q^2}\right)$.

g) $\left(\frac{5a}{6b} - 3a\right) \cdot \left(\frac{4a}{15b} - 2b\right)$.

h) $\left(9x - \frac{15x}{14y}\right) \cdot \left(7y + \frac{28y}{27x}\right)$.

i) $\left(\frac{5r}{12t} - \frac{15}{16}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}t - \frac{12t^2}{25r^2}\right)$.

k) $\left(\frac{12}{25}a + \frac{16a^2}{15b}\right) \cdot \left(\frac{35b^2}{8a} - 3\frac{3}{4}b\right)$.

l) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{x} - \frac{b}{y}\right)$.

m) $\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{x} - \frac{b}{y}\right)$.

n) $\left(\frac{5x}{3y} - \frac{25x^2}{9y^2}\right) \cdot \left(\frac{9y^3}{20x^2} - \frac{27y}{35x}\right)$.

o) $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{6ab}{x} - \frac{5}{12ab}\right)$.

p) $\left(\frac{2x}{5y} + \frac{5y}{4x}\right)^2$.

q) $\left(\frac{3ab}{4c} - \frac{4bc}{9a}\right)^2$.

r) $\left(\frac{7a}{9b} - \frac{2x}{5y}\right) \cdot \left(\frac{7a}{9b} + \frac{2x}{5y}\right)$.

s) $\left(\frac{2x^2}{11y^2} - \frac{3x}{5y}\right) \cdot \left(\frac{4x^2}{11y^2} + \frac{6x}{5y}\right)$.

t) $\left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right)^2$.

u) $\left(\frac{3x}{5y} - \frac{2y}{7x}\right)^2 - \left(\frac{5x}{7y} - \frac{3y}{2x}\right)^2$.

v) $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{4b}{3a}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right)^2$.

w) $\left(\frac{p}{5q} + \frac{3q}{2p}\right)^2 - \left(\frac{2p}{3q} - \frac{5q}{2p}\right)^2$.

x) $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right) \cdot \left(\frac{3a}{4b} - \frac{2b}{3a}\right) - \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{4a}\right) \cdot \left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{6a}\right)$.

31. a) $\left(\frac{a^2}{8b^2} + \frac{3b^2}{2a^2} - \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{3b} - \frac{2b}{a}\right)$.

b) $\left(\frac{a^3b^3}{c^3} + \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{ab}{c} + 1\right) \cdot \left(\frac{ab}{c} - 1\right)$.

c) $\left(\frac{8x^3y^3}{27z^3} - \frac{4x^2y^2}{9z^2} + \frac{2xy}{3z} - 1\right) \cdot \left(\frac{2xy}{3z} + 1\right)$.

d) $\left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + 1\right)$.

e) $\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{ab}{xy} + \frac{b^2}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$.

f) $\left(\frac{x^3}{r^3} - \frac{2x^2}{r^2} + \frac{3x}{r} - 4\right) \cdot \left(\frac{r^2}{x^2} + \frac{2r}{x} + 3\right)$.

Nr. 15. Division von Brüchen.

32. a) $\frac{a}{b} : c \cdot$ b) $\frac{x}{y} : z \cdot$ c) $\frac{17}{9} : 3 \cdot$

d) $2\frac{4}{5}x^2 : 5.$ e) $3\frac{1}{5}a^2 : 7b.$ f) $4\frac{1}{2}u^2 : 5v^2w \cdot$

g) $\frac{ab}{c} : ad \cdot$ h) $3\frac{1}{5}a^2b : 24ab^2 \cdot$ i) $5\frac{1}{4}x^3y^2 : 14xy^3 \cdot$

k) $\frac{9a^2}{7bc} : 6ab \cdot$ l) $\frac{25r^2s}{9t^2} : 15rs^2 \cdot$ m) $\frac{15ab}{16xy} : 25bc \cdot$

n) $\frac{42a^4}{55b^2} : 56a^2 \cdot$ o) $\frac{57x^4y^6}{11a^2} : 95x^3y^4 \cdot$ p) $\frac{63uv^4}{41x^2} : 42u^3v \cdot$

q) $\frac{63(a+b)^2}{5(a-b)} : 45(a^2-b^2) \cdot$ r) $\frac{51(x^2-y^2)}{7xy} : 68(x-y)^2 \cdot$

s) $\frac{36(x^2+xy)}{11(x^2+y^2)} : 48(xy+y^2) \cdot$ t) $\frac{54(a^2-b^2)}{13a} : 81(ab+b^2) \cdot$

u) $\frac{65(a^2+5a+6)}{7a} : 91(a+3) \cdot$ v) $\frac{119(x^2-3x-10)}{4(x-3)} : 68(x^2-5x) \cdot$

33. a) $\left(\frac{24ab}{5x} - \frac{30ac}{7y} + \frac{42ad}{11z}\right) : 6au \cdot$

b) $\left(\frac{70x^3y^2}{3a} - \frac{56x^2y^3}{5b} - \frac{42xy^4}{11ab} + \frac{49y^5}{13}\right) : 63x^3y^3 \cdot$

c) $\left(\frac{52pq}{5r} + \frac{65p^2q^2}{3r^2} - \frac{78p^3q^3}{7r^3} + \frac{91p^4q^4}{4r^4}\right) : 104p^2q^3 \cdot$

d) $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a} + \frac{(a+b)^2}{b} - \frac{(a-b)^2}{b}\right) : (a^2-b^2) \cdot$

e) $\left(\frac{2r-5t}{3r} - \frac{2r+5t}{5t} + \frac{4r^2-25t^2}{3}\right) : (4r^2-25t^2) \cdot$

f) $\left(\frac{4x^2-6xy}{3y} + \frac{6xy+9y^2}{2x} - \frac{6xy(4x^2-9y^2)}{4x^2+9y^2}\right) : (4x^2-9y^2) \cdot$

34. a) $a : \frac{b}{c} \cdot$ b) $x : \frac{y}{z} \cdot$ c) $24a : \frac{12b}{5} \cdot$

d) $25a^5 : \frac{15a^3}{4b^2} \cdot$ e) $27a^4b^3c^3 : \frac{9a^2b^3c^4}{2d} \cdot$ f) $13\frac{4}{5}x^4y^2 : \frac{46x^3y^3}{5ab} \cdot$

g) $\frac{3a^2}{2b^2} : \frac{2a}{3b} \cdot$ h) $\frac{4x^2y}{9uv^2} : \frac{2xy^2}{3u^2v} \cdot$ i) $\frac{27r^4s^2}{4a^2b} : \frac{36r^2s^4}{a^4b^2} \cdot$

k) $\frac{5ab(x-y)}{6xy(x+y)} : \frac{10ax(x-y)}{3by(x+y)} \cdot$ l) $\frac{26(a^2-b^2)}{45(x+y)} : \frac{65(a+b)}{54(x^2-y^2)} \cdot$

m) $\frac{38a(b-a)}{51b(x-y)} : \frac{57b(a^2-b^2)}{68a(x^2-y^2)} \cdot$ n) $\frac{42(x-y)^2}{85(a^2-b^2)} : \frac{56(x^2-y^2)}{51(a+b)^2} \cdot$

o) $\frac{7x(a^2-ab+b^2)}{5y(a^2+ab+b^2)} : \frac{(a^2+b^2)(a+b)}{(a^3-b^3)(a-b)} \cdot$ p) $\frac{a^2+3a+2}{x^2-4} : \frac{a+2}{x-2} \cdot$

q) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-7x+10} : \frac{x+2}{x-5} \cdot$ r) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3} : \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot$

35. a) $\left(\frac{5a^4}{8b^2} + 12ab - \frac{9b^4}{16a^2}\right) : \frac{15a^2}{32b^2} \cdot$

b) $\left(\frac{25a^4b^4}{28x^4y^4} - \frac{35a^3b^3}{12x^3y^3} - \frac{45a^2b^2}{16x^2y^2} + 4\right) : \frac{5a^3y^3}{4b^3x^3}$.

c) $\left(\frac{27x^8y^5}{35a^4b^5} + \frac{45x^6y^6}{14a^5b^3} - \frac{18a^2x^7}{49b^2y^3} - \frac{54b^2y^2}{77ax}\right) : \frac{81x^3y^3}{28a^2b^4}$.

d) $\left(\frac{81a^5b^7}{32x^4y^3} - \frac{45a^6x^2}{16b^3y^4} + \frac{63by^2}{64a^2x} - \frac{27x^2y^5}{8a^3b^2}\right) : \frac{9a^4x^4}{16b^4y^4}$.

e) $\left(\frac{2a+3b}{3a-4b} - \frac{2a-3b}{3a+4b}\right) : \frac{4a^2-9b^2}{9a^2-16b^2}$.

f) $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b}{a-b} - \frac{b^2}{(a-b)^2}\right) : \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

36. a) $\left(x^2 - \frac{1}{4y^2}\right) : \left(x - \frac{1}{2y}\right)$.

b) $\left(16a^2 - \frac{4}{9b^2}\right) : \left(4a - \frac{2}{3b}\right)$.

c) $\left(\frac{9a^2}{16b^2} - \frac{c^4}{25d^4}\right) : \left(\frac{3a}{4b} - \frac{c^2}{5d^2}\right)$.

d) $\left(a^3 - \frac{1}{27}\right) : \left(a - \frac{1}{3}\right)$.

e) $\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) : \left(a - \frac{1}{a}\right)$.

f) $\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) : \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$.

g) $\left(\frac{64a^3}{125b^3} + \frac{b^3}{8a^3}\right) : \left(\frac{4a}{5b} + \frac{b}{2a}\right)$.

h) $\left(\frac{8x^6}{27y^6} - \frac{125y^3}{216x^9}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y^2} - \frac{5y}{6x^3}\right)$.

i) $\left(x^4 - \frac{1}{y^4}\right) : \left(x - \frac{1}{y}\right)$.

k) $\left(x^4 - \frac{1}{y^4}\right) : \left(x + \frac{1}{y}\right)$.

l) $\left(\frac{625a^8}{81b^4} - \frac{81b^4}{16a^{12}}\right) : \left(\frac{5a^2}{3b} - \frac{3b}{2a^3}\right)$.

m) $\left(\frac{625a^8}{81b^4} - \frac{81b^4}{16a^{12}}\right) : \left(\frac{5a^2}{3b} + \frac{3b}{2a^3}\right)$.

n) $\left(\frac{a^5}{x^5} + \frac{b^5}{y^5}\right) : \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)$.

o) $\left(\frac{a^5}{b^5} - \frac{x^5}{y^5}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right)$.

37. a) $\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{bc}{d^2} + 2\frac{a}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$.

b) $\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{12} - \frac{y^2}{2x^2}\right) : \left(\frac{3x}{2y} + \frac{y}{x}\right)$.

c) $\left(\frac{2a^2}{3b^2} - \frac{11}{45} - \frac{2b^2}{3a^2}\right) : \left(\frac{4a}{9b} - \frac{8b}{15a}\right)$.

d) $\left(\frac{3a^2}{2x^2} - \frac{3ab}{5xy} - \frac{16b^2}{15y^2}\right) : \left(\frac{a}{2x} + \frac{b}{3y}\right)$.

e) $\left(\frac{8p^3}{9q^3} - \frac{1}{q} + 2p - \frac{9q^2}{4p^2}\right) : \left(\frac{4p^2}{3q} - \frac{3q}{2p}\right)$.

f) $\left(\frac{5x}{3} - \frac{2x^2}{y} + \frac{5y^2}{4x} - \frac{3y}{2}\right) : \left(\frac{5}{x} - \frac{6}{y}\right)$.

g) $\left(\frac{8a^3}{3b} - 16ab + \frac{24b^3}{a}\right) : \left(\frac{2a}{3b} - \frac{2b}{a}\right)$.

h) $\left(\frac{a^3}{24b^3} + \frac{13b}{2a} - \frac{13a}{12b} - \frac{9b^3}{a^3}\right) : \left(\frac{a}{3b} - \frac{2b}{a}\right)$.

i) $\left(\frac{16x^4y^4}{81z^4} + \frac{16x^3y^3}{27z^3} + \frac{8x^2y^2}{9z^2} + \frac{4xy}{3z} + 1\right) : \left(\frac{2xy}{3z} + 1\right)$.

k) $\left(\frac{r^5}{x^5} + \frac{3r^3}{x^3} + \frac{r^2}{x^2} + 10\frac{r}{x} - 3\right) : \left(\frac{r^2}{x^2} + \frac{2r}{x} + 3\right)$.

38. a) $\left(\frac{72a^2b^3x^4}{35p^3q^4r^2} \cdot \frac{15a^2p^5x}{56b^5qr^3}\right) : \frac{63a^3px^5}{49bq^4r^6}$.

b) $\left(\frac{24x^{12}y^9z^{13}}{35a^{12}b^7c^{11}} : \frac{18x^3b^5z^4}{49a^5y^6c^7}\right) \cdot \frac{15a^6b^7c^6}{28x^7y^8z^9}$.

c) $\frac{21a^5b^7}{38p^3q^2} \cdot \left(\frac{57p^4q^5}{35a^3b^4} : \frac{12p^3q^3}{25a^4b^3}\right)$.

d) $\left(\frac{51a^2x^3}{52b^3y^4} \cdot \frac{65b^2y^3}{68ax^2}\right) : \left(\frac{176a^4b^4}{135x^4y^4} \cdot \frac{9xy^3}{55a^2b^5}\right)$.

e) $\left(\frac{24a^4r^5}{55b^3s^2} : \frac{32a^3r^3}{77b^5s^4}\right) : \left(\frac{18ab}{65rs} : \frac{27r^2s^3}{52a^5b^2}\right)$.

f) $\left(\frac{85a^4b^7}{57x^2y^3} : \frac{51a^7b^4}{95x^5y}\right) : \left(\frac{115x^4y^3}{63a^2b} \cdot \frac{105a^6b^6}{69xy^2}\right)$.

g) $\left(\frac{2{,}4p^8q^7}{35m^5n^6} : \frac{16p^5q^8}{2{,}1m^7n^3}\right) : \left(\frac{4{,}4m^{11}n^{18}}{0{,}39p^9q^{11}} : \frac{0{,}77m^2n^4}{5{,}2p^3q^2}\right)$.

Nr. 16. Doppelbrüche.

39. Die einfachste Form herzustellen für den Bruch

a) $\frac{\frac{a}{b}}{c}$. b) $\frac{a}{\frac{b}{c}}$. c) $\frac{\frac{25}{36}}{35}$. d) $\frac{\frac{51}{85}}{4}$.

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. f) $\frac{\frac{18}{25}}{\frac{12}{35}}$. g) $\frac{\frac{57}{38}}{\frac{95}{48}}$. h) $\frac{\frac{119}{91}}{\frac{85}{39}}$.

i) $\frac{\frac{3a^2}{14x^2}}{\frac{9a}{7x}}$. k) $\frac{\frac{24a^2b^3}{35x^3y^2}}{\frac{36ab}{49x^2y}}$. l) $\frac{\frac{25p^5y^3}{21r^4s^6}}{\frac{35p^3y^5}{12r^5s^5}}$. m) $\frac{\frac{125a^4x}{111p^2q^3}}{\frac{175ax^4}{148p^3q^2}}$.

40. Die einfachste Form herzustellen für den Bruch

a) $\frac{a+\frac{b}{c}}{d}$. b) $\frac{a}{b-\frac{c}{d}}$. c) $\frac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{b}{c}}$.

d) $\frac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{c}{d}}$. e) $\frac{2+\frac{a}{3}}{b}$. f) $\frac{3a}{5b-\frac{4c}{5}}$.

g) $\frac{\frac{9a^2}{26}-2b}{\frac{3a}{26}-1}$. h) $\frac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1+\frac{2x}{3a}}$. i) $\frac{\frac{a}{5}+4x}{\frac{a}{4}+5x}$.

k) $\frac{a-\frac{a(b^2-a)}{b^2}}{b-\frac{b^3-a}{b^2}}$. l) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}$. m) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$.

n) $\dfrac{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}}$. o) $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}$. p) $\dfrac{\frac{2a-3b}{2a+3b}+\frac{2a+3b}{2a-3b}}{\frac{2a+3b}{2a-3b}-\frac{2a-3b}{2a+3b}}$.

Nr. 17. Verhältnisse.

41. Bestimme den Wert des Verhältnisses

a) 144 l : 36 l. b) 175 g : 25 g. c) 152 m : 19 m.
d) 420 cm : 35 cm. e) 324 kg : 54 kg. f) 238 qcm : 34 qcm.
g) 728 : 182. h) 960 : 120. i) 4608 : 512.

42. Bestimme den Wert des Verhältnisses

a) 72 hl : 48 hl. b) 81 km : 45 km. c) 35 g : 49 g.
d) 156 cm : 72 cm. e) 225 ccm : 475 ccm. f) 316 ℳ : 76 ℳ.
g) 756 : 924. h) 486 : 144. i) 136 : 289.
k) $24a^2 : 18a$. l) $49x^2y : 63xy^2$. m) $92a^4b^2 : 115a^3b^3$.
n) $5\frac{5}{8} : 6\frac{2}{3}$. o) $18\frac{3}{9} : 26\frac{2}{3}$. p) $43\frac{3}{4} : 10\frac{5}{12}$.
q) $5\frac{25}{81} : 12\frac{3}{16}$. r) $\frac{24}{35} : 4\frac{8}{49}$. s) $13\frac{18}{25} : 13\frac{1}{15}$.
t) $8\frac{5}{8}a^3 : 6\frac{4}{7}a^2$. u) $1\frac{41}{55}x^2y^2 : \frac{54}{77}xy^3$. v) $2\frac{14}{25}a^4b^5 : 1\frac{1}{15}a^5b^3$.
w) $16\frac{2}{21}pq^2 : 33\frac{3}{7}p^2q$. x) $\frac{24}{25}(a^2-b^2) : \frac{36}{55}(a-b)$. y) $\frac{28}{45}(x^2-y^2) : 1\frac{23}{75}(x+y)$.

43. Bestimme den Wert des Verhältnisses

a) 3 km : 250 m. b) 4 hl : 400 l. c) 6 ℳ : 75 ₰.
d) 2,75 kg : 625 g. e) $3\frac{1}{2}$ Std. : 45 Min.. f) $1\frac{2}{3}$ Std. : 36 Sek..
g) 8 Mdl. : 12 Stck.. h) 3 Schck. : 90 Stck.. i) 5 Schck. : 75 Stck..
k) 3 a : 65 qm. l) 75 a : 4 ha. m) 275 qm : 2 ha.

44. Bestimme die kleinsten ganzen Zahlen für das Verhältnis

a) 72 : 48. b) 95 : 57. c) 153 : 119.
d) 512 : 336. e) 792 : 616. f) 1250 : 3375.
g) $18 : \frac{24}{5}$. h) $22 : \frac{33}{4}$. i) $51 : \frac{68}{3}$.
k) $15 : 8\frac{1}{3}$. l) $39 : 8\frac{2}{3}$. m) $85 : 24\frac{3}{7}$.
n) $5\frac{5}{7} : 24$. o) $15\frac{5}{8} : 35$. p) $25\frac{5}{9} : 69$.
q) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$. r) $\frac{18}{25} : \frac{27}{35}$. s) $\frac{91}{85} : \frac{68}{183}$.
t) $68\frac{4}{7} : 12\frac{12}{35}$. u) $30\frac{5}{104} : 24\frac{1}{26}$. v) $16\frac{16}{17} : 17\frac{59}{68}$.
w) 2,45 : 1,05. x) 0,364 : 1,17. y) 0,02 : 1,25.

45. Das Verhältnis $a : b$ so umzugestalten, daß das Vorderglied gleich 1 wird.

Beispiele. a) 4 : 12. b) 5 : 12.
c) 7 l : 16 l. d) 25 kg : 15 kg. e) 12 ℳ : 18 ℳ.
f) $3a^2 : 15a^4$. g) $8x^2y^3 : 20x^3y^2$. h) $14pq : 30p^2q^3$.
i) $3\frac{3}{4} : 4\frac{2}{7}$. k) $5\frac{1}{7} : 4\frac{4}{11}$. l) $1\frac{11}{25} : \frac{27}{35}$.

m) $0{,}32 : 0{,}85$. n) $0{,}15 : 0{,}73$. o) $0{,}044 : 0{,}017$.

p) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$. q) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$. r) $\frac{4x}{9y} : \frac{2y}{5x}$.

46. Das Verhältnis $a : b$ so umzugestalten, daß das Hinterglied gleich 1 wird.

Beispiele. a) $16 : 20$. b) $81 : 45$.

c) $\frac{72}{85} : \frac{63}{68}$. d) $\frac{27}{32} : \frac{21}{56}$. e) $26\frac{2}{11} : 43\frac{1}{5}$.

f) $0{,}832 : 0{,}25$. g) $2{,}79 : 1{,}25$. h) $0{,}792 : 0{,}75$.

i) $0{,}872 : 0{,}24$. k) $0{,}145 : 0{,}096$. l) $0{,}52 : 1{,}32$.

m) $16x(x + y) : 12x^2$. n) $27(x^2 + xy) : 45(x + y)$.

o) $26(x^2 + xy) : 39(x^2 - y^2)$.

Nr. 18. Proportionen (Verhältnisgleichheiten).

a. Übungen.

47. Es soll, ohne die Produkte aus den Außen- und Innengliedern zu bilden, untersucht werden, ob die Proportion richtig ist:

a) $15 : 35 = 9 : 21$. b) $240 : 81 = 95 : 9$.

c) $36 : 63 = 54 : 144$. d) $57 : 69 = 38 : 46$.

e) $0{,}65 : 0{,}91 = 0{,}4 : 0{,}56$. f) $0{,}25 : 0{,}45 = 0{,}6 : 0{,}96$.

g) $0{,}42 : 0{,}7 = 0{,}56 : 0{,}98$. h) $0{,}57 : 0{,}63 = 0{,}76 : 0{,}84$.

i) $13\frac{1}{3} : 11\frac{1}{5} = 6\frac{3}{7} : 5\frac{2}{5}$. k) $3\frac{5}{7} : 3\frac{3}{11} = 6\frac{1}{9} : 5\frac{5}{18}$.

l) $9\frac{3}{4} : 10\frac{2}{5} = 3\frac{12}{13} : 4\frac{4}{9}$. m) $11\frac{1}{4} : 12\frac{6}{7} = 1\frac{5}{6} : 2\frac{2}{21}$.

n) $(a^2 - b^2) : (a + b)^2 = (a + b) : (a - b)$.

o) $(a^2 - b^2) : (a - b)^2 = (a + b) : (a - b)$.

p) $(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2) = (a^3 + ab^2) : a$.

q) $(a^4 - b^4) : (a^2 + b^2) = (a^3 - b^3) : (a - b)$.

48. Aus der Proportion $35 : x = 45 : 63$ die Unbekannte (die 4te Proportionale) zu bestimmen, ohne die Produkte der Außen- und Innenglieder zu bilden.

Auflösung. Aus $35 : x = 45 : 63$

folgt zunächst: $35 : x = 5 : 7$, (Kürzung der rechten Seite durch 9)

hieraus: $7 : x = 1 : 7$, („ „ Vorderglieder „ 5)

und dann: $49 : x = 1 : 1$. (Multipl. des ersten Gliedes mit 7 und zugleich Div. des letzten Gliedes durch 7).

Somit ist $x = 49$.

Beispiele. a) $12 : 16 = 15 : x$. b) $28 : 35 = 16 : x$.

c) $27 : 42 = x : 70$. d) $52 : x = 68 : 51$.

e) $x : 49 = 72 : 84$. f) $25 : 55 = 35 : x$.

g) $48 : 75 = x : 32$. h) $x : 38 = 15 : 16$.

i) $96 : 72 = 4x : 21$. k) $135 : 5x = 72 : 64$.

l) $0{,}4x : 0{,}35 = 0{,}72 : 0{,}07$. m) $0{,}36 : 0{,}8x = 0{,}105 : 0{,}63$.

n) $0{,}54 : 3{,}9 = 0{,}9x : 0{,}78$.
o) $0{,}78 : 0{,}66 = 0{,}5x : 0{,}55$.
p) $6\frac{9}{16} : x = 2\frac{11}{32} : 6\frac{11}{14}$.
q) $14\frac{7}{10} : 11\frac{13}{25} = x : 13\frac{5}{7}$.
r) $3\frac{5}{8} : 5\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}x : 73\frac{1}{3}$.
s) $4\frac{4}{5} : 6\frac{3}{4}x = 9\frac{1}{6} : 51\frac{9}{16}$.
t) $\frac{3}{10}x : \frac{8}{15} = 9\frac{3}{4} : 17\frac{1}{3}$.
u) $13\frac{1}{15} : 1\frac{35}{81} = \frac{4}{5}x : 5\frac{11}{21}$.
v) $5\frac{2}{5} : 7\frac{4}{11}x = \frac{7}{15} : 12\frac{3}{5}$.
w) $35\frac{7}{25} : 5\frac{1}{4}x = 39\frac{3}{8} : 2\frac{13}{256}$.
x) $(a+b):(a-b) = x:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$.
y) $(a^2-b^2):(a^2+b^2).x = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$.

49. Die Unbekannte x zu bestimmen aus der Proportion

a) $\frac{25b^2}{12a^3} : \frac{5b^4}{16ac^2} = x : \frac{10a^3b^3}{3c^4}$.

b) $\frac{36a^3y}{35z^2} : x = \frac{48ay^3}{z} : \frac{21z^2}{8a^2y^2}$.

c) $\frac{9ac^2}{25b^3} : \frac{35a^2b^2}{27c^3} = x \cdot \frac{45bc}{4a^4} : \frac{49a^2c^4}{36b^3}$.

d) $\frac{52p^4q^5}{51r^3} : \frac{39p^5r^2}{68q^3} = \frac{16q^2r^4}{9p^3} : x \cdot \frac{21r^2}{8pq}$.

e) $\frac{15a^3b^4}{16c^2} : \frac{4b}{3c^3}x = \frac{12a^2c^4}{5b^2} : \frac{64c^3}{75ab^5}$.

f) $\frac{9a^2c}{5b^2} \cdot x : \frac{7a^3b^3}{3c^3} = \frac{35b^3}{42ac} : \frac{25a^3c^4}{14b^4}$.

g) $(a^2 - b^2) : \frac{4a^2b^2}{a-b} = \frac{1}{ab} : \frac{x}{(a-b)^2}$.

h) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{3a}{a+b} = \frac{(a-b)}{a+b} \cdot x : \frac{6ab^2}{(a+b)^2}$.

50. Die einfachste Form herzustellen für die Proportion

a) $(19 + a) : a = 4 : 3$.
b) $(15 - a) : a = 2 : 3$.
c) $(a - b) : b = c : d$.
d) $(a + b) : b = (d - c) : d$.
e) $(24 + 3a) : a = 4 : 5$.
f) $(8 - 3a) : a = 2 : 3$.
g) $(5 + 3x) : \frac{1}{2}x = (2 + 5y) : \frac{5}{6}y$.
h) $(2a-5b) : \frac{1}{3}b = (4b-3a) : \frac{1}{5}a$.
i) $(a - b) : (b - x) = a : x$.
k) $(a - x) : (x - b) = a : b$.
l) $(a - x) : (b - x) = (a + x) : x$.
m) $(a - x) : (x - b) = (a + b) : x$.
n) $(2a + 3b + x) : (2a + 3b - x) = 2a : 3b$.
o) $(2a + 3b + x) : (2a + 3b - x) = (2a + 3b) : x$.
p) $(3a + 5x) : (2b + 3y) = 5x : 3y$.
q) $(27 - 4y) : (19 - 7z) = 8y : 14z$.

51. Die Unbekannte x zu bestimmen aus der Proportion

a) $4 : 3 = (63 - x) : x$.
b) $8 : 5 = (27 + x) : x$.
c) $49 : 35 = x : (x - 12)$.
d) $51 : 34 = x : (25 - x)$.
e) $25 : 15 = (56 - 3x) : x$.
f) $68 : 57 = (22 + 2x) : 4x$.
g) $63 : 45 = (28 - 2x) : 3x$.
h) $24 : 8 = (38 + 4x) : 5x$.
i) $25 : 15 = (62 - 7x) : 2x$.
k) $16 : 12 = (122 + 11x) : 7x$.

l) $76 : x = 24 : (25 - x)$. m) $85 : (54 - x) = 50 : x$.
n) $63 : (44 - x) = 91 : x$. o) $38 : x = 16 : (43 + x)$.
p) $57 : x = 21 : (128 - 3x)$. q) $88 : (59 - 3x) = 10 : x$.
r) $x : 36 = (72 - 2x) : 144$. s) $(4x - 55) : 63 = x : 35$.
t) $2x : 35 = (21 + 3x) : 77$. u) $(5x - 9) : 16 = 3x : 12$.
v) $87 : 4x = 9 : (107 - 5x)$. w) $74 : (51 - 2x) = 98 : 7x$.

52. Die Unbekannten x und y zu bestimmen aus den Gleichungen

a) $x : y = 3 : 4$ und $x + y = 14$.
b) $x : y = 7 : 3$ „ $x - y = 16$.
c) $x : y = 5 : 7$ „ $3x + y = 44$.
d) $x : y = 8 : 3$ „ $5x + 3y = 245$.
e) $x : y = 4 : 5$ „ $7x - 4y = 32$.
f) $x : y = 13 : 4$ „ $5x - 6y = 82$.
g) $x : y = 11 : 5$ „ $13y - 5x = 20$.
h) $x : y = 4 : 9$ „ $7y - 2x = 110$.
i) $x : y = (a + b) : (a - b)$ und $x + y = 2ab + 2b^2$.
k) $x : y = (a^2 - b^2) : (a^2 + b^2)$ und $x + y = \frac{ab}{a+b}$.

53. Die positiven Werte der Unbekannten zu bestimmen aus den Gleichungen

a) $x^2 : y^2 = 16 : 25$*) und $2x + 3y = 69$.
b) $x^2 : y^2 = 49 : 36$ „ $5x - y = 58$.
c) $x^3 : y^3 = 27 : 64$ „ $7x - 4y = 20$.
d) $x^3 : y^3 = 8 : 125$ „ $3x + 5y = 93$.
e) $x^4 : y^4 = 16 : 81$ „ $9x - 2y = 48$.
f) $x^4 : y^4 = 81 : 625$ „ $6x + 11y = 146$.
g) $x^5 : y^5 = 32 : 243$ „ $19x - 12y = 8$.

54. Die Unbekannten zu bestimmen aus den Gleichungen

a) $x : y : z = 3 : 4 : 5$ und $x + y + z = 36$.
b) $x : y : z = 2 : 3 : 5$ „ $x - y + z = 12$.
c) $x : y : z = 2 : 3 : 7$ „ $4x + 5y - 3z = 6$.
d) $x : y : z = 3 : 5 : 7$ „ $9x - 3y - z = 20$.
e) $x : y : z : u = 2 : 3 : 5 : 6$ und $x + y + z - u = 24$.
f) $x : y : z : u = 5 : 3 : 2 : 7$ „ $2x - 5y - 3z + 4u = 51$.
g) $x : y : z : u = 13 : 9 : 7 : 11$ „ $5x - 3y + 6z - 2u = 116$.

55. Zerlege die Zahl

a) 60 in 3 Teile, die sich wie $2 : 3 : 7$ verhalten.

---

*) Aus $x^2 : y^2 = 16 : 25$ folgt: $x : y = 4 : 5$!

b) 576 in 3 Teile, die sich wie 9 : 4 : 11 verhalten.
c) 425 „ 3 „ „ „ „ „ 7 : 5 : 13 „
d) 975 „ 3 „ „ „ „ „ 8 : 11 : 6 „
e) 108 „ 4 „ „ „ „ „ 2 : 7 : 5 : 13 „
f) 319 „ 4 „ „ „ „ „ 3 : 8 : 7 : 11 „
g) 450 „ 4 „ „ „ „ „ 6 : 5 : 11 : 8 „
h) 238 „ 4 „ „ „ „ „ 1 : 7 : 9 : 17 „

b. Anwendungen.

56. a) 25 Flaschen Wein kosten 62,50 ℳ. Wie viel ℳ würden 37 Flaschen derselben Sorte kosten?

b) 138 kg Kaffee wurden mit 289,80 ℳ bezahlt. Wie viel kg derselben Sorte würden 472,50 ℳ kosten?

c) Jemand nahm 266 ℳ mit auf die Reise. Wie lange reichte er damit aus, wenn er durchschnittlich in 5 Tagen 38 ℳ verbrauchte?

d) Ein Radfahrer legte in $4\frac{1}{2}$ Stunden 72 km zurück. In wie viel Stunden würde er bei derselben Geschwindigkeit 108 km zurücklegen?

e) Ein Turm wirft einen Schatten von 36 m, während gleichzeitig ein senkrecht neben ihm stehender Stab von 4,5 m Länge einen Schatten von 5,4 m wirft. Wie hoch ist der Turm?

57. a) Beim Einwechseln österreichischen Geldes bezahlt jemand $171\frac{1}{4}$ ℳ für 200 Kronen. Wie viel Kronen erhält er für 411 ℳ?

b) Wie viel Franken erhält man für 488 ℳ 40 ₰, wenn 20 Franken 16 ℳ 28 ₰ wert sind?

c) Welchen Wert haben 255 Rubel, wenn 34 Rubel 110 ℳ wert sind?

d) Wie viel ℳ sind für 524 Dollars zu bezahlen, wenn 17 Dollars mit 71,25 ℳ berechnet werden?

e) Die Entfernung zweier russischen Städte beträgt 1380 Werst. Wie viel km sind dies, wenn 25 Werst mit $26\frac{2}{3}$ km gleiche Länge haben?

58. a) An zwei Knaben sollen 90 Nüsse so verteilt werden, daß ihre Anteile sich wie 4 : 5 verhalten. Wie viel Nüsse erhält jeder von ihnen?

b) Zwei Diener sollen ein Geschenk von 20 ℳ so unter sich verteilen, daß ihre Anteile sich wie 7 : 3 verhalten. Wie viel ℳ erhält der erste?

c) Zwei Nebenwinkel verhalten sich wie 7 : 5. Wie groß ist jeder von ihnen?

d) In einem Dreieck mit dem Winkel $\alpha = 67^\circ$ verhalten sich die Winkel β und γ wie 3 : 5. Wie groß ist β?

e) Zwei Personen gingen sich aus einer Entfernung von 36 km

mit Geschwindigkeiten entgegen, die sich wie 4 : 5 verhielten. Wie viel km hatte jeder von ihnen zurückgelegt, als sie sich begegneten?

59. a) Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks, wenn sie sich wie $p : q : r$ verhalten?

Beispiele. 1. $p : q : r = 3 : 7 : 8$. 2. $p : q : r = 13 : 15 : 8$.
3. $p : q : r = 5 : 6 : 13$.

b) An drei Personen A, B und C sollen 420 ℳ so verteilt werden, daß ihre Anteile sich wie 3 : 4 : 7 verhalten. Wie viel ℳ erhält A?

c) A, B und C teilen 360 ℳ so unter sich, daß der Anteil des A zu dem des B sich wie 7 : 5 verhält und C doppelt so viel erhält wie A und B zusammen. Wie groß ist der Anteil des A?

d) A, B und C teilen 2340 ℳ so unter sich, daß der Anteil des A zu dem des B sich wie 6 : 7 verhält und der Anteil des C halb so groß ist wie die Summe aus den Anteilen des A und B. Wie viel ℳ erhält A?

60. a) Zwei Frauen kaufen zusammen ein Stück Leinen von 64 m. Die eine bezahlt 37,50 ℳ und die andere 22,50 ℳ. Wie viel m erhält jede?

b) Bei einem gemeinschaftlichen Unternehmen verdiente von zwei Kaufleuten der erste 900 ℳ und der zweite nur 780 ℳ, da er 1000 ℳ weniger als der erste eingelegt hatte. Wie groß war die Einlage des ersten?

c) Zwei Kaufleute hatten ein Geschäft für 24 000 ℳ übernommen. Wie viel ℳ hatte der erste beigetragen, wenn er von dem Verdienst des ersten Jahres 6000 ℳ erhielt und das Geschäft in diesem Jahre einen Gewinn von 9600 ℳ abwarf?

d) Wie viel g Gold sind zu einer Legierung von 390 g verwandt worden, wenn zu 7 g Gold jedesmal 19 g Silber genommen wurden?

61. a) Wenn bei der Herstellung von Siegellack zu 4 Gewichtsteilen Terpentin jedesmal 6 Teile Zinnober, 6 Teile Schellack und 1 Teil Kreide genommen werden, wie viel Terpentin ist dann bei 51 kg Siegellack verwandt worden?

b) Drei Personen kaufen zusammen einen Sack Kaffee und teilen diesen so unter sich, daß die erste 12 kg, die zweite 18 kg und die dritte 25 kg erhält. Wie viel ℳ hat jede zu bezahlen, wenn der Kaffee 132 ℳ kostet?

c) Zum Bau einer Straße sind 10 675 ℳ erforderlich. Wie viel ℳ muß jede der drei beteiligten Gemeinden aufbringen, wenn die Kosten nach der Kopfzahl verteilt werden und die erste Gemeinde 982, die zweite 824 und die dritte 1244 Einwohner besitzt?

d) An einem Geschäft ist A mit 14 500 ℳ, B mit 8600 ℳ, C mit 11 700 ℳ und D mit 6200 ℳ beteiligt. Wie viel ℳ hat jeder von

ihnen von dem Geschäftsgewinn zu beanspruchen, wenn dieser sich auf 6150 ℳ beläuft?

62. a) An vier Gemeinden wurden 12 300 ℳ Entschädigung für Einquartierung bezahlt. Wie viel ℳ erhält jede, wenn die erste 300 Mann 10 Tage, die zweite 400 Mann 12 Tage, die dritte 480 Mann 20 Tage und die vierte 450 Mann 16 Tage lang im Quartier hatte?

b) Zu einem Geschäft hatte A zuerst 1500 ℳ auf 4 Monate, dann B 1800 ℳ auf 5 Monate, nachher C 2000 ℳ auf 6 Monate und schließlich D 2500 ℳ auf 2 Monate hergegeben. Wie viel ℳ hatte jeder von dem ihnen zufallenden Gewinnanteil, der 1280 ℳ betrug, zu beanspruchen?

c) A begann ein Geschäft mit 4000 ℳ Nach 3 Monaten trat B mit 5000 ℳ und nach weiteren 4 Monaten C mit 3000 ℳ Einlage hinzu. 5 Monate später war das Geschäft mit einem Gewinn von 2280 ℳ abgeschlossen. Wie viel ℳ hatte jeder von dem Gewinn zu beanspruchen?

d) Zur Ausbesserung eines Dammes schickte das Dorf A 24 Mann auf 10 Tage, das Dorf B 25 Mann auf 12 Tage, das Dorf C 15 Mann auf 18 Tage und das Dorf D 30 Mann auf 11 Tage. Wie viel ℳ hat jedes Dorf von den Entschädigungskosten, die auf 1710 ℳ angesetzt sind, zu beanspruchen?

63. a) Wenn jemand Aktien zum Kurse von $92\frac{1}{2}$ gekauft hat und $4\frac{1}{2}$ % Dividende erhielt, wie viel % brachte ihm dann sein Geld?

b) Jemand hat sein Geld in Aktien zum Kurse von 225 angelegt, die durchschnittlich $13\frac{1}{2}$ % Dividende liefern. Zu wie viel % verzinst sich sein Kapital?

c) Jemand hat eine Summe in Aktien angelegt, die durchschnittlich $8\frac{1}{4}$ % Dividende liefern. Zu welchem Kurse hat er gekauft, wenn ihm das angelegte Geld $5\frac{1}{2}$ % Zinsen bringt?

d) Jemand hatte von seinem in Staatspapieren angelegten Vermögen ein Jahreseinkommen von 4840 ℳ, als diese 4 % Zinsen brachten. Wie viel büßt er jährlich ein, wenn der Zinsfuß auf $3\frac{1}{2}$ % herabgesetzt wird?

64. a) Die Entfernung zweier russischen Städte beträgt 1728 Werst. Wie viel Meilen sind dies, wenn $26\frac{2}{3}$ Werst gleich 25 km und 15 km gleich 2 Meilen sind?

b) Ein Wiener Kaufmann wechselte in Berlin 520 Kronen gegen Franken ein. Wie viel Franken erhielt er, wenn 20 Kronen gleich $17\frac{1}{4}$ ℳ und $16\frac{1}{4}$ ℳ gleich 20 Franken sind?

c) Ein Kaufmann hat in New-York für eine Ware 260 Dollars zu bezahlen. Wie viel Franken hat er zur Begleichung seiner Schuld bei der Post in Paris einzuzahlen, wenn 20 Franken gleich $16\frac{1}{4}$ ℳ und 17 ℳ gleich 4 Dollars sind?

65.*) a) Das Hinterrad eines Wagens macht in derselben Zeit 14 Umläufe, in der sich das Vorderrad 5 mal umdreht und sein Umfang ist 40 cm größer als der des Vorderrades. Wie groß sind die Umfänge der beiden Räder?

b) Der Proviant einer Festung würde für 475 Mann noch 24 Tage ausreichen. In wie viel Tagen wird er aber aufgebraucht sein, wenn 125 Flüchtlinge in die Festung aufgenommen werden?

c) Ein Bauunternehmer hatte den Wochenlohn zur Bezahlung von 25 Maurern mitgebracht. Für wie viel Tage konnte er den Lohn nur auszahlen, wenn der Polier in der verflossenen Woche 30 Maurer beschäftigt hatte?

d) Ein Damm wurde von 18 Arbeitern, die täglich 9 Stunden arbeiteten, in 15 Tagen aufgeworfen. Wie viel Tage würden 27 Arbeiter mit derselben Arbeitskraft gebraucht haben, wenn sie täglich 10 Stunden gearbeitet hätten?

e) 12 Frauen brachten in 20 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 192 Mäntel fertig. Wie viel Stunden müßten 18 Frauen täglich nähen, um in 25 Tagen 270 Mäntel anzufertigen?

f) An den Enden eines 24 cm langen Hebels sind zwei Gewichte von 250 g und 350 g angehängt. Wie lang sind die beiden Arme, wenn die beiden Gewichte einander das Gleichgewicht halten?

g) Von zwei gleichschweren Körpern mit den spezifischen Gewichten 7,5 und 9 hat der erste einen Rauminhalt von 5,4 cdm. Wie groß ist der zweite?

66. a) Eine Strecke von der Länge $l = 28$ cm ist im Verhältnis 5 : 2 geteilt. Wie lang sind die beiden Teilstrecken?

b) Der größere Abschnitt einer im Verhältnis 5 : 4 geteilten Strecke ist 17,5 cm lang. Wie lang ist die ganze Strecke?

c) Eine Strecke von der Länge $l = 7$ cm ist im Verhältnis 4 : 3 äußerlich geteilt. Wie lang ist der äußere Abschnitt?

d) Der äußere Abschnitt einer im Verhältnis 5 : 3 äußerlich geteilten Strecke ist 18 cm lang. Welche Länge besitzt die Strecke?

e) Der äußere Abschnitt einer äußerlich geteilten Strecke von der Länge 33 cm ist 44 cm lang. Welche Länge erhalten die Teilstrecken, wenn die Strecke innerlich in demselben Verhältnis geteilt wird?

67. a) Die Inhalte zweier Dreiecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie 3 : 4. Wie lang sind die zugehörigen Höhen, wenn ihre Summen gleich 47,6 cm ist?

b) Die Inhalte zweier Rechtecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie 8 : 11 und ihre Umfänge unterscheiden sich um 24 cm. Wie lang sind ihre Höhen?

---

*) Aufgaben über umgekehrte Verhältnisse.

c) Die Inhalte dreier Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich wie 5 : 8 : 10 und die Summe ihrer Grundlinien beträgt 161 cm. Wie lang sind die drei Grundlinien?

d) Die Inhalte eines Parallelogramms und eines Dreiecks mit gleichen Höhen verhalten sich wie 14 : 9 und die Summe der zu den Höhen gehörigen Grundlinien beträgt 40 cm. Wie lang ist die Grundlinie des Parallelogramms?

68.*) a) Wie lang sind die Höhen eines Dreiecks, die zu den Seiten $a = 12$ cm und $b = 17$ cm gehören, wenn sie sich um 3 cm unterscheiden?

b) Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, zu denen die Höhen $h = 15$ cm und $h' = 11$ cm gehören, wenn sie sich um 6 cm unterscheiden?

c) Die Summe zweier Höhen, die zu den Dreiecksseiten $a = 11$ cm und $b = 19$ cm gehören, beträgt 21 cm. Welche Länge besitzen die Höhen?

d) Die Summe zweier Dreiecksseiten, zu denen die Höhen $h = 28$ cm und $h' = 20$ cm gehören, beträgt 84 cm. Welche Länge besitzen die Seiten?

e) In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich die zu der Grundlinie gehörige Höhe zu der Schenkelhöhe wie 13 : 10. Wie lang ist die Grundlinie des Dreiecks, wenn sein Umfang 468 cm beträgt?

Viertes Kapitel.

Gleichungen ersten Grades.

Nr. 19. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

a. Erster Teil.

1. a) $x + 5 = 8$. b) $x - 3 = 7$.
c) $6 + x = 13$. d) $17 - x = 11$.

2. a) $3x = 15$. b) $9x = 63$.
c) $8x = 4$. d) $15x = 10$.
e) $0{,}7x = 5{,}6$. f) $0{,}12x = 0{,}72$.
g) $0{,}5x = 0{,}35$. h) $0{,}08x = 3{,}2$.
i) $3\frac{1}{4}x = 39$. k) $5\frac{1}{3}x = 1\frac{7}{9}$.
l) $6\frac{2}{13}x = 5\frac{5}{7}$. m) $17\frac{2}{9}x = 20\frac{2}{3}$.

---

*) Vergl. Aufg. 65.

3. a) $7x + 16 = 30$. b) $7x - 13 = 22$.
c) $25 + 3x = 46$. d) $25 - 3x = 7$.
e) $62 + 9x = 89$. f) $62 - 9x = 17$.
g) $5x + 26 = 51$. h) $5x - 26 = 19$.
i) $24x - 29 = 11$. k) $80 - 18x = 17$.
l) $47 + 12x = 75$. m) $145 - 24x = 37$.
n) $0{,}8x + 1{,}2 = 3{,}6$. o) $0{,}9x - 2{,}5 = 2{,}9$.
p) $5{,}7 - 1{,}6x = 0{,}9$. q) $0{,}82 - 0{,}7x = 0{,}05$.
r) $5{,}2x - 1{,}5 = 0{,}06$. s) $0{,}75 + 3{,}9x = 1{,}92$.
t) $2\frac{1}{2}x + 1\frac{2}{3} = 9\frac{1}{6}$. u) $6\frac{3}{4} - \frac{5}{6}x = 4\frac{2}{3}$.
v) $5\frac{5}{8} + 2\frac{1}{3}x = 11\frac{11}{24}$. w) $7\frac{19}{36} - 2\frac{1}{4}x = 3\frac{7}{9}$.
x) $7\frac{1}{2}x + 8\frac{10}{21} = 13\frac{5}{6}$. y) $1\frac{2}{3} - 2\frac{7}{8}x = 1\frac{1}{36}$.

4. a) $9x + 4x = 52$. b) $25x - 7x = 54$.
c) $5x + 36 - 9x = 12$. d) $11x - 72 + 9x = 88$.
e) $63 - 7x + 13x = 99$. f) $84 - 11x - 4x = 9$.

5. a) $5x + 11 = 3x + 17$. b) $35x + 25 = 47x - 155$.
c) $9x - 23 = 25 - 3x$. d) $39x - 42 = 24x + 168$.
e) $12x - 17 = 133 - 3x$. f) $13x - 69 = 6 - 12x$.
g) $17x + 35 = 90 - 5x$. h) $86 - 3x = 126 - 18x$.
i) $43 - 7x = 9x - 13$. k) $11x - 76 = 95 - 27x$.
l) $11 - 0{,}2x = 35 - 1{,}4x$. m) $5{,}5x - 29 = 4{,}7x + 3$.
n) $2{,}8x + 13 = 73 - 1{,}2x$. o) $4{,}9x - 19 = 16 + 2{,}4x$.
p) $6{,}7x + 1{,}5 = 2{,}2x + 16{,}5$. q) $0{,}65x + 1{,}72 = 2{,}37 + 0{,}4x$.
r) $8{,}3 - 2{,}1 = 3{,}9x - 2{,}5$. s) $3{,}07x - 3{,}63 = 2{,}92x + 1{,}77$.
t) $7 + 4\frac{1}{3}x = 2x + 21$. u) $4\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{15} = 3\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$.
v) $3\frac{1}{6} - 5\frac{1}{2}x = 3\frac{3}{4}x - 15\frac{1}{8}$. w) $2\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}x = 5\frac{1}{6}x - 7\frac{1}{10}$.
x) $3ax - 5ab = 7ab - ax$. y) $5ax - 27a = 2ax + 3a$.
z) $42r - 9rx = 2rx + 9r$. α) $73abx = 90abc - 2abx$.

6. a) $25 + 6x + 13 - 8x = 43 - 4x + 7$.
b) $17x + 18 - 29x - 127 = 23 - 5x - 13 - 14x$.
c) $28 - 19x - 14 + 11x = 13 + 8x + 22 - 23x$.
d) $134 - 36x - 27 - 15x = 29 - 33x + 87 - 19x$.
e) $9x + 13 - 12x - 17 = 6x + 23 - 3x - 29$.
f) $21x - 22 + 11x + 15 = 17x + 22 - 5x - 29$.
g) $15 + 8x - 19 + 3x = 27x - 21 - 20x - 17$.
h) $34x - 16 - 15x = 33 - 7x - 48 + 17x$.
i) $26x - 15 - 13x + 37 - 17x - 58 + 8x - 12 = 0$.
k) $97x + 123 - 48x - 219 - 25x + 24 - 28x = 0$.
l) $17x - 19 + 11x - 25 + 5x + 44 - 13x = 0$.

m) $68x + 15 - 95x + 17 - 13x + 188 = 0$.
n) $8{,}7x + 6{,}8 = 5x + 7{,}6 + 3{,}8x$.
o) $5{,}7x + 2 - 1{,}4x = 7{,}1x - 2{,}8x + 2{,}1 - 0{,}5x$.
p) $4{,}3x - 1{,}19 - 1{,}7x + 0{,}24 = 1{,}61 - 1{,}6x + 0{,}33 + 2{,}5x$.
q) $0{,}38 - 0{,}18x - 0{,}93 + 0{,}29x = 0{,}21 - 0{,}41x + 0{,}28$.
r) $0{,}23x + 4{,}7 - 0{,}19x - 3{,}4 = 0{,}18x + 5{,}7 - 0{,}25x$.
s) $17x + 16 = \frac{5}{8}x + 290 - \frac{3}{4}x$.
t) $\frac{1}{3}x + 3 - \frac{5}{6}x = \frac{3}{4}x - 2 + \frac{7}{12}x - 17$.
u) $\frac{1}{4}x - 2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x - 5 - \frac{1}{8}x$.
v) $2\frac{1}{4}x - 1\frac{5}{6}x = 4\frac{5}{12}x - 164 + 5\frac{1}{9}x$.
w) $5\frac{2}{3}x + \frac{5}{24} + 1\frac{1}{4}x = 4\frac{35}{72} - 1\frac{5}{12}x - \frac{3}{9}x$.
x) $11a^2x + 28abc - 19a^2x - 14abc = 25abc - 15a^2x$.
y) $7ax - 11ab + 13ac = 9ac - 7ab + 3ax$.
z) $25bx + 17ab - 19ac = 9ab - 11ac + 17bx$.
α) $a^2 + ax - b^2 + bx = a^2 + 2ab + b^2$.
β) $4px + 4qx - 12p^2 - 3qx = 18pq - 5qx$.
γ) $11ux - 2vx + 5uv = 10u^2 - vx + 9ux$.
δ) $4ax - 4a^2 - 7bx = 3ax + 4bx - 44ab$.
ε) $3ax + 6a^2 - 4x = a + 6ax + 3x + 35$.
ζ) $6a + 3ax - 12b^2 + 4bx = 9ab - x - 5b - 2$.
η) $px - 3p^2 - 4qx + 18pq = 2qx + 4p - 24q$.
ϑ) $5px - 5p - 6qx - 12q^2 = 4px - 2pq - 30q$.
ι) $16a^2 - 4qx = 9b^2 + 3bx$.
κ) $36p^2 - 6px = 49q^2 - 7qx$.
λ) $121r^2 - 13sx = 169s^2 + 11rx$.
μ) $25u^2 + 9vx = 81v^2 + 5ux$.
ν) $2ax + 16ab - 15b^2 = 5bx + 4a^2$.
ο) $5rx + 3sx - 5sr^2 = 13sx - 20s^3$.
π) $12ax - 24a^2 - 5bx = 38ab - 20b^2$.
ρ) $ax + 3bx - 15a^2 = bx + 7ab - 2ax - 2b^2$.

---

7. a) $7x = 59 - (12x + 21)$.
b) $6x - (8x - 10) = 87 - (21 + 10x)$.
c) $10x - (3x + 2) = 6 - (20x - 19)$.
d) $56 - (7x - 9) = 9 + (11x - 3) - (6x + 13)$.
e) $16x - (24 - 5x) - (23 - 13x) = 55$.
f) $5 - 4x - (7 + 2x) = 38 - (13x - 9)$.
g) $23 - (11x - 3) - (7x + 8) = 45 - (24x - 9)$.
h) $25x - (19x - 48) + (36 - 13x) = 18x - (66 - 5x)$.

i) $21{,}9 - (0{,}36x - 5{,}7) = 0{,}11x - (0{,}5x - 24)$.
k) $0{,}48 - (1{,}07x - 2{,}17) = 0{,}8x - (0{,}93 + 3{,}7x) - 1{,}75x$.
l) $3{,}4x - (0{,}16 + 1{,}5x) = (0{,}41 - 0{,}7x) - (0{,}48 - 1{,}7x)$.
m) $9{,}7x - (4{,}8x - 1{,}23) - (2{,}5x + 2{,}19) - (2{,}8x - 0{,}24) = 0$.
n) $11{,}4x - (2{,}8x - 2) - (14{,}2x + 2{,}1) + 6{,}6x = 0$.
o) $\frac{4}{5}x - (1\frac{4}{5}x + 12) - (2\frac{1}{2}x - 8) = 5\frac{1}{2} - (2\frac{2}{9}x + 5\frac{2}{3})$.
p) $\frac{2}{3}x - (1\frac{1}{8} - \frac{3}{4}x) - (\frac{7}{10} - \frac{8}{15}x) = 4\frac{1}{2} - (\frac{11}{15} - \frac{1}{2}x)$.
q) $1\frac{2}{5}x - (5\frac{1}{2}x - 1\frac{3}{5}) - (2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{8}x) = 1\frac{1}{6} - (2\frac{1}{6}x + \frac{2}{3})$.
r) $4 - (\frac{2}{7} - \frac{3}{8}x) - (\frac{1}{9}x + \frac{1}{2}) = 6\frac{1}{3} - (1\frac{2}{3} - \frac{1}{7}x)$.
s) $a^3 - (a^2b - ab^3x) = b^3 - (a^3bx + ab^2)$.
t) $12bcx - (6abc - 18acx) - (24abx + 9a^2c) + 12a^2b = 0$.
u) $7abc - (2a^2b - 2abx) - (3a^2c + 4bcx) = 4b^2c - (2ab^2 + 3acx)$.
v) $2a^3x - (a^3 - a^2b - 2a^2bx) = a^3 + 3b^3 - ab^2 + 2ab^2x$.

8. a) $36x - [55 - (23 - 2x) - 7x] = 51 - (8x - 15)$.
b) $5x - [13 - (12 - 8x) + (9x - 4)] = 17x - [15 - (6x - 18)] + 11$.
c) $17 - [12x - (15 - 2x) - 11] = 16x - [36 - (5x - 9) + 7x] - 52$.
d) $29 - (13 - 4x) - [47 - (41 - 7x) - (11x - 32) - 5x]$
$= 13x - [35 - (6x + 9) - (45 - 18x)] - 17$.
e) $78x - [25 + 15x - (36x - 58)] - [93x - (15 + 28x)]$
$= 21x - [41 - (17 - 9x)]$.
f) $29x - [29 - (73 - 55x)] - [53 - (11 - 13x)]$
$= 13x - (52x - 81) - [21 - (26 - 28x)]$.
g) $24x - (16x - 3) - [27 - (8x + 7) - (13 - 4x)]$
$= 44 - [18x - (19 - 6x) - 17] - (32x + 50)$.
h) $39x - [16 - (17 - 9x) - (15x + 4)] - (21x - 2)$
$= 26 - (14 - 12x) - [22 - (3x - 7) - 81x]$.
i) $7{,}2 - [2{,}5x - (5{,}6 + 1{,}7x)] = 3{,}1x - [3{,}2 - (0{,}8 - 0{,}1x)]$.
k) $x - [(2{,}2x + 27{,}9) - 1{,}2] = 5{,}7 - [7{,}4x - (1{,}2x - 6{,}9)]$.
l) $12{,}2x - [12x - (0{,}2x + 2{,}8) - 3{,}6] = 4{,}8 - [2{,}6x - (12{,}6x - 6{,}4)]$.
m) $2{,}48 - (1{,}5x - 0{,}32) - [1{,}65 - (2{,}72 - 2{,}5x)]$
$= 6{,}2x - [1{,}8x - (0{,}72 + 1{,}6x) + 4{,}85]$.
n) $2{,}5x - [16{,}7 - (12{,}5 - 1{,}2x) - 0{,}7x] = 22{,}3 - (1{,}3x - 6{,}5)$
$- [1{,}7 - (2{,}4 - 0{,}07x)]$.
o) $7{,}6 - [4{,}3x - (13x - 2{,}2) + 4{,}8] = 6{,}5x - [1{,}74 - (3{,}7 - 16x)]$
$- [2{,}8x - (1{,}4 - 7x) - 2{,}84]$.

---

9. a) $7\,(8x - 5) = 77$.
b) $5\,(2x + 7) = 9\,(2x - 5)$.
c) $6\,(3x - 8) = 7\,(5x - 19)$.

d) $11\,(17 - 3x) = 2\,(2x + 1)$.
e) $13\,(4x + 3) = 19\,(5x - 7)$.
f) $15\,(23 - 8x) = 7\,(11x - 7)$.
g) $5x + 7\,(2x + 3) = 59$.
h) $13x - 2\,(4x - 5) = 66 - 3x$.
i) $6\,(5x - 2) - 5\,(6x - 5) = 4\,(9 - 2x) + 1$.
k) $7\,(6x + 5) - 8\,(3 - 4x) + 24 = 12\,(2x + 3) + 199$.
l) $4\,(18 - 5x) - 12\,(3x - 7) = 15\,(2x - 16) - 6\,(x + 14)$.
m) $8\,(2x - 5) + 3\,(2x + 3) = 6\,(8 - x) - 2x + 71$.
n) $2\,(17x - 13) - 11\,(2x + 15) + 43 = 13\,(9 - 5x) - (40 - 2x)$.
o) $23\,(7x - 17) - 19\,(9x + 13) = 27\,(5x - 11) - 6\,(43x + 38)$.
p) $0{,}4\,(3x - 1{,}5) + 0{,}3\,(5x - 8) = 6 - 0{,}5\,(9{,}5 - 2x)$.
q) $7{,}5(0{,}15x + 0{,}6) - 2{,}25(0{,}3x - 1{,}4) = 0{,}4(5x - 32) - 0{,}1\,(2{,}5x + 3{,}5)$
r) $5(6{,}52 - 22{,}6x) - 4{,}5(1{,}7x + 0{,}03) = 7{,}46(40x - 1{,}5) - 25(0{,}16 - 2{,}3x)$.
s) $0{,}9(0{,}43x - 1{,}8) - 0{,}2(2{,}1x - 18{,}5) = 0{,}4(18{,}5 - 1{,}6x) + 0{,}3(0{,}12x + 1{,}3)$.
t) $3\frac{1}{2}(x - 4) - 5\frac{1}{3}(x + 6) + 12\frac{1}{2}(x - 16) = 2\frac{8}{9}x - 3\frac{1}{3}x - 46$.
u) $4\,(\frac{2}{5}x - 3) - \frac{3}{10}x = \frac{5}{6}\,(2x - 16) - 6$.
v) $\frac{2}{3}\,(4x - 3) - \frac{3}{5}\,(3x - 1) = \frac{7}{15}\,(8x - 6) - 11\,(1\frac{1}{2}x - 15)$.
w) $\frac{5}{7}\,(2x + 13) - \frac{1}{8}\,(6{,}5 - 7x) = 0{,}8\,(4x + 8) - \frac{2}{21}\,(x - 11)$.
x) $2r\,(2x + 7s) + s\,(4x + 17s) = 4r\,(x + 6s) - 3s\,(2x + s)$.
y) $3a\,(x + 8b) - 2a\,(4x - 5a) = 3b\,(x + 4b) - 2b\,(3x - 5a)$.
z) $5u\,(x + 2v) - 4v\,(2x - 3u) = 3u(2x - u) + 4v\,(3x - 10u - 10v)$.

10. a) $23(7x - 17) - [26\,(34 - 9x) + 10] = 18\,(17 - 22x) + 9(9x - 19)$.
b) $3\,(2x - 1) - 3\,[2\,(5x - 1) + 5x + 2] = 4[3x + 2 - 5\,(x - 1)]$.
c) $5(3x + 2) - [6\,(5x - 1) - 2\,(3x - 7)] = 5x - \frac{1}{2}[2\,(3x - 7) + 10]$.
d) $30 - [5\,(5 + 5x) + 4x] = 7(3 + 5x) + 2\,[4(2 - 3x) - 3(5x + 2)]$.
e) $4\,[2x - (2x - 3)] = 46 - [3\,(7 - 2x) - 5\,(7x + 22)]$.
f) $7[4 - 2(3x - 5) - 2x] = 9(3x - 15) + 4[2(4x - 2) - 3(3x - 8)]$.
g) $21 - 9[11 - 4(7x - 9) - 3(14 - 5x)] = 29 - 5[2x - 3(7x - 8) + 13]$.
h) $3{,}5x - 15\,(0{,}4x + 0{,}5) = 1{,}9x + 1{,}1 - 0{,}2\,(30x - 7) - 1{,}4x - 7\,[0{,}2x - 0{,}5\,(x + 1) + 1{,}8x]$.
i) $4{,}5\,[0{,}2\,(3x - 7) - 5\,(0{,}3x - 0{,}2)] = 7{,}5\,(0{,}9x - 0{,}4) - 0{,}5\,[54x - 0{,}8\,(3x + 9)]$.
k) $0{,}9\,(2x - 1) - 3\,[0{,}2\,(5x - 1) + 0{,}5x + 0{,}2] = 1{,}2\,[3x + 4{,}5 - 5\,(x + 1)]$.
l) $13(2{,}5x - 0{,}7) - 0{,}3(3x + 5) - 4\,[5\,(0{,}7x - 0{,}8) - 0{,}3\,(2x + 3)] = 0{,}5\,(6x - 16) - 1$.
m) $6\{15x - [23 - 3(2x - 7) - 5(3x - 1)] + 8\,(5x + 2)\} = 258$.
n) $117 + 3\{24 - [13x - 5(x - 8) + 7(2x - 3)] + 2\,(11x - 16)\} = 36$.
o) $5{,}68 - 5\{3{,}2x - [0{,}27 - 0{,}5(2x - 0{,}5) - 0{,}8(3x + 0{,}01)] - 3(0{,}7x - 0{,}12)\} = 2{,}93$.
p) $2{,}7x - 4\{0{,}52 - 3\,[0{,}9x - 0{,}7\,(0{,}6 - 0{,}5x) + 1{,}14] + 0{,}2\,(0{,}5 - 0{,}2x)\} = 6{,}16$.

11. a) $(x - 5)\,(x - 7) = (x + 4)\,(x - 9) - 13$.

b) $(x+3)(x-6) = (x-5)(x+6) - 20$.
c) $(x+9)(x+2) = (x-3)(x+14) + 60$.
d) $(x-13)(x-5) = (x-10)(x-11)$.
e) $(x+6)(x-2) = (x+1)(x-3) + 15$.
f) $(2x+2)(4x-3) = (4x-4)(2x+3)$.
g) $(3x-5)(2x+5) = (x+1)(6x-4)$.
h) $(3x+2)(4x-7) = (2x-4)(6x+6)$.
i) $(4x+1)(7x+4) = (14x+1)(2x-1) + 285$.
k) $(8x-5)(3x+7) = (6x-5)(4x+11)$.
l) $(17-3x)(10+12x) + (9x-17)(4x-25) = 0$.
m) $(19+4x)(7x-5) - (2x-7)(14x+56) = 0$.
n) $(5x+1)(2x-1) - (2x+1)(3x-5) = 4(x+3)(x-1) - 4$.
o) $(7x-9)(2x+3) - (5x+6)(3x-2) = (19+x)(4-x) - 121$.
p) $(3x+10)(2x-1) + (2x-8)(3x+1) = (4x-3)(3x-1) + 11$.
q) $3(x-17)(x-13) = 4(x-9)(x-17) - (x-13)(x-9)$.
r) $(x-7)(x-8) + 2(x-7)(x-9) = 3(x-8)(x-9)$.
s) $45 - (5x+4)(6x-5) + 9x = (9-2x)(4-3x) + 6x(34-6x) - 289$.
t) $7x(x-8) - 448 = 4(x-8)(x-2) + (3x+4)(x-2) - 56x$.
u) $x^2 - (0{,}2x+3)(3x+0{,}4) = (4x+0{,}7)(0{,}1x-3) - 1{,}95$.
v) $(1{,}5x-1)(0{,}4x+1) = 0{,}5x(0{,}4x-2{,}8) + (0{,}5x-0{,}5)(0{,}8x-1{,}8)$.
w) $(2{,}4x-1)(2x-4{,}5) - (2{,}5x+3)(1{,}2x+1) = (0{,}4x-1{,}6)(4{,}5x+8{,}5)$.
x) $(1{,}8x-2{,}2)(2x+3{,}5) - (2{,}5x+4)(0{,}8x+2) = (0{,}4x-1{,}4)(4x+1{,}5)$.
y) $(\frac{2}{3}x-8)(\frac{3}{4}x+5) = (\frac{1}{2}x+3)(x-12\frac{4}{5}) + 16$.
z) $(1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{5})(1\frac{1}{3}x-3\frac{1}{6}) = (2\frac{2}{3}x-11\frac{1}{6})(\frac{3}{4}x+6\frac{5}{6})$.
α) $192 - (6\frac{2}{5}x-14\frac{1}{2})(2\frac{2}{5}x+1\frac{3}{5}) = (6x-11\frac{5}{6})(17\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}x)$.
β) $2(3\frac{1}{8}x-50)(1\frac{1}{4}x-30) = (12\frac{1}{2}x-200)(\frac{5}{8}x-15)$.
γ) $5x(x+a) - (4x+a)(x+a) = (x-a)(x-2a)$.
δ) $(3x-a)(4x-3a) + (2x+3a)(4x-a) = (6a-5x)(5a-4x) + ax$.
ε) $3a(x+b)(x-c) + 2b(x-a)(a+b) = 3bx(a-c) + ax(3x+c) - 4a^2c$.
ζ) $(x-6q)(5p+6q) = (3p-8q)(14p-3x)$.
η) $(3x-5b)(5a-2b) = 2(3a+4b)(x-4b) + 2a(9a-b)$.
ϑ) $(2x-b)(5a-3b) - 5a(4a-21b) = (4a-15b)(2x-5a) + b(35a+123b)$.
ι) $(x+6q)(x-p+4q) - (3p-x)(2x+3q) = (3p-x)(q-2x) + x(5p-x)$.
κ) $(x+4b)(x+3a+6b) - 3b(x+10b)$
$= (x+6b)(3a+x-5b) + 4b(a+x+3b)$.

12. a) $(x+5)^2 - (x-9)^2 = 140$.
b) $(x-7)^2 + (x+4)^2 = (x-3)^2 + (x+5)^2 + 11$.
c) $(x+4)^2 - (x-6)^2 = (x+2)^2 - (x+3)^2 + 161$.
d) $(x+5)^2 - (x+3)^2 = (x-6)^2 - (x-8)^2 + 44$.

e) $(x+9)^2-(x-4)^2=(x+7)^2-(x-2)^2+4(2x+5)$.
f) $(x-5)^2+(x-9)^2=(x-2)^2+(x-3)^2+3$.
g) $(3x-7)^2+(4x-5)^2=(5x-7)^2-11$.
h) $(13x-18)^2-(5x+3)^2=(12x-17)^2-7(10x+2)$.
i) $(19-8x)^2+(15x-4)^2=(17x-3)^2+2(15x+8)$.
k) $(29+25x)^2+(7x+5)^2=(24x+17)^2-29(x+2)$.
l) $(3x-5)^2-(2x+3)^2=5(x-2)(x+2)$.
m) $(9x-4)^2-(8x-3)^2=(2x-7)^2-(3x-2)(7x-3)-6(5+14x)$.
n) $(5x-7)^2+(9x-4)^2=6(3x-4)(3x+4)+13(2x-5)^2+13$.
o) $5x(3x-11)+2(4x-7)^2=3(5x+6)(5x-6)-7(9+2x)^2+13$.
p) $(8x-5)^2+(6x-13)^2=4(5x-7)(5x+7)-6(15x+8)$.
q) $(0{,}4x-0{,}7)^2+(0{,}3x+0{,}2)^2=(0{,}5x+0{,}2)^2+0{,}2(0{,}2x-0{,}5)-1{,}45$.
r) $(0{,}6x-1{,}3)^2+(2{,}1-0{,}7x)^2=(0{,}9x-0{,}7)(0{,}9x+0{,}7)+(0{,}2x-0{,}1)^2-11{,}26$.
s) $(0{,}5x+0{,}9)^2+(0{,}3-0{,}8x)^2=5(0{,}4x-0{,}3)(0{,}4x+0{,}3)+(0{,}3x-0{,}5)^2+0{,}38$.
t) $(2{,}5x-1{,}8)^2-(2{,}4x+0{,}5)^2=(0{,}7x+0{,}4)(0{,}7x-0{,}4)+0{,}7(0{,}6-0{,}5x)-8{,}32$.
u) $(x+\frac{1}{2})^2+(x-\frac{3}{2})^2=2(x+\frac{5}{2})(x-\frac{5}{2})$.
v) $(3x-\frac{1}{2})^2+(4x+\frac{1}{2})^2+(5x-\frac{3}{2})^2+\frac{5}{4}(5x+2\frac{1}{2})$.
w) $(\frac{3}{4}x-5)^2+(\frac{2}{3}x-3)^2+80=(\frac{3}{2}x-10)(\frac{2}{3}x+10)-\frac{x}{12}(14\frac{11}{12}x-76)$.
x) $(3ax+4b)^2+(4ax-3b)^2=(5ax-7b)^2+11b^2$.
y) $(13ax-2b)^2-(12ax-5b)^2=(5ax+9b)^2+8b^2$.
z) $9(5ax-3b)^2-4(6x-7b)^2=(9ax+5b)(9ax-5b)+21abx$.

b. Zweiter Teil.

3. a) $\frac{26}{x}=13$. b) $\frac{35}{x}=7$. c) $\frac{72}{x}=4$.
d) $\frac{45}{4x}=15$. e) $\frac{63}{7x}=9$. f) $\frac{49}{11x}=7$.
g) $\frac{a}{x}=b$. h) $\frac{3b}{x}=6a$. i) $\frac{5abc}{4x}=15bc$.
k) $\frac{45}{x}+7=12$. l) $\frac{119}{x}-8=9$. m) $24-\frac{95}{x}=5$.
n) $\frac{a}{x}-c=b$. o) $\frac{b}{x}+c=a$. p) $a-\frac{c}{x}=b$.

4. a) $\frac{16}{x-3}=4$. b) $\frac{144}{2x+1}=16$. c) $\frac{65}{3x+2}=13$.
d) $\frac{18}{2x+3}+3=5$. e) $\frac{96}{2x-1}+4=10$. f) $\frac{150}{3x+1}-2=13$.

g) $\frac{225}{4x+1}+2=11$. h) $\frac{289}{5x-3}-9=8$. i) $\frac{340}{3x+2}-3=17$.

k) $\frac{a^2-b^2}{a+x}+b=a$. l) $\frac{ab+b^2}{a^2x+ab}-b=a$. m) $\frac{a^2+ab}{ax-b}-b=a$.

15. a) $\frac{2x-41}{9}+\frac{x-4}{5}=9$.

b) $\frac{6x+7}{7}-\frac{5x-3}{8}=3$.

c) $\frac{6x+3}{11}=10-\frac{3x-1}{2}$.

d) $\frac{9x-8}{7}=7-\frac{5x+7}{9}$.

e) $\frac{17-3x}{5}-6=\frac{17+x}{11}$.

f) $\frac{5-7x}{13}-4x=\frac{66-5x}{9}+5$.

g) $\frac{2}{3}(5x-9)-(3x-14)=\frac{3}{4}(7x-19)-(2x+4)$.

h) $\frac{4}{5}(23-2x)-\frac{5}{9}(11x+1)=\frac{2}{9}(5x-2)-17$.

i) $\frac{3}{7}(6x-1)-\frac{5}{11}(5x+1)=\frac{5}{7}(33-2x)-2$.

k) $\frac{5}{8}(17-3x)-11=\frac{9}{13}(3x+41)-(2x+19)$.

l) $\frac{7(5x+2)}{6}-\frac{3(7x-4)}{5}=\frac{2(9x+2)}{5}$.

m) $\frac{7(8x+9)}{11}-2(4x-3)=\frac{5(3x-1)}{8}-2$.

n) $\frac{9(2x-9)}{13}+\frac{1}{5}(x-4)=\frac{7(3x-2)}{5}-(3x-5)$.

o) $\frac{3(2x+1)}{7}+\frac{4(2x-5)}{15}=9-\frac{2-3x}{7}$.

p) $\frac{8(13-2x)}{9}-\frac{3(5x-7)}{14}=\frac{2(5-7x)}{9}-3(14+3x)$.

q) $\frac{9(3x+34)}{11}-2(4x-1)=\frac{7(16-5x)}{12}+\frac{5(48+x)}{11}+11$.

r) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$.

s) $\frac{x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{2x}{b}+\frac{2x}{a}$.

t) $\frac{3(x-2b)}{a}-\frac{3(x-3a)}{2b}=6$.

u) $\frac{x(b-ab)}{a}-\frac{b^2+ax}{b}=\frac{a+b}{b}-\frac{b+x}{b}$.

v) $\frac{b(x-a)}{a}-\frac{a(x-b)}{b}=\frac{x-a^2}{b}-\frac{x-b^2}{a}$.

w) $\frac{bx}{a}-\frac{a(a-x)}{b}=\frac{a(x+1)}{b}-\frac{b(b+x)}{a}-\frac{a}{b}$.

16. a) $\frac{x-8}{4}+\frac{5x-3}{6}=\frac{3x-5}{12}$.

b) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-1}{8} = \frac{3x-2}{7} - 5.$

c) $\frac{x-7}{5} - \frac{x-2}{15} = \frac{x-8}{6} - \frac{x-29}{3}.$

d) $\frac{15-3x}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{4x-7}{9} - \frac{3x-7}{12}.$

e) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{3x+5}{2} - \frac{10x-1}{6}.$

f) $\frac{7x-2}{15} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{12}.$

g) $\frac{2x+9}{3} + \frac{4x-5}{11} = \frac{3x-9}{2} - \frac{x-15}{6}.$

h) $\frac{7x+8}{5} - \frac{11x+5}{2} = \frac{7-13x}{6} - 4.$

i) $\frac{9x-8}{7} - 1\frac{1}{4}x = \frac{5x-2}{3} - 7.$

k) $\frac{14x-9}{11} - \left(2\frac{5}{6}x - \frac{5-4x}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{8x+1}{3}.$

l) $\frac{44x-23}{20} - \frac{32x+21}{15} = \frac{17x-9}{12} - \frac{11x+28}{30} - 3\frac{1}{6}.$

m) $\frac{3(3x+5)}{5} - \frac{2(4x-7)}{15} = \frac{5x-18}{3} - \frac{5(6x-19)}{4} + 11\frac{1}{2}x.$

n) $\frac{4(3x-8)}{9} - \frac{5(4x-9)}{12} + \frac{3}{4}x = \frac{7(5x-11)}{18} - \frac{1}{6}(7x+3).$

o) $\frac{2(6x-5)}{7} + \frac{3(2x+9)}{14} - \frac{4(5x-3)}{21} = \frac{5}{6}(13x-6) + 2\frac{1}{2}(x+17).$

p) $\frac{3(x-9)}{8} - \frac{5(2x-3)}{16} + \frac{7(4x-7)}{24} = \frac{29(11x-5)}{48} + \frac{5}{24}(14-17x).$

q) $\frac{3x+0{,}5}{2} - \frac{6{,}5-7x}{3} = \frac{5x+3{,}5}{6} - \frac{7+2x}{8}.$

r) $\frac{5(2x-0{,}4)}{3} - \frac{3(3x-0{,}1)}{5} = \frac{7(7x-1{,}9)}{10} - 5.$

s) $\frac{4(x+0{,}1)}{5} - \left(\frac{3x+0{,}1}{7} - \frac{7{,}8-2x}{3}\right) - \frac{5(x-2{,}4)}{21} + \frac{6x-0{,}5}{7} = 0.$

t) $\frac{7}{8}x - \frac{9}{20}(3x+0{,}4) = 4x - \frac{0{,}5x+0{,}2}{4} - 1{,}87.$

u) $\frac{x-a}{bc} - \frac{x+c}{ab} = \frac{2(b-c)}{ab} - \frac{x+b}{ac}.$

v) $\frac{x-a}{b} - \frac{x+b}{a} = \frac{a-x}{c} - \frac{b}{c} - 2.$

w) $\frac{4(p-x)}{pq} - \frac{3(q-x)}{pr} = \frac{5q-2x}{qr} - \frac{4qr-2p^2}{pqr}.$

x) $\frac{2(3x-2a)}{3ab^3} - \frac{x}{2ab} = \frac{4(a-x)}{a^2b^2} + \frac{4a-3b^2x}{6ab^3}.$

y) $\frac{8x-q}{4pq^2} - \frac{36x-q}{10p^2q} = \frac{px-2q^2}{5p^2q^2} - \frac{36x-5q}{40pq}$.

z) $\frac{2ax+3b}{4ab} - \frac{5bx+3c}{6bc} = \frac{5cx-4a}{2ac} + 7b(2a-3c)$.

17. a) $\frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \frac{2x+1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{x+\frac{3}{4}}{5}$.

b) $\frac{7x+1\frac{1}{2}}{6} + \frac{11+2\frac{2}{3}x}{15} = 9 - \frac{23x-4\frac{1}{2}}{5}$.

c) $\frac{3x+\frac{1}{2}}{4} = \frac{4x-\frac{1}{2}}{2} - \frac{2x+\frac{1}{2}}{3} - \frac{3x-2\frac{1}{2}}{6}$.

d) $\frac{\frac{3}{4}x-1}{2} - \frac{\frac{2}{3}x+4}{6} = \frac{\frac{5}{6}x-1}{3} - \frac{\frac{1}{2}x+6}{12}$.

e) $\frac{\frac{2}{3}x-1}{6} - \frac{\frac{3}{5}x+7}{8} = \frac{\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}}{5} - 2\frac{1}{2}$.

f) $\frac{1+\frac{1}{2}x}{6} + \frac{\frac{3}{5}x+1}{10} = \frac{x-1}{4} - \frac{x-1\frac{3}{4}}{9} + \frac{1}{2}$.

g) $\frac{3\frac{1}{2}x+4}{10} + \frac{2x+\frac{2}{5}}{3} = \frac{2\frac{1}{5}x+1}{10} - \frac{6\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}}{12} + \frac{\frac{3}{5}x+1}{120}$.

h) $\frac{\frac{2}{3}x+1}{12} - \frac{2\frac{1}{2}x+1}{16} - \frac{2\frac{1}{8}x-1}{8} = \frac{3\frac{3}{4}-2x}{9} - \frac{x-2\frac{3}{4}}{4}$.

i) $\frac{1\frac{1}{2}x+9}{5} - \frac{2\frac{1}{5}x-11}{15} = \frac{1\frac{3}{4}x+3}{9} + \frac{4-1\frac{1}{6}x}{6} + 5$.

k) $\frac{1\frac{1}{5}x-12}{3} - \frac{1\frac{1}{3}x-8}{4} = \frac{2\frac{1}{2}x-15}{5} - \frac{1\frac{5}{6}x+25}{10} - 4$.

---

18. a) $\frac{2x+4}{3x-5} = \frac{5}{2}$.

b) $\frac{5x+7}{8x+4} = \frac{7}{10}$.

c) $\frac{9x+4}{6x+1} = \frac{8}{5}$.

d) $\frac{13x+3}{7x+1} = \frac{15}{8}$.

e) $\frac{32x-27}{5x+3} = \frac{3}{2}$.

f) $\frac{17x+2}{23x-8} = \frac{18}{19}$.

g) $\frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$.

h) $\frac{19}{5x+4} = \frac{23}{8x-1}$.

i) $\frac{13}{2x-3} = \frac{11}{x+3}$.

k) $\frac{25}{4x+1} = \frac{17}{3x-1}$.

l) $\frac{34}{5x+9} = \frac{21}{4x+1}$.

m) $\frac{19}{5x-6} = \frac{37}{7x+2}$.

n) $\frac{x}{a-b} = \frac{x-b}{a}$.

o) $\frac{ax-b}{a-b} = \frac{ax}{a+b}$.

p) $\frac{x-a}{a+b} = \frac{x-b}{a-b}$.

q) $\frac{x+2a-3b}{3a-2b} = \frac{x-2a+3b}{4b-a}$.

r) $\frac{a^2+b^2}{x+a} = \frac{2ab}{x+b}$.

s) $\frac{a^2-b^2}{ax-b} = \frac{a+b}{x}$.

19. a) $\frac{3x^2-5x+23}{4x^2+3x-8} = \frac{3}{4}$.

b) $\frac{5x^2-7x+8}{3x^2+2x-20} = \frac{5}{3}$.

c) $\frac{8x^2-3x+4}{12x^2+5x-13}=\frac{2}{3}$.

d) $\frac{12x^2-7x+5}{18x^2-11x+9}=\frac{2}{3}$.

e) $\frac{5x^2-5x+8}{4x^2+3x+12}=\frac{2}{3}$.

f) $\frac{7x^2-3x-15}{9x^2+x-25}=\frac{3}{5}$.

g) $\frac{13x^2-5x+28}{3x^2+7x+35}=\frac{4}{5}$.

h) $\frac{17x^2-x-28}{13x^2+12x-36}=\frac{7}{9}$.

i) $\frac{3x-5}{7-4x}=\frac{6x-11}{15-8x}$.

k) $\frac{7x+5}{15x-11}=\frac{14x-10}{30x-54}$.

l) $\frac{12x+3}{5x-3}=\frac{24x-9}{10x-11}$.

m) $\frac{8x-7}{6x+7}=\frac{12x-19}{9x+2}$.

n) $\frac{9x-25}{5x-10}=\frac{7x-5}{4x-2}$.

o) $\frac{6x-18}{7x+24}=\frac{11x-3}{13x+4}$.

p) $\frac{9x-51}{5x-9}=\frac{7x+17}{4x+3}$.

q) $\frac{5x-24}{3x+32}=\frac{7x+6}{9x-8}$.

r) $\frac{x-a+b}{x+a-b}=\frac{a-x+2b}{b-x+2a}$.

s) $\frac{2x+a-5b}{3x-2a-4b}=\frac{4x-3a+5b}{6x-8a+4b}$.

t) $\frac{3x+a+3b}{4x+2a-3b}=\frac{6x-2a+6b}{8x-2a+b}$.

u) $\frac{4x+a-3b}{6x-3a+3b}=\frac{2x+3a-b}{3x+a-2b}$.

v) $\frac{6x+7a-5b}{8x-5a-21b}=\frac{7a-3x-b}{3b-4x-5a}$.

w) $\frac{9x+7a-2b}{15x+8a-7b}=\frac{35a-3x-4b}{51a-5x-14b}$.

20. a) $\frac{7}{2x-5}=\frac{13}{6x^2-15x}-\frac{4}{3x}$.

b) $\frac{15}{3x-2}-\frac{60}{9x^2-6x}=\frac{40}{12x-8}$.

c) $\frac{51}{2x+3}-\frac{23x+26}{4x^2-9}=\frac{22}{2x-3}$.

d) $\frac{4}{3x+2}+\frac{2}{3x-2}=\frac{15x+2}{9x^2-4}$.

e) $\frac{5-x}{4x^2-49}+\frac{14}{2x+7}=\frac{1}{2x-7}$.

f) $\frac{48}{3x+7}-\frac{2}{3x-7}=\frac{19x+7}{9x^2-49}$.

g) $\frac{63}{4x^2-2x}-\frac{10}{6x^2+3x}=\frac{66}{4x^2-1}$.

h) $\frac{44}{6x^2+9x}+\frac{11}{4x^2-9}=\frac{42\frac{2}{3}}{8x^2-12x}$.

i) $\frac{7}{16x^2-25}+\frac{7}{8x^2+10x}=\frac{10\frac{1}{2}}{12x^2-15x}$.

k) $\frac{4x-7}{6x+18}=\frac{7x+2}{10x+30}-\frac{11}{45}$.

l) $\frac{19}{3x-2}-\frac{5}{5x-6}=\frac{53x+4}{(3x-2)(5x-6)}$.

m) $\frac{7}{2x-5}-\frac{4}{4x-3}=\frac{19x+6}{(2x-5)(4x-3)}$.

n) $\frac{5}{x-7} - \frac{7}{x+3} = \frac{5x+1}{x^2-4x-21}$.

o) $\frac{7}{x+4} - \frac{3}{x-5} = \frac{26x-25}{x^2-x-20}$.

p) $\frac{9}{x-7} + \frac{2x-23}{x^2-16x+63} = \frac{2}{x-9}$.

q) $\frac{17}{x+11} - \frac{6x-27}{x^2+7x-44} = \frac{2}{x-4}$.

r) $\frac{5}{x-13} - \frac{7}{x-7} = \frac{3x-19}{x^2-20x+91}$.

s) $\frac{a^2-b^2}{2a-x} + \frac{ab+b^2}{2a} = \frac{(a-b)^2(2a+x)}{4a^2-2ax}$.

t) $\frac{x-3b}{3a-2b} - \frac{x+b}{3a+2b} = \frac{3a(x-3a-b)}{9a^2-4b^2}$.

u) $\frac{a^2b}{ax-x^2} - \frac{ab}{x} = \frac{a^2b}{a^2-ax} + \frac{a}{x}$.

v) $\frac{2a^2+b^2}{a^2+ab} - \frac{2a^2-3b^2x}{2ab-2b^2} + \frac{a^2-b^2}{ab} = \frac{2b^2+a^2-4\frac{1}{2}abx}{a^2-b^2}$.

w) $\frac{11x}{6x+12b} + \frac{3a(4b-5a)}{9a^2-4b^2} = \frac{a}{6a-4b}$.

x) $\frac{1}{a^2+ab} = \frac{1}{ax} - \frac{1}{ab+b^2} + \frac{bx-b^2}{a^2x+abx}$.

y) $\frac{bc}{x(a+b)} - \frac{a^2+b^2}{2b(a+b)} = \frac{c(a-b)}{2bx} - \frac{a^2x-b^2c}{abx+b^2x}$.

21. a) $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{x+29}{x+9} = 1$. b) $\frac{5x-5}{x+7} - \frac{3x-7}{x-4} = 2$.

c) $\frac{6x-11}{x-11} - \frac{3x-2}{x+1} = 3$. d) $\frac{7x+5}{x+5} + \frac{3x+2}{x-6} = 10$.

e) $\frac{5x-15}{x-4} - \frac{2x+3}{x+5} = 3$. f) $\frac{2x-5}{x+3} + \frac{3x-5}{x-7} = 5$.

g) $\frac{4x-7}{2x-5} - \frac{3x-5}{3x+4} = 1$. h) $\frac{5x+4}{5x-2} - \frac{3-4x}{2x+3} = 3$.

i) $\frac{7x+9}{7x+8} + \frac{2x-3}{4x-5} = 1\frac{1}{2}$. k) $\frac{5x-11}{2x-3} + \frac{11-6x}{4x-1} = 1$.

l) $\frac{3x+30}{3x-5} - \frac{7-4x}{2x+9} = 3$. m) $\frac{3x+1}{6x-5} + \frac{3x-5}{2x-3} = 2$.

22. a) $\frac{7x+27}{3x+7} - \frac{5x-13}{3x-7} = \frac{(3x-1)(2x+2)}{9x^2-49}$.

b) $\frac{5x-1}{2x+1} + \frac{2x+9}{2x-1} = \frac{14x^2+49}{4x^2-1}$.

c) $\frac{7x-23}{2x-5} - \frac{4x-9}{2x+5} = \frac{2(x+2)(3x-5)}{4x^2-25}$.

d) $\frac{6x+5}{4x+3} - \frac{3x-7}{4x-3} = \frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}$.

e) $\frac{3x-4}{5x-6} + \frac{2x-5}{5x+6} = \frac{25x^2-27x-42}{25x^2-36}$.

f) $\frac{11x-8}{3x-5} - \frac{10x-13}{3x+5} = \frac{3x^2+57x+21}{9x^2-25}$.

g) $\frac{6x+7}{2x+3} - \frac{8x-5}{3x-4} = \frac{2x^2-35x+77}{6x^2+x-12}$.

h) $\frac{2x-9}{3x-1} + \frac{2x-7}{2x+5} = \frac{(5x-13)(2x-4)}{6x^2+13x-5}$.

i) $\frac{7x+1}{4x-3} - \frac{5x-4}{5x+2} = \frac{(3x+2)(5x+6)}{20x^2-7x-6}$.

k) $\frac{8x+4}{5x-3} - \frac{2x+4}{3x-2} = \frac{2(x-1)(7x+9)}{15x^2-19x+6}$.

l) $\frac{5x+8}{3x+7} + \frac{9x-13}{7x-3} = \frac{(4x-5)(5x-3)}{21x^2+40x-21} + 2$.

m) $\frac{7x-4}{4x-5} - \frac{3x+7}{6x-5} = \frac{3(3x+1)(6x-7)}{24x^2-50x+25} - 1$.

n) $\frac{6x-15}{5x-4} - \frac{4+2x}{4x+9} = \frac{3(3x+1)(6x-7)}{20x^2+29x-36} - 2$.

o) $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-c}{x+d} = 2$.

p) $\frac{a(x+b)}{x+a} + \frac{b(x-a)}{x+b} = a+b$.

q) $\frac{2ax-5b}{3a-2bx} + \frac{2a-5bx}{3ax-2b} = \frac{6a^2x^2+10b^2x^2+6a^2-38ab+10b^2}{(3a-2bx)(3ax-2b)}$.

r) $\frac{a+bx}{2a+x} + \frac{b-ax}{2a-x} = \frac{(a+b)(a-b-x^2)}{4a^2-x^2}$.

s) $\frac{a-bx}{ax+b} - \frac{ax+b}{ax-b} = \frac{a^2-2ab-a(ax^2+bx^2)}{a^2x^2-b^2}$.

t) $\frac{2ab+x}{a+x} - \frac{ab+x}{a-x} = \frac{3a^2b^2-2x^2+a^2b}{a^2-x^2}$.

23. a) $\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-5} = \frac{1}{x}$.

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} = \frac{2}{x}$.

c) $\frac{5}{x+7} - \frac{3}{x-5} = \frac{2}{x}$.

d) $\frac{1}{x-9} + \frac{4}{x+3} = \frac{5}{x}$.

e) $\frac{8}{x+5} - \frac{5}{x+11} = \frac{3}{x}$.

f) $\frac{3}{x-9} + \frac{4}{x+12} = \frac{7}{x}$.

g) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-4}$.

h) $\frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+5} = \frac{3}{x-3}$.

i) $\frac{2}{x-7} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-8}$.

k) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-3}$.

l) $\frac{4}{x+4} - \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x+8}$.

m) $\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x+3} = \frac{5}{x+4}$.

n) $\frac{4}{2x+3} + \frac{3}{3x-1} = \frac{3}{x}$.

o) $\frac{8}{4x+3} - \frac{5}{5x-7} = \frac{1}{x}$.

p) $\frac{1}{2x-9} + \frac{6}{3x-1} = \frac{10}{4x-8}$.

q) $\frac{10}{5x-33} - \frac{4}{3x-24} = \frac{2}{3x-81}$.

r) $\frac{1}{2x-5}+\frac{3}{2x+5}=\frac{6}{3x+5}$. s) $\frac{6}{3x+4}-\frac{5}{5x+4}=\frac{3}{3x+8}$.

t) $\frac{14}{3x}+\frac{8}{3x+4}=\frac{66x-39}{9x^2-16}$. u) $\frac{9}{5x}-\frac{8}{10x-5}=\frac{4x-1}{4x^2-1}$.

v) $\frac{2x-1}{6x^2-4x}-\frac{1-3x}{9x^2+6x}=\frac{2}{3x}$.

w) $\frac{5}{4x-3}-\frac{2x-1}{8x^2+6x}=\frac{6x}{16x^2-9}+\frac{5x+6}{8x^2-6x}$.

x) $\frac{5x+6}{50x^2-32}-\frac{2}{15x^2-12x}=\frac{4x-1}{15x^2+12x}-\frac{1}{6x}$.

y) $\frac{5x-1}{12x^2-27}-\frac{3x-2}{12x^2+18x}=\frac{6x-7}{8x^2-12x}-\frac{7}{12x}$.

z) $\frac{5x-6}{25x^2-4}+\frac{9-2\frac{1}{2}x}{15x^2-6x}=\frac{4x-5}{20x^2+8x}-\frac{1}{6x}$.

α) $\frac{2}{(2x-1)(x-1)}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{2(x-5)}{(x-3)(x-1)}$.

β) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{(3x-2)(x-2)}-\frac{6}{2x-1}=\frac{3}{x-2}-\frac{2(3x-8)}{(2x-1)(x-2)}$.

γ) $\frac{7}{x-6}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x+3}{x^2-8x+12}+\frac{1}{x-1}+\frac{3x+1}{x^2-3x+2}$.

δ) $\frac{2}{x-6}+\frac{1}{2x-3}-\frac{3x-7}{x^2-7x+6}=\frac{2x-13}{2x^2-15x+18}-\frac{3x+1}{2x^2-5x+3}$.

ε) $\frac{1}{3x-2}-\frac{7}{2x-3}+\frac{x+5\frac{1}{3}}{3x^2-8x+4}=\frac{4}{x-2}-\frac{x+12}{2x^2-7x+6}$.

ζ) $\frac{1}{3x-1}+\frac{3}{2x+1}-\frac{3}{2x-1}=\frac{x-5}{6x^2-5x+1}+\frac{x+5}{6x^2+5x+1}$.

η) $\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}=\frac{a-b}{x-b}$.

ϑ) $\frac{bc}{a-x}+\frac{ab}{c-x}=\frac{b(a+c)}{b-x}$.

ι) $\frac{a}{x-b^2}+\frac{b}{x-a^2}=\frac{a+b}{x+2ab}$.

κ) $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x+b}=\frac{a-b}{x-2ab}$.

λ) $\frac{a}{a+bx}+\frac{ab}{2a+bx}=\frac{ab(b+1)}{3a+bx}$.

μ) $\frac{b}{2a-bx}-\frac{a}{2b+ax}+\frac{2ab}{2+abx}=0$.

24. a) $\frac{6}{x-5}-\frac{6}{x-3}=\frac{4}{x-7}-\frac{4}{x-4}$.

b) $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}$.

c) $\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x+3}=\frac{7}{x-20}-\frac{1}{x-1}$.

d) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+1}=\frac{10}{x+5}-\frac{7}{x+4}$.

e) $\frac{5}{x-6}-\frac{1}{x-10}=\frac{7}{x-4}-\frac{3}{x-8}$.

f) $\frac{7}{x-6}-\frac{1}{x-12}=\frac{7}{x+1}-\frac{1}{x-11}$.

g) $\frac{5}{x-8}+\frac{3}{x+4}=\frac{7}{x+3}+\frac{1}{x-1}$.

h) $\frac{7}{x-3}+\frac{4}{x-2}=\frac{6}{x+2}+\frac{5}{x-6}$.

i) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-8}{x-9}$.

k) $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-7}{x-8}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-8}{x-9}$.

Nr. 20. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Erster Teil.

a. Vorübungen.

1. a) Von welcher Zahl entsteht das 6fache, wenn man ihr 3faches um 39 vermehrt?

b) Von welcher Zahl ist das 11fache um 25 größer als ihr 6faches?

c) Von welcher Zahl ist das 7fache um 24 kleiner als ihr 10faches?

2. a) Von welcher Zahl ist der 6te Teil um 5 kleiner als der 4te?

b) Von welcher Zahl ist der 6te Teil um 12 größer als der 8te?

3. a) Vermehrt man das 5fache einer Zahl um 40, so erhält man dasselbe, wie wenn man ihr 9faches um 8 vermindert. Wie heißt die Zahl?

b) Multipliziert man das um 2 vermehrte 3fache einer Zahl mit 7, so erhält man dasselbe, wie wenn man ihr 25faches um 2 vermindert. Wie heißt die Zahl?

c) Multipliziert man das um 13 verminderte 8fache einer Zahl mit ihrem um 2 vermehrten 2fachen, so erhält man dasselbe, wie wenn man ihr um 2 vermindertes 4fache ins Quadrat erhebt. Wie heißt die Zahl?

b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben.

4. a) Ein Vater ist jetzt doppelt so alt wie sein Sohn und war vor 15 Jahren 3 mal so alt wie dieser. Wie alt ist jetzt der Vater?

b) Eine Mutter ist jetzt 42 und ihre Tochter 17 Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein wie die Tochter?

c) Ein Vater ist jetzt 32 Jahre älter als sein Sohn und wird

nach 24 Jahren doppelt so alt sein wie dieser. Wie alt ist jetzt der Vater?

d) Eine Mutter ist 20 Jahre älter als ihre Tochter und war vor 2 Jahren $3\frac{1}{2}$ mal so alt wie diese. Wie alt ist jetzt die Tochter?

5. a) A hat 3 mal so viel Nüsse wie B. Giebt er aber an B 25 Nüsse ab, so hat er nur noch halb so viel Nüsse wie B. Wie viel Nüsse hat A?

b) In einer Kasse befinden sich 240 ℳ mehr als in einer zweiten. Legt man aus der zweiten in die erste 335 ℳ, so ist ihr Inhalt nur halb so groß wie der Inhalt der ersten. Wie viel ℳ befinden sich in der ersten Kasse?

c) In der 3ten Klasse eines Zuges saßen 4 mal so viel Reisende, wie in der 2ten. Als unterwegs aus der 3ten 32 Reisende ausgestiegen und in die 2te 12 eingestiegen waren, befanden sich in der 2ten Klasse gerade halb so viel Personen wie in der 3ten. Wie viel Reisende waren zuletzt in der 3ten Klasse?

d) Ein Faß enthält 52 l Wein mehr als ein zweites Faß. Gießt man aus dem zweiten 14 l in das erste, so enthält dieses 20 l weniger als das Doppelte des Restes, der in dem zweiten bleibt. Wie viel l Wein sind in dem ersten Faß?

6. a) Ein Knabe hoffte für seine Barschaft 8 Aprikosen kaufen zu können. Da aber eine Aprikose 5 ₰ mehr kostete, als er gedacht hatte, so erhielt er nur 6 Stück. Was kostete eine Aprikose und wie groß war die Barschaft des Knaben?

b) Jemand wollte Wein kaufen, die Flasche zu 1,40 ℳ. Beim Weinhändler entschloß er sich, für dasselbe Geld von einer anderen Sorte zu kaufen, von der 1 l nur 1,20 ℳ kostete. Wie viel Flaschen wollte er kaufen, wenn er nun 5 Flaschen mehr erhielt?

c) In einem Saale soll eine Anzahl Personen sich auf eine Reihe gleichlanger Bänke verteilen. Setzen sich auf eine Bank 12 Personen, so müssen 17 stehen. Setzen sich dagegen auf eine Bank 14 Personen, so wird die letzte Bank nur von 5 Personen besetzt. Wie viel Bänke und wie viel Personen befinden sich in dem Saale?

d) Verkauft ein Händler von einem Posten Hasen das Stück zu 3,30 ℳ, so verdient er 30 ℳ. Verkauft er dagegen das Stück zu 2,80 ℳ, so büßt er 20 ℳ ein. Wie viel Hasen enthielt der Posten?

e) Giebt A auf einer Reise täglich 6 ℳ aus, so bleiben ihm von seinem Reisegeld 40 ℳ übrig. Würde er dagegen täglich 7,50 ℳ ausgeben, so müßte er einen Tag früher heimkehren und behielte nur noch 2,50 ℳ übrig. Wie viel ℳ beträgt sein Reisegeld und wie lange dauert seine Reise?

7. a) Zwei Fußgänger gehen sich von zwei Orten, die 45 km weit

aus einander liegen, entgegen und brechen gleichzeitig auf. Wann werden sie

1) sich treffen,

2) noch 18 km von einander entfernt sein,

wenn in einer Stunde der eine 4 km und der andere 5 km zurücklegt?

b) Zwei Reiter reiten sich aus einer Entfernung von 39 km entgegen und legen in einer Stunde 12, bezw. 14 km zurück.

1) Wann werden sie sich begegnen,

2) Wann werden sie noch $6\frac{1}{2}$ km von einander entfernt sein, wenn beide zu derselben Zeit aufbrechen?

c) Zwei Radfahrer, von denen der eine 16 km und der andere 17 km in der Stunde zurücklegt, fahren sich entgegen aus zwei Städten, die 132 km von einander entfernt sind.

1) Wann werden sie sich treffen,

2) Wann werden sie noch $49\frac{1}{2}$ km von einander entfernt sein, wenn sie zu derselben Zeit aufbrechen?

d) Zwei Wagen fahren sich von zwei Orten, deren Entfernung 153 km beträgt, entgegen und legen in der Stunde 10, bezw. 11 km zurück. Wann sind sie noch 48 km von einander entfernt, wenn sie gleichzeitig abfahren?

e) Die Eisenbahnstrecke zwischen Hamburg und Berlin ist 284 km lang. Von Hamburg fährt ein Personenzug nach Berlin und gleichzeitig mit ihm ein Schnellzug von Berlin nach Hamburg, der durchschnittlich $9\frac{1}{2}$ m in der Sekunde mehr zurücklegt. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Personenzugs, wenn die beiden Züge sich nach 2 Std. 13 Min. 20 Sek. begegnen?

f) Von zwei Röhren liefert die eine 18 l und die andere 23 l Wasser in einer Minute. In welcher Zeit werden beide Röhren zusammen einen Behälter füllen, der 820 l faßt?

g) Ein Behälter von 1326 cdm Rauminhalt kann durch 3 Röhren, von denen die erste 42 l, die zweite 35 l und die dritte 53 l in der Minute liefert, gefüllt werden. Nach welcher Zeit läuft der Behälter über, wenn die 3 Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

8. a) Zwei Abteilungen Soldaten, die $28\frac{1}{2}$ km aus einander standen, marschierten sich entgegen. Die erste legte in der Stunde $4\frac{1}{2}$ km und die andere $5\frac{1}{4}$ km zurück. Wann trafen sie sich, wenn die erste Abteilung um 5 Uhr und die zweite um 7 Uhr vormittags aufbrach?

b) Zwei Radfahrer fahren sich aus einer Entfernung von 126 km entgegen. Der erste legt stündlich 16 und der zweite nur 13 km zurück.

1) Wann werden sich die beiden begegnen,

2) Wann werden sie noch $43\frac{1}{2}$ km von einander entfernt sein, wenn der zweite 3 Stunden früher abfährt als der erste?

c) Zwei Wagen, von denen der erste stündlich 12 km und der

zweite $10\frac{1}{2}$ km zurücklegte, fuhren sich aus einer Entfernung von 72 km entgegen und begegneten sich um 11 Uhr. Wann war der zweite Wagen abgefahren, wenn der erste um halb 9 Uhr aufgebrochen war?

d) Von den Orten A und B, die 60 km von einander entfernt sind, gingen sich zwei Fußgänger entgegen. Der erste brach um 10 Uhr vormittags auf. Wann begegneten sie sich, wenn der erste $5\frac{1}{2}$ km und der zweite $4\frac{3}{4}$ km stündlich zurücklegte und der zweite doppelt so lang unterwegs war wie der erste?

e) Jemand wollte einen Behälter von 920 cdm Rauminhalt durch zwei Röhren füllen, von denen die erste 24 l und die zweite 32 l Wasser in der Minute lieferte. Nach einer Viertelstunde merkte er, daß er es vergessen hatte, die zweite Röhre zu öffnen. Wie lange mußten von dann ab noch beide Röhren geöffnet sein, um den Behälter zu füllen?

9. a) Von zwei Orten AB, die 26 km von einander entfernt sind, brechen gleichzeitig zwei Radfahrer in der Richtung AB auf. Der von A aufbrechende Fahrer legt $18\frac{1}{2}$ km und der andere $15\frac{1}{4}$ km in der Stunde zurück. Nach welcher Zeit hat der erste Radfahrer

1) den zweiten eingeholt,

2) die Entfernung von dem zweiten auf $16\frac{1}{4}$ km vermindert?

b) Eine Abteilung Soldaten war um 6 Uhr vormittags von Potsdam nach Brandenburg abmarschiert und legte stündlich $5\frac{1}{2}$ km zurück. Zur gleichen Zeit waren von Charlottenburg zwei Radfahrer in derselben Richtung abgefahren. Wann holten diese die Soldaten ein, wenn sie stündlich 16 km zurücklegten und die Kaserne der Soldaten von der Stelle, von der die Radfahrer abfuhren, 28 km entfernt ist?

c) Ein Radfahrer fuhr von Hamburg über Berlin nach Oberschlesien und benutzte dieselbe Straße, auf der ein Reiter von Berlin nach einer oberschlesischen Stadt ritt. Beide waren täglich 10 Stunden unterwegs, aber während der Radfahrer durchschnittlich 16 km in der Stunde zurücklegte, kam der Reiter in der gleichen Zeit nur 10 km vorwärts. In welcher Zeit holte der Radfahrer den Reiter ein, wenn beide gleichzeitig aufbrechen und Hamburg von Berlin 288 km entfernt ist?

d) Von zwei Fußgängern legt der erste 60 m und der andere 75 m in der Minute zurück. In welcher Zeit wird der zweite den ersten einholen, wenn dieser 10 Minuten vor ihm wegging?

e) Einem Fußgänger, der stündlich 5 km zurücklegte, wurde nach seinem Weggang ein Radfahrer nachgeschickt, der ihn stündlich um 10 km einholte. Wann war der Fußgänger aufgebrochen, wenn ihn der Radfahrer nach 2 Stunden erreicht hatte?

f) Ein Behälter von 720 cdm Rauminhalt kann durch eine Röhre

gefüllt und durch eine zweite geleert werden. Nach welcher Zeit wird der Behälter überlaufen, wenn in einer Minute durch die erste Röhre 47 l und durch die zweite 29 l fließen*) und beide Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

g) Ein Behälter von 480 cdm Rauminhalt kann durch zwei Röhren, von denen die eine 25 l und die andere 37 l Wasser in der Minute liefert, gefüllt und durch eine dritte Röhre, aus der in der Minute 46 l ausfließen, entleert werden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn die drei Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

h) Bei einem Behälter von 728 cdm Rauminhalt kann Wasser durch eine von drei Röhren zugeführt und durch die beiden anderen abgelassen werden. Nach welcher Zeit wird der Behälter überlaufen, wenn in einer Minute aus der ersten Röhre 68 l und aus den beiden anderen 18 l, bez. 22 l fließen und die drei Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

i) Das Vorderrad eines Wagens hat einen Umfang von 1,75 m und das Hinterrad hat einen Umfang von 2,50 m. Welche Strecke hat der Wagen zurückgelegt, wenn das Vorderrad sich 3000 mal öfter umgedreht hat als das Hinterrad?

10. a) Zwei Wandrer gingen sich von zwei Orten, die $47\frac{1}{2}$ km von einander entfernt sind, entgegen und

1) trafen sich nach 5 Stunden.

2) waren nach 3 Stunden noch 22 km von einander entfernt.

Der erste legte stündlich 4 km zurück. Wie viel km legte der zweite in der Stunde zurück?

b) Ein Radfahrer fuhr von Mainz nach Köln und legte stündlich $16\frac{1}{2}$ km zurück. In Bingen begegnete er einem zweiten Radfahrer, der von Andernach nach Frankfurt a. M. fuhr und 4 Stunden vor ihm aufgebrochen war. Wie viel km legte dieser durchschnittlich in der Stunde zurück, wenn die Straße von Mainz nach Bingen 33 km und nach Andernach 117 km**) lang ist?

c) Ein Radfahrer fuhr von Kottbus nach Berlin mit einer Geschwindigkeit von 15 km in der Stunde und begegnete in Lübben einem anderen Radfahrer, der von Berlin kam und 2 Stunden vor ihm aufgebrochen war. Wie viel km legte dieser in einer Stunde zurück, wenn die Straße von Kottbus nach Lübben 45 km und nach Berlin 135 km lang ist?

d) Von zwei Offizieren ritt der eine von Wernigerode nach Magdeburg mit einer Geschwindigkeit von $10\frac{1}{3}$ km in der Stunde und

---

*) Der Einfluß des Wasserstandes in dem Behälter auf die Ausflußgeschwindigkeit soll hier nicht berücksichtigt werden.

**) Nach Mittelbachs Straßenprofilkarten.

der andere auf demselben Wege von Magdeburg nach Wernigerode. In Quedlinburg begegneten sich die beiden Reiter. Welche Strecke hat der zweite durchschnittlich in der Stunde zurückgelegt, wenn er 2 Stunden vor dem ersten aufbrach und die Straße von Magdeburg nach Quedlinburg 62 km und von da bis Wernigerode 31 km lang ist?

e) Um 8 Uhr 20 Min. vorm. fährt ein Personenzug von Frankfurt a. M. nach Köln und um 9 Uhr 15 Min. von Köln nach Frankfurt ein Schnellzug, der durchschnittlich 7 m in der Sekunde mehr zurücklegt. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Personenzuges, wenn die beiden Züge sich um 10 Uhr 38 Min. begegnen und die Eisenbahnstrecke zwischen Frankfurt und Köln 220,5 km lang ist?

11. a) Zwei Freunde hatten sich zu einer Wanderung von München nach Innsbruck verabredet und den Aufbruch auf 5 Uhr vormittags festgesetzt. Der erste war pünktlich zur Stelle und machte sich, als sein Freund nach einer Stunde noch nicht erschienen war, mit einer Geschwindigkeit von 4 km in der Stunde auf den Weg. Wie viel km legte der zweite stündlich zurück, wenn er erst um 8 Uhr abmarschirte und seinen Freund um 12 Uhr einholte?

b) Einer Abteilung Soldaten wurde 2 Stunden nach ihrem Abmarsch ein Reiter nachgeschickt, der stündlich 10 km zurücklegte und die Abteilung in 3 Stunden einholte. Wie viel km legten die Soldaten in 1 Stunde zurück?

c) Um 8 Uhr vormittags war ein Dampfer von Mainz nach Köln mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 15 km in der Stunde abgefahren. Um $9\frac{1}{4}$ Uhr folgte ihm ein Schnelldampfer, der ihn um 1 Uhr überholte. Welche Strecke legte der zweite Dampfer durchschnittlich in 1 Stunde zurück?

d) Ein Radfahrer, der stündlich 18 km zurücklegte, holte einen Reiter, der 3 Stunden vor ihm aufgebrochen war, nach 5 Stunden ein. Welche Strecke legte der Reiter durchschnittlich in 1 Stunde zurück?

e) Durch eine Röhre, die einem Behälter in der Minute 25 l zuführte, floß das Wasser bereits 8 Minuten, als eine zweite Röhre, die zur Entleerung des Behälters diente, geöffnet wurde. $12\frac{1}{2}$ Minuten später war der Behälter leer. Wie viel l Wasser flossen in 1 Minute durch die zweite Röhre?

12. a) Ein Radfahrer, der stündlich 6 km mehr zurücklegte als ein Wagen, fuhr diesem aus einer Entfernung von 90 km entgegen und traf ihn nach 3 Stunden. Wie viel km legte er in 1 Stunde zurück?

b) Von den Endpunkten eines 6 km langen Weges fuhren sich zwei Wagen entgegen, von denen der erste in 1 Minute 80 m mehr zurücklegte als der zweite. Beim Zusammentreffen hatte der erste 1920 m mehr zurückgelegt als der zweite. Welche Strecke durchfuhr der erste Wagen in 1 Minute?

c) Aus einer Röhre floß das Wasser in einen Behälter von 1505 cdm Rauminhalt bereits 12 Minuten, als eine zweite Röhre geöffnet wurde, die in 1 Minute 15 l Wasser mehr lieferte als die erste. 23 Minuten später war der Behälter gefüllt. Wie viel Wasser lieferte die erste Röhre in 1 Minute?

13. a) Ein Fußgänger ging von Breslau nach Oels. 3 Stunden nach seinem Aufbruch folgte ihm ein Radfahrer, der stündlich 11 km mehr zurücklegte als der Fußgänger und ihn in $1\frac{1}{2}$ Stunden einholte. Wie viel km legte der Fußgänger stündlich zurück?

b) Einem Bataillon Infanterie, das um 6 Uhr abmarschiert war, folgte um 8 Uhr eine Schwadron Husaren, die stündlich 5 km mehr zurücklegte als das Bataillon und dieses um 10 Uhr einholte. Welche Strecke legten die Husaren in 1 Stunde zurück?

c) Aus einer Röhre floß das Wasser in einen Behälter bereits 16 Minuten, als eine zweite Röhre geöffnet wurde, aus der in 1 Minute 14 l Wasser mehr abflossen als die erste lieferte. Nach weiteren 24 Minuten war der Behälter leer. Wie viel l Wasser lieferte die erste Röhre in 1 Minute?

14. a) Ein Radfahrer legte den Weg zwischen zwei Städten in $3\frac{1}{2}$ Stunden zurück. Er würde jedoch dazu $4\frac{2}{3}$ Stunden gebraucht haben, wenn er stündlich 4 km weniger zurückgelegt hätte. Wie viel km legte er in 1 Stunde zurück und wie weit sind die beiden Städte voneinander entfernt?

b) Ein Eisenbahnzug fährt von A nach B in 6 Stunden. Er würde jedoch nur 5 Stunden brauchen, wenn er stündlich 10 km mehr zurücklegte. Wie weit ist B von A entfernt?

c) Ein Gefäß kann durch eine Röhre in 4 Stunden gefüllt werden. Eine zweite Röhre, die in der Minute 3 l mehr liefert als die erste, füllt das Gefäß schon in $2\frac{1}{2}$ Stunden. Wie viel l gehen in das Gefäß?

d) Ein Radfahrer, der stündlich 16 km zurücklegte, begegnete einem Wagen, der stündlich 12 km fuhr, aber seine Fahrt 2 Stunden früher als der Radfahrer begonnen hatte, in der Mitte zwischen den beiden Ausgangspunkten. Wie viel km sind diese von einander entfernt?

c. Verteilungsaufgaben.

15. a) Zwei Knaben verteilen 45 Pflaumen so unter sich, daß der ältere 3 Pflaumen mehr erhält als der jüngere. Wie viel Pflaumen erhält jeder von ihnen?

b) Unter 5 Personen sollen 3000 ℳ so verteilt werden, daß jeder folgende 20 ℳ mehr erhält als der vorhergehende. Wie viel ℳ erhält der erste?

c) In einer Schule mit 4 Klassen und 120 Schülern hat die

zweite Klasse 5 Schüler mehr als die erste, die dritte 8 Schüler mehr als die zweite und die vierte 36 Schüler weniger als die drei ersten zusammen. Wie viel Schüler sind in der ersten Klasse?

16. a) Der Wochenlohn zweier Arbeiter beträgt im Ganzen 72 ℳ Wie viel ℳ erhält der erste, wenn er doppelt so viel verdient hat wie der zweite?

b) Ein Eisenbahnzug ist mit 200 Personen besetzt. In der zweiten Klasse befinden sich dreimal so viel Personen wie in der ersten und in der dritten Klasse sitzen viermal so viel Reisende wie in den beiden ersten zusammen. Wie viel Personen sind in der ersten Klasse?

c) An einem Kronleuchter sind 126 Flammen in drei Reihen verteilt. Die äußere Reihe enthält 6 Flammen weniger, als die doppelte Anzahl der Flammen in der inneren Reihe beträgt, und die mittlere Reihe enthält halb so viel Flammen wie die beiden anderen zusammen. Wie viel Flammen stehen in jeder Reihe?

d) 100 ℳ sollen an 3 Personrn A, B und C so verteilt werden, daß der Anteil des A 6 ℳ kleiner ist als der doppelte Anteil des B und C 15 ℳ mehr erhält, als die Hälfte des Anteils von A beträgt. Wie viel ℳ erhält A?

17. a) An einer Landpartie beteiligten sich 4 Frauen mehr als Männer und 12 Kinder mehr als Männer und Frauen zusammen. Die entstandenen Unkosten von 178 ℳ wurden so verteilt, daß auf jeden Mann 5 ℳ, auf jede Frau 4 ℳ und auf jedes Kind 2 ℳ fielen. Wie viel Männer befanden sich in der Gesellschaft?

b) Bei einer Landpartie, an der 6 Männer, 10 Frauen und 24 Kinder teilnahmen, betrugen die Unkosten im ganzen 85 ℳ. Wie viel kommt davon auf einen Mann, wenn für ihn 50 ₰ mehr und für ein Kind 75 ₰ weniger als für eine Frau berechnet werden sollen?

c) Ein Extrazug von Berlin nach Frankfurt a. M. befördert in der ersten Klasse 16, in der zweiten 200 und in der dritten 64 Personen. Das Fahrgeld für die zweite Klasse betrug 8 ℳ mehr als für die dritte und 12 ℳ weniger als für die erste. Was kostete die Fahrkarte für die dritte Klasse, wenn für die zweite dreimal so viel eingenommen wurde wie für die beiden anderen zusammen?

18. a) 5 Knaben sollten eine Anzahl Nüsse gleichmäßig unter sich verteilen. Da aber einer von ihnen auf seinen Anteil verzichtete, so erhielt jeder der 4 anderen 3 Nüsse mehr, als er sonst bekommen hätte. Wie viel Nüsse waren zu verteilen?

b) Von einer Erbschaft erhielt ein Sohn den sechsten und eine Tochter den fünften Teil. Wie groß war die Erbschaft, wenn die Tochter 4000 ℳ mehr erhielt als der Sohn?

c) Bei einem Ausflug verbrauchte ein Knabe ein Drittel seiner

Barschaft für die Fahrt, die Hälfte für das Mittagessen und den Rest von 60 ℳ für das Abendbrot. Wie groß war seine Barschaft?

d) Auf einer Badereise verbrauchte eine Familie $\frac{1}{8}$ der Gesamtkosten für die Reise, $\frac{3}{16}$ für die Wohnung, $\frac{2}{5}$ für die Verpflegung und den Rest von 230 ℳ für Bäder u. s. w. Wie viel ℳ betrugen die Gesamtkosten?

e) Jemand verbraucht $\frac{1}{3}$ seiner Jahreseinnahme für Verpflegung, $\frac{1}{10}$ für Kleidung, $\frac{1}{5}$ für Wohnungsmiete, $\frac{1}{15}$ für Heizung und behält noch 2700 ℳ übrig. Wie groß ist seine Jahreseinnahme?

f) Ein Herr vermachte in seinem Testament von seinem Vermögen seiner Frau den 5ten Teil, jedem seiner beiden Söhne den 6ten Teil, seiner Tochter den 4ten Teil, seiner Dienerschaft den 20ten Teil und bestimmte den Rest im Betrage von 150 000 ℳ für eine wohlthätige Stiftung. Wie groß war sein Vermögen?

g) Auf einem Bau sind 2 Aufseher, 36 Maurer und 12 Steinträger beschäftigt. Ein Maurer erhält $\frac{1}{56}$ des Tagelohns, ein Steinträger 2 ℳ mehr als ein Maurer und ein Aufseher 1 ℳ mehr als ein Steinträger. Wie groß ist der ganze Tagelohn?

d. Prozentrechnung.

α. Zinsrechnung.

19. a) Wie viel ℳ Zinsen bringen a ℳ zu p% in n Jahren?

Beispiele. 1. $a = 800$, $p = 3$ und $n = 5$.
2. $a = 793\frac{3}{4}$, $p = 3\frac{1}{5}$ „ $n = 3\frac{3}{4}$.
3. $a = 276{,}30$, $p = 5\frac{1}{3}$ „ $n = 6\frac{2}{3}$.

b) Welches Kapital bringt zu p% in n Jahren z ℳ Zinsen?

Beispiele. 1. $p = 3\frac{1}{2}$, $n = 6$ und $z = 105$.
2. $p = 3\frac{1}{8}$, $n = 4\frac{4}{15}$ „ $z = 1393\frac{3}{5}$.
3. $p = 3\frac{1}{4}$, $n = 5\frac{5}{24}$ „ $z = 1079{,}65$.

c) Zu wieviel Prozent sind a ℳ ausgeliehen, wenn sie in n Jahren z ℳ Zinsen bringen?

Beispiele. 1. $a = 650$, $n = 6$ und $z = 156$.
2. $a = 4312\frac{1}{2}$, $n = 5\frac{2}{3}$ „ $z = 782$.
3. $a = 4007{,}68$, $n = 4\frac{1}{2}$ „ $z = 563{,}58$.

d) Wie lange sind a ℳ zu p% ausgeliehen, wenn sie z ℳ Zinsen bringen?

Beispiele. 1. $a = 450$, $p = 4$ und $z = 54$.
2. $a = 962\frac{1}{2}$, $p = 3\frac{1}{5}$ „ $z = 77$.
3. $a = 579{,}15$, $p = 3\frac{5}{6}$ „ $z = 98{,}67$.

e) Welches Kapital wächst bei $p\%$ in n Jahren auf k ℳ an?

Beispiele. 1. $p = 4$, $n = 3\frac{1}{2}$ und $k = 798$.
2. $p = 3\frac{1}{5}$, $n = 3\frac{3}{4}$ „ $k = 1008$.
3. $p = 3\frac{3}{4}$, $n = 5\frac{5}{18}$ „ $k = 279{,}45$.

20. a) Von zwei gleichgroßen Kapitalien ist das erste zu 5% und das zweite zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen. Wie groß ist jedes von ihnen, wenn sie zusammen jährlich 57 ℳ Zinsen bringen?

b) Zwei Kapitalien, von denen das zweite $\frac{5}{8}$mal so groß ist wie das erste, sind zu $3\frac{3}{4}\%$, bez. $4\frac{1}{4}\%$ ausgeliehen und bringen jährlich 78 ℳ Zinsen. Wie groß ist das erste Kapital?

c) Von drei Kapitalien ist das erste $\frac{4}{3}$mal und das zweite $\frac{3}{2}$mal so groß wie das dritte. Das erste ist zu $4\frac{1}{2}\%$ 6 Jahre, das zweite zu 4% 5 Jahre und das dritte zu $3\frac{3}{4}\%$ 8 Jahre lang ausgeliehen. Wie groß ist das erste von ihnen, wenn alle drei zusammen 2880 ℳ Zinsen bringen?

d) Von zwei Kapitalien, welche zusammen 1645 ℳ betragen, ist das erste zu $3\frac{3}{5}\%$ 4 Jahre 3 Monate und das zweite zu $4\frac{1}{2}\%$ 2 Jahre 1 Monat ausgeliehen. Wie groß ist das erste von ihnen, wenn beide gleichviel Zinsen bringen?

e) Auf ein Sparkassenbuch, das vor 10 Jahren angelegt worden war, werden jetzt 600 ℳ, nach einem Jahre 500 ℳ, nach 2 Jahren 400 ℳ und nach 3 Jahren 300 ℳ abgehoben. Wie groß war die Einlage, wenn das Guthaben dann noch 1250 ℳ betragen wird und die Sparkasse (bei einfachen Zinsen) $3\frac{3}{4}\%$ berechnet?

f) Ein Arbeiter legte vor 7 Jahren eine Erbschaft von 500 ℳ auf eine Sparkasse, die zu $3\frac{1}{5}\%$ verzinst, und fügte am Ende eines jeden der folgenden 6 Jahre eine gewisse Summe hinzu. Er hebt jetzt, um ein Geschäft zu beginnen, 1650 ℳ ab. Wie groß war jede der Zuzahlungen, wenn sein Guthaben nun noch 196 ℳ beträgt?

g) Ein Kaufmann mußte sich zur Begründung eines Geschäftes noch 6000 ℳ leihen und diese mit 5% verzinsen. Er verdiente im ersten Jahre bereits 20% des angelegten Kapitals. Wie groß war sein eigenes Kapital, wenn er von dem Verdienst 2900 ℳ übrig hatte?

h) Ein Kaufmann begründete mit einem Kapital von 45 000 ℳ und einer zweiten geliehenen Summe, die er mit $4\frac{1}{2}\%$ verzinsen mußte, ein Geschäft, das ihm im ersten Jahre 15% des angelegten Kapitals als Ertrag lieferte. Er verbrauchte für seinen Haushalt 6500 ℳ und konnte am Ende des ersten Jahres außerdem noch 2875 ℳ zurückzahlen. Wie groß war die geliehene Summe?

21. a) Zu wie viel % sind 4900 ℳ ausgeliehen, wenn sie in $5\frac{1}{2}$ Jahren eben so viel Zinsen bringen wie 7700 ℳ in $4\frac{1}{2}$ Jahren zu $3\frac{1}{2}\%$?

b) Auf ein Sparkassenbuch, das vor 4 Jahren mit 600 ℳ an-

gelegt wurde, werden jetzt 150 ℳ, nach 2 Jahren 400 ℳ und nach weiteren 3 Jahren 120 ℳ abgehoben. Wie viel % berechnet die Sparkasse, wenn das Guthaben dann noch 68 ℳ betragen wird?

c) Ein Fabrikant übernahm eine Fabrik für 240 000 ℳ mit der Bedingung, daß er den Erbanteil seiner Geschwister von 160 000 ℳ mit 5% verzinste. Im ersten Geschäftsjahre verbrauchte er für seinen Haushalt 8000 ℳ und behielt nach Auszahlung der Zinsen noch 3200 ℳ übrig. Wie viel Prozent des Übernahme-Kapitals hat er verdient?

22. a) Wie viel Jahre müssen 8250 ℳ zu 4% stehen, um $652\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen weniger zu bringen als 7000 ℳ zu $4\frac{1}{2}$% in 6 Jahren?

b) Jemand legt jetzt 200 ℳ, nach einem Jahre 150 ℳ und nach 2 Jahren 120 ℳ auf eine Sparkasse, die mit $3\frac{1}{2}$% verzinst. Nach wie viel Jahren ist sein Guthaben auf 587,95 ℳ angewachsen?

c) Jemand legte 3000 ℳ auf eine Sparkasse, die mit $3\frac{1}{3}$% verzinst. Nach 3 Jahren hob er 1200 ℳ ab und fügte nach weiteren 2 Jahren 480 ℳ hinzu. Nach wie viel Jahren wird sein Guthaben wieder 3080 ℳ betragen?

β. Gewinn- und Verlustrechnung.

23. a) Ein Pferd wird mit 20% Verlust für 1280 ℳ verkauft. Wie viel ℳ hat es gekostet?

b) Eine Ware wird mit $12\frac{1}{2}$% Gewinn für 810 ℳ verkauft. Wie viel ℳ hat sie gekostet?

c) Beim Bau eines Hauses wurden 54 800 ℳ ausgegeben. Wie groß war der Kostenanschlag, wenn $8\frac{2}{5}$% desselben erspart wurden?

d) Zum Bau eines Hauses sind 193 000 Ziegelsteine erforderlich. Wie viel Ziegelsteine müssen bestellt werden, wenn der Bruch auf $3\frac{1}{2}$% veranschlagt wird?

e) Die Einwohnerzahl einer Stadt hat im letzten Jahre um $7\frac{1}{2}$% zugenommen und beträgt jetzt 66 650. Wie groß war sie vor einem Jahre?

f) Wie viel ℳ hatten die Maschinen einer Fabrik gekostet, wenn nach Abrechnung von $10\frac{1}{2}$% für die Abnutzung ihr Wert noch auf 32 220 ℳ berechnet wurde?

24. a) Ein Kaufmann verkaufte einen Sack Kaffee mit $12\frac{1}{2}$% Gewinn für 67,50 ℳ. Wie viel kg enthielt der Sack, wenn 1 kg für 2,40 ℳ eingekauft war?

b) Ein Weinhändler kaufte für 1000 ℳ Wein, verkaufte das Liter für 2,50 ℳ und verdiente dabei 25%. Wie viel l hatte er gekauft?

c) Eine Obstfrau kaufte einen Korb Äpfel für 20 ℳ, verkaufte das kg zu 50 ₰ und verdiente dabei 10%. Wie viel kg Äpfel enthielt der Korb?

d) Beim Verkauf eines Stückes Tuch, das 200 ℳ gekostet hatte, wurden 12% verdient. Wie viel m enthielt das Stück, wenn 1 m 60 ₰ weniger gekostet hatte, als es einbrachte?

25. a) Für Verzollung und Fracht wurden bei einem Faß Wein von 500 l 12% seines Einkaufspreises berechnet. Was hat 1 l gekostet, wenn es für 2 ℳ verkauft und dabei im ganzen ein Gewinn von 216 ℳ erzielt wurde?

b) Ein Kaufmann hat im letzten Jahre außer einer Verzinsung seines ganzen im Geschäft angelegten Vermögens zu 5% noch 4000 ℳ verdient und dadurch nach Abzug seiner 7500 ℳ betragenden Haushaltungskosten sein Vermögen auf 143 500 ℳ erhöht. Wie groß war sein Vermögen vor einem Jahre?

26. a) Bei einer Sendung Apfelsinen, die 120 ℳ gekostet und 40 ℳ Unkosten verursacht hatte, erwiesen sich 10% als verdorben. An den übrigen wurden 20 ℳ verdient. Wie viel Apfelsinen enthielt die Sendung, wenn die Mandel zu 2 ℳ verkauft wurde?

b) Eine Sendung Weintrauben kostete 140 ℳ und verursachte 20 ℳ Unkosten. Unterwegs verdarben 15 kg. Wie viel kg enthielt die Sendung, wenn 1 kg zu 1 ℳ verkauft und dabei ein Gewinn von 25% erzielt wird?

c) Ein Weinhändler kaufte für 1200 ℳ Wein. Unterwegs zerbrachen 10 Flaschen. Wie viel Flaschen hatte er gekauft, wenn er die Flasche für 3 ℳ verkaufte und dabei, obschon er 300 ℳ Unkosten berechnen mußte, 18% verdiente?

d) Ein Kaufmann kaufte zwei gleichgroße Fässer Wein zu dem gleichen Preise. Von dem ersten verkaufte er das Liter mit einem Gewinn von 20% für 2,40 ℳ, während er bei dem zweiten 2,75 ℳ für 1 l einnahm. Wie viel l enthielt jedes Faß, wenn er für Unkosten 5% des Einkaufspreises berechnen mußte und doch noch 285 ℳ verdiente?

e) Wenn ein Kaufmann von einem Posten Thee 1 kg bei 25% Gewinn für 10 ℳ, von einem 25 kg größeren Posten Kaffee 1 kg bei 15% Gewinn für 2,30 ℳ und von einem doppelt so großen Posten Zucker bei einem Gewinn von $12\frac{1}{2}$% 1 kg für 90 ₰ verkauft, so verdient er 47,50 ℳ. Wie viel kg enthält der Posten Thee?

γ. Rabatt- und Diskontrechnung.

27. a) Wie viel wird für einen Posten Ware bezahlt, der

1. 650 ℳ kosten sollte, wenn 4% Rabatt berechnet werden?
2. 875 „ „ „ „ „ $3\frac{1}{5}$% „ „ „ ?
3. 1240 „ „ „ „ „ $3\frac{3}{4}$% „ „ „ ?
4. 448 „ „ „ „ „ $6\frac{1}{4}$% „ „ „ ?
5. a „ „ „ „ „ p% „ „ „ ?

b) Wie viel ℳ sollte ein Posten Ware kosten, wenn er unter Berechnung von

1. 3% Rabatt mit 145,50 ℳ bezahlt wurde?
2. $6\frac{2}{3}$% „ „ 504 „ „ „ ?
3. $3\frac{2}{5}$% „ „ 579,6 „ „ „ ?
4. $7\frac{1}{3}$% „ „ 83,4 „ „ „ ?
5. p% „ „ b „ „ „ ?

c) Wieviel % Rabatt wurden bei einem Posten Ware berechnet, der

1. 840 ℳ kosten sollte und mit 798 ℳ bezahlt wurde?
2. 274,5 „ „ „ „ „ 247,05 „ „ „ ?
3. 562,5 „ „ „ „ „ 532,5 „ „ „ ?
4. 732,8 „ „ „ „ „ 687 „ „ „ ?
5. a „ „ „ „ „ b „ „ „ ?

d) Ein Stück Tuch von 24 m wird unter Anrechnung von $12\frac{1}{2}$% Rabatt mit 84 ℳ bezahlt. Wie viel ℳ sollte ein Meter kosten?

e) Ein Posten Wein sollte 60 ℳ kosten. Da aber 5% Rabatt bewilligt werden, so stellt sich der Preis einer Flasche auf 1,14 ℳ. Wie viel Flaschen Wein enthält der Posten?

28. a) Bei dem ersten von zwei Posten Ware, die gleichviel kosten sollten, wurden $7\frac{1}{2}$% und bei dem zweiten 5% Rabatt bewilligt. Dadurch stellte sich der Preis für beide Posten zusammen auf 1125 ℳ. Wie viel ℳ sollte jeder Posten kosten?

b) Von zwei Posten Ware sollte der erste $1\frac{1}{4}$ mal so viel kosten wie der zweite. Wenn nun beim ersten Posten 4% und bei dem zweiten 6% Rabatt bewilligt wurden und dadurch der Unterschied im Preise der beiden Posten auf 78 ℳ stieg, wie teuer sollte dann der erste Posten sein?

c) Von zwei Posten Ware sollte der erste 0,7 mal so viel kosten wie der zweite. Beim ersten wurden 8% und beim zweiten $6\frac{1}{2}$% Rabatt bewilligt und dadurch sank der Preisunterschied auf 116,4 ℳ. Wie hoch sollte der Preis des ersten Postens sein?

29. a) Eine Hausfrau kauft 2 kg Thee und 8 kg Kaffee und erhält beim Thee 8% und beim Kaffee 5% Rabatt. Was sollte 1 kg Thee kosten, wenn es 3 mal so teuer ist wie 1 kg Kaffee, und die Hausfrau 32,80 ℳ zu bezahlen hat?

b) Ein Cigarrenhändler kaufte in einer Fabrik, die ihm 20% Rabatt bewilligt, 50 Kisten und in einer anderen Fabrik, die ihm 25% Rabatt giebt, 30 Kisten Cigarren und bezahlte dafür zusammen $442\frac{1}{2}$ ℳ. Wie teuer sollte eine Kiste der ersten Sorte sein, wenn die zweite $1\frac{1}{3}$ mal so viel kostet wie die erste?

c) Ein Buchhändler bestellte gleichzeitig von einem Atlas 35, von

einem Wörterbuch 25 und von einer lateinischen Grammatik 44 Exemplare. Der Preis sollte für einen Atlas $1\frac{2}{5}$ mal und für ein Wörterbuch $2\frac{1}{2}$ mal so groß sein wie für eine Grammatik. Wie viel ℳ sollte eine Grammatik kosten, wenn bei einem Atlas 40 %, bei einem Wörterbuch $33\frac{1}{3}$ % und bei einer Grammatik 25 % Rabatt berechnet werden und der Buchhändler 329 ℳ zu bezahlen hatte?

d) Ein Gastwirt bestellte 100 Flaschen Rheinwein, 50 Flaschen Rotwein und 30 Flaschen Sekt. Laut Preisverzeichnis sollte eine Flasche Rotwein $1\frac{1}{2}$ mal und eine Flasche Sekt 4 mal so viel kosten wie eine Flasche Rheinwein. Welches war der Preis für eine Flasche Rheinwein, wenn bei diesem 20 %, beim Rotwein 25 % und beim Sekt 30 % Rabatt bewilligt wurden und der Gastwirt $440\frac{1}{2}$ ℳ zu bezahlen hatte?

30. a) Eine Schuld von 800 ℳ, die erst nach $2\frac{1}{2}$ Jahren fällig ist, wird mit 6 % (jährlich!) Diskont abgetragen. Wie viel ℳ sind zu bezahlen?

b) Ein Wechsel über 750 ℳ, der erst nach 7 Monaten fällig ist, wird unter Berechnung von 4 % Diskont verkauft. Wie viel ℳ bringt er ein?

c) Eine Schuld, die erst nach $1\frac{2}{5}$ Jahren fällig ist, wird unter Anrechnung von 4 % Diskont mit 560 ℳ abgetragen. Wie groß ist die Schuld?

d) Ein Wechsel wird 5 Monate vor seiner Verfallzeit bei 4 % Diskont für 2655 ℳ verkauft. Auf welche Summe ist er ausgestellt?

e) Ein Mieter bezahlte am 1. Januar bereits die Miete für das ganze Jahr mit 1173 ℳ, wobei ihm 6 % Diskont bewilligt wurden. Wie viel ℳ betrug die beim Beginne des Vierteljahres zu entrichtende Vierteljahrsmiete?

f) Ein Mieter hat seine Miete jedesmal am Ende des Vierteljahrs zu entrichten. Da er verreisen will, so bezahlt er die Miete für ein ganzes Jahr am 1. Januar mit 1455 ℳ im voraus. Wie viel ℳ beträgt die Vierteljahrsmiete, wenn $4\frac{4}{5}$ % Diskont berechnet werden?

31. a) Eine nach 6 Monaten fällige Schuld von 840 ℳ ist mit 819 ℳ abgetragen worden. Wie viel % Diskont wurden berechnet?

b) Ein Pächter bezahlte am 1. September die am Ende des Jahres fällige Pacht von 8000 ℳ mit 7840 ℳ im voraus. Wie viel % Diskont wurden berechnet?

c) Ein Wechsel über 2400 ℳ wird 4 Monate vor seiner Verfallzeit mit 2370 ℳ diskontiert. Wie viel % beträgt der Diskont?

32. a) Eine Schuld von 380 ℳ wird unter Anrechnung von $4\frac{1}{2}$ % Diskont mit 368,60 ℳ abgetragen. Nach wie viel Monaten ist sie fällig?

b) Die Pacht eines Rittergutes beträgt 42 000 ℳ, zahlbar am

Ende des Jahres. Wann wird dieselbe unter Berechnung von 4% Diskont mit 41580 ℳ vorausbezahlt?

c) Ein Wechsel über 1375 ℳ wird bei 0,01% täglichen Diskonts mit 1366,20 ℳ diskontiert. Wann ist er fällig?

33. a) Zwei auf dieselbe Summe lautende Wechsel, von denen der erste nach 7 und der andere nach 11 Monaten fällig ist, werden mit 6% Diskont verkauft. Wie groß ist jeder von ihnen, wenn sie zusammen 2292 ℳ einbringen?

b) Zwei auf dieselbe Summe lautende Wechsel, von denen der erste nach 5 und der andere nach 9 Monaten fällig ist, bringen beim Verkauf mit $4\frac{4}{5}$% Diskont 8164,8 ℳ ein. Wie groß ist jeder von ihnen?

c) Zwei Wechsel über 2750 und 3625 ℳ, von denen der erste nach 8 Monaten und der zweite nach 5 Monaten fällig ist, bringen beim Verkauf 6241,25 ℳ ein. Wie viel % Diskont wurden berechnet?

d) Zwei Wechsel über 5400 und 4800 ℳ werden an demselben Tage diskontiert und bringen 10052,4 ℳ ein. Wie viel % Diskont berechnet die Bank, wenn der erste Wechsel nach 120 und der zweite nach 70 Tagen fällig ist?

34. a) Der Kaufpreis eines Hauses betrug 144000 ℳ und war nach $1\frac{1}{2}$ Jahren fällig. Der Käufer zahlte jedoch 60000 ℳ an und ließ für den Rest eine Hypothek eintragen, die er bei 4% mit 3086,4 ℳ zu verzinsen hat. Wie viel % Diskont wurden berechnet?

b) Ein Kaufmann hatte einen nach 9 Monaten fälligen Wechsel ausgestellt und 4 Monate später darauf 2700 ℳ abgezahlt. Auf welche Summe lautet der Wechsel, wenn der Rest nach weiteren 3 Monaten bei 4% Diskont mit 2339 ℳ bezahlt und die erste Zahlung mit 4% verzinst wird?

c) Der Kaufpreis eines Waldes betrug 210000 ℳ und war nach $2\frac{1}{2}$ Jahren fällig. Der Käufer zahlte nach einem Jahre 80000 ℳ, $\frac{1}{2}$ Jahr später 50000 ℳ und löste nach weiteren 6 Monaten seine Schuld mit 71075 ℳ ab. Wie viel % Diskont kamen dabei in Anrechnung, wenn die ersten Zahlungen mit $4\frac{1}{2}$% verzinst wurden?

δ. Brutto- und Nettogewicht.

35. a) Ein Ballen Ware wiegt 125 kg. Wie viel wiegt die Ware allein (netto!), wenn das Gewicht der Verpackung 8% des ganzen Gewichts beträgt?

b) In einer Kiste werden 45 kg Thee verschickt. Wie viel % des ganzen Gewichts wiegt die Kiste, wenn die Fracht für 1 kg 12 ₰ und für die ganze Sendung 6 ℳ ausmacht?

c) Ein Faß Wein wiegt 280 kg und kostet ohne Faß 266 ℳ. Wie viel % des ganzen Gewichts wiegt das Faß, wenn für Fracht

und sonstige Spesen 39,90 ℳ bezahlt werden, 1 l Wein 1 kg wiegt und sein Preis sich auf 1,15 ℳ stellt?

36. a) Eine Sendung Tabak wiegt 50 kg und kostet mit Fracht 100 ℳ. Dabei ist 1 kg Tabak mit 2 ℳ und die Fracht für 1 kg mit 16 ₰ berechnet. Wie viel % des Bruttogewichts betrug das Gewicht der Verpackung?

b) Ein Sack Kaffee wiegt 80 kg und kostet 183,3 ℳ; außerdem muß noch das kg Kaffee mit 25 ₰ verzollt werden, und dadurch stellt sich der Preis für 1 kg auf 2,60 ℳ. Wie viel % des Bruttogewichtes wiegt der Sack?

c) Ein Kaufmann bezog aus Italien 200 kg in Kisten verpackte Weintrauben und bezahlte dafür 120 ℳ. Die Fracht, die für 1 kg 48 ₰ weniger betrug, als 1 kg Trauben kostete, belief sich auf 30 ℳ. Wie viel % des Bruttogewichts wiegen die Kisten?

d) Wird bei einer Sendung Zucker der Preis eines kg nach dem Bruttogewicht berechnet, so beträgt er 45 ₰; wird er dagegen nach dem Nettogewicht bestimmt, so beträgt er 50 ₰. Wie groß ist das Nettogewicht, wenn die Verpackung 13 kg schwer ist?

e. Mischungsrechnung.

37. a) Wie viel Liter Wasser wurden zu 825 l Wein hinzugegossen, wenn dadurch der Preis eines Liters von 1,40 ℳ auf 1 ℳ sank?

b) Jemand verdünnt 600 l Spiritus, die er zu 36 ₰ für das Liter gekauft hatte, mit so viel Wasser, daß das Liter der Mischung nur noch 27 ₰ wert ist. Wie viel Liter Wasser hat er genommen?

38. a) Ein Kaufmann mischt 320 kg Thee, 1 kg für 5,50 ℳ, mit einer besseren Sorte, von der 1 kg 8,50 ℳ kostet. Wie viel kg dieser Sorte muß er nehmen, wenn 1 kg der Mischung 6,50 ℳ wert sein soll?

b) Wie viel Liter Moselwein, 1 l für 80 ₰, sind mit 150 l Nahewein, 1 l für 1,20 ℳ, gemischt worden, wenn das Liter der Mischung 1,10 ℳ kostet?

c)*) An einem Festessen nehmen Damen und Herren, darunter 60 Damen, teil. Für einen Herrn wurden 10 ℳ und für eine Dame 6 ℳ berechnet. Wie viel Herren waren anwesend, wenn durchschnittlich für jede Person 7,50 ℳ berechnet wurden?

39. a) Ein Kaufmann mischt 120 kg Kaffee, 1 kg für 2,40 ℳ, mit 40 kg einer geringeren Sorte und erzielt dadurch eine Mischung, von der 1 kg 2,30 ℳ kostet. Wie teuer ist 1 kg der geringeren Sorte?

*) Die Aufnahme der Aufgaben 38c, 39c, 40 und 41d u. e in diesen Abschnitt erklärt sich aus der Form, in der ihre Auflösung am bequemsten angesetzt wird.

b) Ein Händler mischt 80 kg Butter, 1 kg zu 1,80 ℳ, mit 50 kg einer besseren Sorte. Was kostet 1 kg derselben, wenn der Mischungspreis 2,10 ℳ beträgt?

c) An einer Landpartie beteiligen sich 15 Erwachsene und 50 Kinder. Wie viel wurde für ein Kind berechnet, wenn die Unkosten 135 ℳ betragen und jeder Erwachsene 3 ℳ beisteuert?

d) Ein Kaufmann löst in 50 kg Honig und 4 l Wasser 10 kg Zucker, 1 kg für 70 ₰, auf und erhält dadurch eine Mischung, die ihn 67 ℳ kostet. Wie viel hat er für 1 kg Honig bezahlt?

40. a) Ein Kaufmann verkaufte 24 kg Kaffee und 35 kg Zucker und nahm dafür 77,30 ℳ ein. Was kostet bei ihm 1 kg Zucker, wenn es 1,50 ℳ billiger ist als 1 kg Kaffee?

b) Ein Kaufmann verkaufte in einem Monat 84 kg Thee, 260 kg Kaffee, 96 kg Zucker und 155 kg Tabak und nahm dafür 1694,4 ℳ ein. Was kostet bei ihm 1 kg Kaffee, wenn er den Tabak zu demselben Preise, den Thee 5 ℳ teurer und den Zucker 1,60 ℳ billiger als den Kaffee verkauft?

41. a) Ein Kaufmann stellt aus zwei Sorten Tabak, 1 kg für 1,80, bez. 2,60 ℳ, eine Mischung von 120 kg zu einem Mischungspreise von 2,10 ℳ her. Wie viel kg der billigeren Sorte hat er genommen?

b) Aus zwei Sorten Wein, 1 l für 1,80, bez. 3 ℳ, soll eine Mischung von 300 l zu einem Mischungspreise von 2,50 ℳ hergestellt werden. Wie viel l der besseren Sorte sind zu nehmen?

c) Aus Roggen, 1 hl für 12,60 ℳ, und Gerste, 1 hl für 8,80 ℳ, wird eine Mischung von 76 hl zum Preise von 10 ℳ für 1 hl hergestellt. Wie viel hl Roggen werden genommen?

d) Der Inhalt einer Kasse besteht aus Fünf- und Zwanzigmarkstücken und beträgt 775 ℳ. Wie viel Fünfmarkstücke sind in der Kasse, wenn in ihr 80 Geldstücke liegen?

e) Jemand erhält beim Wechseln eines Hundertmarkscheins in Fünf- und Dreimarkstücke im ganzen 28 Geldstücke. Wie viel Fünfmarkstücke sind dabei?

42. a) Ein Weinhändler mischte 600 l Wein, 1 l für 1,20 ℳ, mit einer besseren Sorte, von der 1 l 2 ℳ kostete, verkaufte das Liter der Mischung für 1,80 ℳ und verdiente dabei 320 ℳ. Wie viel l der besseren Sorte hat er genommen?

b) Ein Händler mischte 100 kg Butter, 1 kg für 2,50 ℳ, mit 60 kg einer geringeren Sorte und verliert, da er das kg der Mischung für 2 ℳ verkaufen mußte, im Ganzen 38 ℳ. Wie teuer war 1 kg der geringeren Sorte?

c) Ein Kaufmann stellte aus zwei Sorten Thee zum Preise von 6 ℳ und 9,50 ℳ für 1 kg eine Mischung von 300 kg her und ver-

kaufte, um 260 ℳ zu verdienen, das kg der Mischung für 8,50 ℳ Wie viel kg der geringeren Sorte hat er genommen?

d) Ein Getreidehändler stellte aus Roggen und Weizen, 1 hl für 12 ℳ, bez. 18,50 ℳ, eine Mischung von 500 hl her und verkaufte, um 300 ℳ zu verdienen, das hl der Mischung für 16,50 ℳ. Wie viel hl Roggen enthält die Mischung?

43. a) Ein Weinhändler stellt aus zwei Sorten Wein, von denen er 1 l mit 80 ₰, bez. 2,20 ℳ bezahlt hatte, eine Mischung von 7000 l her. Wie viel von jeder Sorte muß er nehmen, wenn er das Liter zu 1,80 ℳ verkaufen und dabei 25% verdienen will?

b) Ein Kaufmann mischt 60 kg Thee, 1 kg für 6,50 ℳ, mit einer besseren Sorte, von der er 1 kg mit 8,50 ℳ bezahlt hat. Wie viel kg hat er davon zu nehmen, wenn er das kg der Mischung für 8,40 ℳ verkaufen und dabei 20% verdienen will?

c) Ein Kaufmann mischt 40 kg Kaffee, 1 kg für 2,60 ℳ, mit 60 kg einer geringeren Sorte und verdient 15%, wenn er das kg der Mischung für 2,30 ℳ verkauft. Was kostet ihn 1 kg der geringeren Sorte?

d) Ein Weinhändler kaufte zwei Sorten Most, 1 l für 75 ₰, bez. 1,65 ℳ, im Ganzen 12000 l, und mischte sie mit 3000 l Zuckerwasser, in dem für 200 ℳ Traubenzucker aufgelöst ist. Der Gärungs- und Reinigungsprozeß vermindert die Mischung auf 14350 l. Wie viel l der geringeren Sorte hat er gekauft, wenn er 1 l des Weines zu 2 ℳ verkaufen und dabei 75% verdienen will?

Nr. 21. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Zweiter Teil.

a. Vorübungen.

44. a) Welche Zahl muß zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{25}$ addiert werden, damit er den Wert $\frac{3}{4}$ erhält?

b) Welche Zahl muß von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{11}{16}$ subtrahiert werden, damit er den Wert $\frac{1}{2}$ erhält?

c) Welche Zahl muß zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{12}{19}$ addiert werden, damit er das arithmetische Mittel zu $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ wird?

d) Welche Zahl muß man von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{119}{143}$ subtrahieren, damit der entstandene Bruch sich zu $\frac{5}{8}$ wie $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{5}$ verhält?

e) Um welche Zahl muß man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ vermehren (vermindern), um $\frac{c}{d}$ zu erhalten?

f) Welche Zahl muß von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahiert und zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{c}{d}$ addiert werden, damit zwei gleichgroße Brüche entstehen?

Beispiele. 1) $\frac{a}{b}=\frac{40}{51}$ und $\frac{c}{d}=\frac{8}{13}$. 2) $\frac{a}{b}=\frac{49}{59}$ und $\frac{c}{d}=\frac{19}{26}$.

3) $\frac{a}{b}=\frac{61}{72}$ und $\frac{c}{d}=\frac{29}{36}$.

g) Welche Zahl muß zu dem Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ und zu dem Nenner des Bruches $\frac{c}{d}$ addiert und gleichzeitig von dem Nenner des ersten und von dem Zähler des zweiten Bruches subtrahiert werden, damit zwei gleichgroße Brüche entstehen?

Beispiele. 1) $\frac{a}{b}=\frac{13}{27}$ und $\frac{c}{d}=\frac{43}{29}$. 2) $\frac{a}{b}=\frac{19}{41}$ und $\frac{c}{d}=\frac{31}{34}$.

3) $\frac{a}{b}=\frac{26}{79}$ und $\frac{c}{d}=\frac{59}{91}$.

45. a) Wie heißt ein Bruch mit dem Werte $\frac{4}{5}$, wenn sein Zähler um 19 kleiner ist als sein Nenner?

b) Der Nenner eines Bruches ist um 7 größer als der Zähler. Vermehrt man den Zähler um 4 und den Nenner um 9, so erhält der Bruch den Wert $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch, dessen Nenner um 8 größer ist als sein Zähler, erhält den Wert $\frac{3}{7}$, wenn man seinen Zähler und Nenner um 7 vermindert. Wie heißt der Bruch?

d) Ein Bruch, dessen Zähler um 12 kleiner ist als sein Nenner, erhält den Wert $\frac{4}{5}$, wenn man den Zähler um 3 vermehrt und den Nenner um 5 vermindert. Wie heißt der Bruch?

e) Ein Bruch, dessen Zähler um 8 größer ist als sein Nenner, wird gleich seinem reciproken Werte, wenn man seinen Zähler um 1 und seinen Nenner um 25 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

46. a) Vermehrt man eine Zahl um a, bez. um b, so erhält man 2 Summen, die sich wie $p:q$ verhalten. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a=4$, $b=9$ und $p:q=4:5$.

2. $a=2$, $b=-3$ und $p:q=3:2$.

3. $a=-3$, $b=5$ „ $p:q=3:4$.

b) Vermehrt man eine Zahl zuerst um a und dann die Summe um b, so erhält man Summen, die sich wie $p:q$ verhalten. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a=2$, $b=4$ und $p:q=3:4$.

2. $a=5$, $b=3$ „ $p:q=4:5$.

3. $a=7$, $b=2$ „ $p:q=9:8$.

4. $a=-5$, $b=-4$ und $p:q=7:5$.

c) Addiert man 20 zu jeder von zwei Zahlen, die sich wie 3:4 verhalten, so erhält man Summen, die in dem Verhältnis 8:9 stehen. Wie heißen die Zahlen?

d) Zwei Zahlen verhalten sich wie 1:4. Nimmt man von der zweiten 9 weg und fügt sie zu der ersten hinzu, so kehrt sich das Verhältnis um. Wie heißen die Zahlen?

e) Zwei Zahlen verhalten sich wie 6:7. Vermindert man die erste um 4 und vermehrt die andere um 2, so verhält sich die Differenz zu der Summe wie 2:3. Wie heißen die Zahlen?

47. a) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Werte $\frac{2}{3}$ um 4 und seinen Nenner um 3, so erhält er den Wert $\frac{5}{4}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermindert man den Zähler eines Bruches mit dem Werte $\frac{4}{5}$ um 8 und vermehrt seinen Nenner um 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch mit dem Werte $\frac{5}{6}$ wird doppelt so groß, wenn man seinen Zähler um 5 vermehrt und seinen Nenner um 6 vermindert. Wie heißt der Bruch?

d) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Werte $\frac{4}{7}$ um 16 und vermindert seinen Nenner um 5, so erhält man seinen reciproken Wert. Wie heißt der Bruch?

e) Vermehrt man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{16}$ um Zahlen, die sich wie 3:4 verhalten, so erhält man $\frac{5}{9}$. Wie heißen diese Zahlen?

f) Vermindert man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{35}{40}$ um Zahlen, die sich wie 3:4 verhalten, so erhält man $\frac{7}{8}$. Wie heißen diese Zahlen?

48. a) Vermehrt man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Werte $\frac{4}{5}$ um 9 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{37}{30}$ ab, so erhält man $\frac{2}{5}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches mit Werte $\frac{5}{6}$ um 5 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{22}{15}$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch hat den Wert $\frac{5}{8}$. Vermehrt man seinen Zähler um 3 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man dasselbe, wie wenn man seinen Zähler um 10 und seinen Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

49. a) Die Zahl 240 wird so in zwei Teile zerlegt, daß der Quotient aus

1) den beiden Teilen gleich $\frac{3}{7}$ ist.

2) dem größeren Teile und der Differenz der Teile gleich $\frac{13}{6}$ ist.

3) „ kleineren „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{5}{6}$ „.

Wie groß sind die Teile?

b) Die Zahl 68 wird so in zwei Teile zerlegt, daß $\frac{1}{3}$ des ersten um 12 größer ist als $\frac{1}{5}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

c) Die Zahl 100 wird so in zwei Teile zerlegt, daß $\frac{2}{5}$ des ersten um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

d) Die Zahl 123 wird so in drei Teile zerlegt, daß der erste um 5 größer ist als der zweite und $\frac{1}{3}$ des ersten mit $\frac{1}{4}$ des zweiten zusammen 6 mehr betragen als die Hälfte des dritten. Wie groß ist der erste Teil?

e) Die Zahl 174 wird so in drei Teile zerlegt, daß der dritte um 7 kleiner ist als der zweite und $\frac{1}{5}$ des ersten, $\frac{2}{7}$ des zweiten und $\frac{3}{8}$ des dritten zusammen 50 betragen. Wie groß ist der erste Teil?

b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben.

50. a) Ein Tagelöhner erhielt in einem Monat als Lohn für 23 Arbeitstage 31,50 ℳ und 4 Centner Roggen. In einem anderen Monat erhielt er als Lohn für 26 Arbeitstage 32,50 ℳ und 5 Centner Roggen. Wie hoch wurde ein Centner Roggen angerechnet?

b) Ein Kaufmann hatte an zwei Lieferanten zusammen 9900 ℳ zu bezahlen. Da ihm aber nur 4300 ℳ zur Verfügung standen, konnte er bei dem ersten Lieferanten nur die Hälfte und bei dem zweiten nur ein Drittel seiner Forderung begleichen. Wie groß war die Forderung des ersten Lieferanten?

c) Einem Studenten wurden von seinem Schneider und Schuster gleichzeitig zwei Rechnungen überreicht, die sich zusammen auf 110 ℳ beliefen. Er hatte jedoch nur 30 ℳ zur Verfügung und bezahlte damit dem Schneider den vierten und dem Schuster den dritten Teil seiner Forderung. Wie hoch war die Rechnung des Schneiders?

d) Eine Hausfrau hatte zur Begleichung ihrer Monatsrechnungen bei dem Schlächter und dem Kaufmann 100 ℳ mitgenommen. Da aber beide Rechnungen höher waren, als sie gedacht hatte, so konnte sie nur dem Schlächter $\frac{3}{4}$ und dem Kaufmann $\frac{4}{5}$ seiner Rechnung bezahlen. Wie hoch war die Rechnung des Schlächters, wenn er 30 ℳ mehr zu fordern hatte als der Kaufmann?

e) Ein Diener war für 360 ℳ Lohn und einen Anzug, den er sofort erhielt, auf ein Jahr in Dienst genommen worden. Als er nach 5 Monaten seine Stellung bereits aufgab, wurden ihm nur 122 ℳ ausgezahlt. Wie hoch wurde der Anzug angerechnet?

f) Ein Bauunternehmer hatte an seinen Steinlieferanten 800 ℳ mehr zu bezahlen als an seinen Holzlieferanten. Wie viel war er diesem schuldig, wenn er den dritten Teil seiner Rechnung beglich und dazu 240 ℳ mehr anwenden mußte als für den fünften Teil der Rechnung des Steinlieferanten?

51. a) Zwei Wanderer gingen sich von zwei Orten, die e km auseinanderlagen, mit Geschwindigkeiten entgegen, die sich wie $a : b$ verhielten, und trafen sich nach t Stunden. Wie viel km legte der erste in einer Stunde zurück?

Beispiele. 1. $a:b=3:4$, $e=63$, $t=6$.
2. $a:b=9:11$, $e=45$, $t=4\frac{1}{2}$.
3. $a:b=11:10$, $e=28$, $t=2\frac{2}{3}$.

b) Zwei Radfahrer fuhren sich aus einer Entfernung von e km mit Geschwindigkeiten entgegen, die sich wie $a:b$ verhielten, und trafen sich t Stunden nach der Abfahrt des ersten. Wie groß war die Geschwindigkeit des zweiten, wenn er t' Stunden später aufbrach als der erste Radfahrer?

Beispiele. 1. $a:b=11:12$, $e=152$, $t=6$, $t'=2$.
2. $a:b=9:8$, $e=224$, $t=8$, $t'=3$.
3. $a:b=4:3\frac{1}{2}$, $e=106$, $t=4$, $t'=1$.

c) Ein Bote war von Potsdam nach Brandenburg um 6 Uhr vormittags aufgebrochen. t Stunden später folgte ihm von Berlin aus ein Radfahrer, dessen Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit des Boten sich wie $a:b$ verhielt. Wie viel km legte der Radfahrer in einer Stunde zurück, wenn er den Boten nach t' Stunden einholte und Potsdam von Berlin 28 km entfernt ist?

Beispiele. 1. $a:b=17:4$, $t=2\frac{3}{4}$, $t'=3$.
2. $a:b=16:5$, $t=3\frac{1}{5}$, $t'=4$.
3. $a:b=9:2$, $t=5\frac{1}{4}$, $t'=3\frac{1}{2}$.

52. a) Zwei Wanderer gehen sich von zwei Orten, die e km auseinander liegen, mit Geschwindigkeiten entgegen, die sich wie $a:b$ verhalten. Wann werden sie sich begegnen, wenn beide um 7 Uhr vormittags aufbrechen und der erste für die ganze Strecke t Stunden braucht?

Beispiele. 1. $a:b=4:5$, $e=45$, $t=11\frac{1}{4}$.
2. $a:b=4\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}$, $e=39$, $t=8\frac{2}{3}$.
3. $a:b=5{,}2:4{,}8$, $e=65$, $t=12\frac{1}{2}$.

b) Zwei Reiter reiten sich von zwei Orten, die 132 km von einander entfernt sind, mit Geschwindigkeiten entgegen, die sich wie 6 : 7 verhalten. Wann werden sie sich begegnen, wenn der erste, der 11 Stunden für die ganze Strecke braucht, um 5 Uhr und der zweite $4\frac{1}{2}$ Stunden nach dem ersten aufbricht?

c) Zwei Radfahrer fuhren auf derselben Straße von Berlin nach Bremen. Der erste brach um 6 Uhr auf, während ihm der zweite d Stunden später folgte. In wie viel Stunden holte dieser den ersten ein, wenn seine Geschwindigkeit zu der des ersten sich wie $a:b$ verhielt?

Beispiele. 1. $a:b=5:4$ und $d=1$.
2. $a:b=4\frac{1}{5}:3\frac{3}{4}$ „ $d=1\frac{3}{4}$.
3. $a:b=8{,}4:6{,}9$ „ $d=1{,}5$.

53. a) Zwei Wanderer gingen sich von zwei Orten A und B entgegen. Wann trafen sie sich, wenn der erste in 5 und der zweite in $7\frac{1}{2}$ Stunden

den ganzen Weg zurückgelegt hätte und beide um 8 Uhr vormittags aufbrachen?

b) Zwei Radfahrer fuhren sich von Berlin und Leipzig aus entgegen. Wann trafen sie sich, wenn der erste 14 und der andere $18\frac{2}{3}$ Stunden Fahrzeit für die ganze Strecke nötig hatte und beide um 5 Uhr vormittags abfuhren?

c) Um 6 Uhr vormittags brach ein Fußgänger von Köln nach Neuß auf und begegnete einem zweiten Fußgänger, der von Neuß nach Köln wanderte und mit ihm zu gleicher Zeit aufgebrochen war. Wann fand die Begegnung statt, wenn der erste $6\frac{1}{4}$ und der zweite $9\frac{3}{8}$ Stunden für den ganzen Weg nötig hatte?

d) Von zwei Orten aus reiten sich zwei Offiziere entgegen. Wann werden sie sich begegnen, wenn beide um 6 Uhr vormittags fortreiten und a, bez. b Stunden für den ganzen Weg nötig haben?

Beispiele. 1. $a = 5$, $b = 7$.
2. $a = 7\frac{1}{5}$, $b = 8\frac{4}{5}$.
3. $a = 6{,}3$, $b = 6{,}93$.

e) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren in 21, bez. 28 Minuten gefüllt werden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn die beiden Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

f) Um einen Garten anzulegen, hat ein Gärtner 36 Stunden Arbeitszeit nötig. Sein Gehülfe würde die Arbeit in 45 Stunden ausführen. In welcher Zeit werden beide zusammen den Garten anlegen?

g) A hat eine gewisse Summe für eine Reise erübrigt. Reist er allein, so kommt er damit 24 Tage aus. Reist dagegen seine Frau allein, so kann diese 40 Tage wegbleiben. Wie lange können beide zusammen mit dem Gelde reisen?

h) Ein Wasserbehälter kann durch die erste von drei Röhren in a, durch die zweite in b und durch die dritte in c Minuten gefüllt werden. In welcher Zeit werden die drei Röhren den Behälter füllen, wenn man sie gleichzeitig öffnet?

Beispiele. 1. $a = 45$, $b = 60$ und $c = 90$.
2. $a = 15$, $b = 18$ „ $c = 22\frac{1}{2}$.
3. $a = 36$, $b = 28{,}8$ „ $c = 48$.

54. a) Ein Dampfer fuhr um 7 Uhr vormittags von Köln nach Düsseldorf und begegnete einem von Düsseldorf kommenden Dampfer, der $\frac{1}{4}$ Stunde später abgefahren war. Wann trat die Begegnung ein, wenn die Fahrzeit für den ersten Dampfer 2 Stunden und für den zweiten 3 Stunden betrug?

b) Ein Personenzug fuhr um 7 Uhr 20 Minuten von A nach B ab. Wann begegnete er dem Schnellzug, der um 8 Uhr 15 Minuten

von B nach A abgefahren war, wenn die Fahrzeit für den Personenzug 2 Stunden und für den Schnellzug $1\frac{1}{4}$ Stunden betrug?

c) Zwei Radfahrer fahren sich von zwei Orten aus entgegen. Wie viel Stunden nach der Abfahrt des ersten werden sie sich treffen, wenn dieser a Stunden und der zweite b Stunden für den ganzen Weg nötig hat und der zweite d Stunden früher abfährt als der erste?

Beispiele. 1. $a = 6$, $b = 8$ und $d = 1$.
2. $a = 9$, $b = 13$ „ $d = 2$.
3. $a = 11\frac{1}{3}$, $b = 13\frac{5}{6}$ „ $d = 1\frac{1}{4}$.

d) Ein Beamter fuhr nach Freienwalde, um dort 4 Wochen zuzubringen. Nach 10 Tagen überraschte ihn seine Frau, die bei Verwandten gewesen war. Wie viel Tage können beide nun noch in Freienwalde bleiben, wenn die Frau mit dem Gelde allein 5 Wochen ausgekommen wäre und die Kosten des Aufenthalts nicht erhöht werden sollten?

e) Um einen Graben auszuwerfen, braucht von zwei Arbeitern der erste 12 und der zweite 8 Stunden. Der erste arbeitete bereits 2 Stunden, als der zweite hinzukam. Nach wie viel Stunden werden beide nunmehr zusammen den Graben fertig gemacht haben?

f) Ein Wasserbehälter kann durch die erste von zwei Röhren in a und durch die andere in b Minuten gefüllt werden. Wie viel Minuten nach der Öffnung der ersten Röhre wird der Behälter gefüllt sein, wenn die zweite Röhre t Minuten später geöffnet wird als die erste?

Beispiele. 1. $a = 40$, $b = 32$ und $t = 4$.
2. $a = 34$, $b = 27$ „ $t = 3\frac{1}{2}$.
3. $a = 16{,}8$, $b = 13{,}6$ „ $t = 1{,}6$.

g) Von drei Röhren, von denen die erste in a, die zweite in b und die dritte in c Minuten einen Behälter füllt, wird die zweite t und die dritte t' Minuten nach der ersten geöffnet. Wie viel Minuten nach der Öffnung der ersten Röhre ist der Behälter gefüllt?

Beispiele. 1. $a = 27$, $b = 21$, $c = 18$, $t = 2$ und $t' = 3$.
2. $a = 45$, $b = 72$, $c = 20$, $t = 3$ „ $t' = 5$.
3. $a = 60$, $b = 30$, $c = 39$, $t = 4$ „ $t' = 3$.

55. a) Zwei Radfahrer, von denen der erste in 45 und der zweite in 48 Sekunden eine Bahn zurücklegt, fahren gleichzeitig von derselben Stelle und in derselben Richtung ab. Wann hat der erste Radfahrer den zweiten zum ersten Male überrundet?

b) Ein Wasserbehälter kann durch eine von zwei Röhren in a Minuten gefüllt und durch die andere in b Minuten entleert werden. Nach welcher Zeit fließt der Behälter über, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet werden?

Beispiele. 1. $a = 12$, $b = 16$.
2. $a = 6$, $b = 10$.
3. $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 10\frac{5}{6}$.

c) Um welche Zeit zwischen 6 und 7 Uhr stehen die Zeiger einer Uhr über einander?

d) Um welche Zeit zwischen 4 und 5 Uhr stehen die Zeiger einer Uhr einander gegenüber?

e) Wie viel Minuten nach 7 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr zum ersten Male mit einander einen rechten Winkel?

56. a) Von zwei Radfahrern legte der erste in a und der zweite in b Sekunden eine Bahn zurück. Beide fuhren von derselben Stelle und in derselben Richtung ab, und zwar der zweite t Sekunden früher als der erste. Wie lange mußte der erste fahren, um den zweiten zum ersten Male zu überrunden?

Beispiele. 1. $a = 75$, $b = 90$ und $t = 6$.
2. $a = 48$, $b = 64$ „ $t = 16$.
3. $a = 54$, $b = 63$ „ $t = 7$.

b) Ein Behälter kann durch eine von zwei Röhren in a Minuten gefüllt und in b Minuten entleert werden. Die erste Röhre wird t Minuten vor der zweiten geöffnet. Wie viel Minuten sind nach Öffnung der zweiten Röhre noch erforderlich, um den Behälter zu füllen?

Beispiele. 1. $a = 15$, $b = 21$ und $t = 3$.
2. $a = 32$, $b = 35$ „ $t = 17$.
3. $a = 42$, $b = 50$ „ $t = 27$.

c) Ein Behälter kann durch zwei Röhren in a, bez. b Minuten gefüllt und durch eine dritte Röhre in c Minuten entleert werden. Wie viel Minuten nach der Öffnung der ersten Röhre ist der Behälter gefüllt, wenn die zweite Röhre t Minuten nach der ersten und die dritte t' Minuten nach der zweiten geöffnet wird?

Beispiele. 1. $a = 24$, $b = 30$, $c = 18$, $t = 5$ u. $t' = 2$.
2. $a = 25$, $b = 20$, $c = 17\frac{1}{2}$, $t = 8$ „ $t' = 5$.
3. $a = 16\frac{2}{3}$, $b = 18\frac{3}{4}$, $c = 20$, $t = 3\frac{1}{2}$ „ $t' = 2\frac{1}{2}$.

57. a) Zwei Radfahrer, von denen der erste eine Bahn in 45 und der zweite in 48 Sekunden zurücklegte, fuhren gleichzeitig in derselben Richtung ab. Wie lang ist die Bahn, wenn der erste den zweiten bei einer Vorgabe von

1. 70 m in 13 Minuten zum ersten Male überrundete?
2. 200 „ „ 27 „ „ zweiten „ „ ?
3. 250 „ „ 40 „ „ dritten „ „ ?

b) Ein Behälter kann durch eine von zwei Röhren in a Minuten

gefüllt und durch die andere in b Minuten entleert werden. Wie viel l faßt der Behälter, wenn er bereits d l enthielt und t Minuten nach Öffnung der beiden Röhren überfloß?

Beispiele. 1. $a = 28$, $b = 35$, $d = 413$ und $t = 81$.
2. $a = 41$, $b = 52$, $d = 406$ „ $t = 120$.
3. $a = 37$, $b = 33$, $d = 781$ „ $t = 110$.

58. a) Von zwei Radfahrern, von denen der erste in a und der zweite in b Sekunden eine Bahn zurücklegte, erhielt der zweite einen Vorsprung von d m und durfte außerdem die Fahrt t Sekunden vor dem ersten beginnen. Wie lang ist die Bahn, wenn der erste Radfahrer den zweiten nach t' Minuten zum ersten Male überrundete?

Beispiele. 1. $a = 45$, $b = 60$, $d = 44$, $t = 3$ und $t' = 3\frac{1}{3}$.
2. $a = 50$, $b = 60$, $d = 70$, $t = 5$ „ $t' = 6$.
3. $a = 52$, $b = 60$, $d = 42$, $t = 6$ „ $t' = 7\frac{1}{2}$.

b) Ein Behälter kann durch eine von zwei Röhren in a Minuten gefüllt und durch die andere in b Minuten entleert werden. In dem Behälter befanden sich d l Wasser, als die erste Röhre geöffnet wurde. Wie viel l faßt der Behälter, wenn die zweite Röhre t Minuten nach der ersten geöffnet wurde und der Behälter nach weiteren t' Minuten überfloß?

Beispiele. 1. $a = 75$, $b = 80$, $d = 653$, $t = 30$ und $t' = 67$.
2. $a = 48$, $b = 54$, $d = 239$, $t = 20$ „ $t' = 13$.
3. $a = 43$, $b = 47$, $d = 457$, $t = 16$ „ $t' = 203$.

c) Ein Behälter, der durch zwei Röhren in a, bez. b Minuten gefüllt und durch eine dritte Röhre in c Minuten entleert werden kann, enthielt bereits d l Wasser, als die erste Röhre geöffnet wurde. Welchen Rauminhalt besitzt der Behälter, wenn die zweite Röhre t Minuten nach der ersten und die dritte t' Minuten nach der zweiten geöffnet wurde und der Behälter nach weiteren t'' Minuten überfloß?

Beispiele. 1. $a=48$, $b=60$, $c=36$, $d=509$, $t=4$, $t'=3$, u. $t''=10$.
2. $a=42$, $b=54$, $c=60$, $d=14$, $t=11$, $t'=6$ „ $t''=18$.
3. $a=42$, $b=56$, $c=63$, $d=6$, $t=7$, $t'=5$ „ $t''=24$.

59. a) Um eine Arbeit auszuführen, braucht der erste von zwei Arbeitern $1\frac{1}{2}$ mal so viel Zeit wie der zweite. Wie viel Stunden braucht der erste, wenn beide zusammen die Arbeit in 9 Stunden verrichten?

b) Der Vorrat an Lebensmitteln in einer belagerten Stadt würde für die eingeschlossene Infanterie $1\frac{1}{4}$ mal so lange ausreichen wie für die übrigen Truppen. Wie viel Tage wäre die Infanterie allein mit dem Vorrat ausgekommen, wenn er in 20 Tagen von der ganzen Besatzung aufgezehrt wird?

c) Von drei Röhren braucht die erste a Minuten mehr als die zweite und diese b Minuten weniger als die dritte, um einen Behälter zu füllen. Wie viel Minuten braucht die erste Röhre, wenn sie in derselben Zeit halb soviel Wasser liefert wie die beiden anderen zusammen?

Beispiele. 1. $a = 3$, $b = 9$. 2. $a = 5$, $b = 14$. 3. $a = 7$, $b = 16$.

60. a) Ein Vater ist jetzt doppelt so alt wie sein ältester Sohn und wäre 4 mal so alt wie sein jüngster Sohn, wenn dieser ein Jahr jünger wäre. Vor $10\frac{2}{3}$ Jahren war der Vater gerade doppelt so alt wie diese beiden Söhne zusammen. Wie alt ist jetzt der Vater?

b) Ein Vater ist jetzt 47 Jahre und seine drei Söhne sind zusammen 38 Jahre alt. Wann betrug das Alter der Söhne zusammen 5 Jahre mehr als $\frac{3}{5}$ von dem Alter des Vaters?

c) In einer Familie sind die Eltern jetzt gerade doppelt so alt wie ihre 5 Kinder, und nach $4\frac{1}{2}$ Jahren wird das Alter der Eltern nur noch 5 Jahre mehr als $\frac{4}{5}$ von dem Alter ihrer Kinder betragen. Wie alt ist jetzt der Vater, wenn er $1\frac{1}{6}$ mal so alt ist wie seine Frau?

d) Vater, Sohn und ein Enkel in einer Familie sind zusammen 101 Jahre alt und vor 2 Jahren fehlte dem Vater nur 1 Jahr, um doppelt so alt zu sein wie sein Sohn und Enkel zusammen. Wie alt ist jetzt der Vater, wenn sein Sohn 8 mal so alt ist wie sein Enkel?

61. a) Um wie viel muß man die Zahlen 12, 18, 21 und 30 vermehren, damit eine Proportion entsteht?

b) Um wie viel muß man die Zahlen 31, 37, 39 und 47 vermindern, damit eine Proportion entsteht?

c) Um wie viel muß man die Zahlen 33 und 39 vermindern und gleichzeitig die Zahlen 23 und 31 vermehren, damit eine Proportion entsteht?

62. a) Eine zweistellige Zahl, deren erste Ziffer 4 kleiner ist als die zweite, ist 6 mal so groß wie ihre letzte Ziffer. Wie heißt die Zahl?

b) Eine zweistellige Zahl würde das 5fache ihrer letzten Ziffer betragen, wenn sie 4 kleiner wäre. Wie heißt die Zahl, wenn ihre letzte Ziffer das Doppelte ihrer ersten Ziffer um 1 übersteigt?

c) Bei einer zweistelligen Zahl ist die erste Ziffer 2 größer als die zweite. Vergrößert man die erste Ziffer um 2 und die andere um 1, so wächst die Zahl auf ihr $1\frac{1}{3}$faches an. Wie heißt die Zahl?

d) Vermehrt man eine zweistellige Zahl um 17, so erhält man das 12fache ihrer ersten Ziffer. Wie heißt die Zahl, wenn ihre Ziffern sich um 8 unterscheiden (!)?

63. a) Welche Ziffer muß an die Zahlen 3, 6, 10 und 19 angehängt werden, damit eine Proportion entsteht?

b) Welche Ziffer muß an die Zahlen 3, 6, 9 und 17 angehängt werden, damit eine Proportion entsteht?

c) Welche Ziffer muß bei den Zahlen 26, 47 und 73 zwischen die beiden Ziffern gesetzt werden, damit die Summe aus der ersten und zweiten Zahl gleich der dritten wird?

d) Welche Ziffer muß bei den Zahlen 65, 37 und 28 zwischen die beiden Ziffern gesetzt werden, damit die Differenz aus der ersten und zweiten Zahl gleich der dritten wird?

64. a) Stellt man die Ziffern einer zweistelligen Zahl mit der Quersumme a um, so nimmt die Zahl um b zu. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a = 9$, $b = 45$. 2. $a = 14$, $b = 18$.
3. $a = 10$, $b = -36$. 4. $a = 13$, $b = -27$.

b) Stellt man die Ziffern einer zweistelligen Zahl mit der Quersumme a um, so erhält man das $b$fache der Zahl. Wie heißt ihre erste Ziffer?

Beispiele. 1. $a=9$, $b=\frac{3}{8}$. 2. $a=12$, $b=\frac{7}{4}$. 3. $a=7$, $b=2{,}08$.

c) Vermehrt man die erste Ziffer einer zweistelligen Zahl mit der Quersumme a um b und vermindert die zweite um c, so entsteht das $d$fache der Zahl. Wie heißt ihre erste Ziffer?

Beispiele. 1. $a = 12$, $b = 3$, $c = 6$ und $d = 1\frac{1}{2}$.
2. $a = 10$, $b = 4$, $c = 5$ „ $d = 2\frac{1}{4}$.
3. $a = 11$, $b = 3$, $c = 4$ „ $d = 1{,}4$.

65. a) Die erste Ziffer einer dreistelligen Zahl heißt 6. Streicht man diese Ziffer links weg und setzt sie rechts an, so wird die Zahl um 369 kleiner. Wie heißt die Zahl?

b) Die letzte Ziffer einer vierstelligen Zahl heißt 4. Streicht man diese Ziffer rechts weg und setzt sie links an, so wird die Zahl um 180 größer. Wie heißt die Zahl?

c) Eine fünfstellige Zahl beginnt mit der Zahl 50. Nimmt man diese Zahl vorn weg und setzt sie an das Ende, so wächst die Zahl um 14400. Wie heißt die ganze Zahl?

d) Von den beiden zweistelligen Zahlen, aus denen sich eine vierstellige Zahl zusammensetzt, ist die erste gleich dem $1\frac{1}{2}$fachen der zweiten. Stellt man die beiden Zahlen um, so wird die ganze Zahl um 1782 kleiner. Wie heißt die ganze Zahl?

e) Von den beiden zweistelligen Zahlen, aus denen sich eine vierstellige Zahl zusammensetzt, ist die erste gleich einem Drittel der zweiten. Stellt man die beiden Zahlen um, nachdem man die erste um 12 und die zweite um 1 vermehrt hat, so erhält man das 3fache der ursprünglichen Zahl. Wie heißt diese?

66. a) Ein Brett aus Tannenholz mit dem spez. Gewicht 0,48 kann in Wasser von 4° gerade 26 kg tragen, ohne unterzusinken. Wie groß ist das Gewicht des Brettes?

b) Zwei gleichschwere Balken aus Tannenholz (s. Aufg. a), die

durch Querstücke mit einem Gesamtgewicht von 10 kg fest mit einander verbunden sind, können in Wasser von 4° gerade $292\frac{1}{2}$ kg tragen, ohne unterzusinken. Wie viel kg wiegt jeder Balken?

c) Eine Holzplatte ist 10 cm dick, 70 cm breit und 3,40 m lang. Wie groß ist das spez. Gewicht des Holzes, wenn die Platte bei einer Belastung durch 47,6 kg 8 cm tief in Wasser von 4° einsinkt?

67. a) Eine Batterie mit einer Spannung (elektromotorischen Kraft) von 16 Volt liefert eine Stromstärke von 4 Amp. Welcher Widerstand muß eingeschaltet werden, damit die Stromstärke auf $2\frac{2}{3}$ Amp. sinkt?

b) Wie groß ist die Stromstärke einer Batterie mit einer Spannung von 8 Volt, wenn sie durch Einschaltung eines Widerstandes von 4 Ohm auf $1\frac{1}{3}$ Amp. sinkt?

c) Eine Batterie mit einer Spannung von 24 Volt zeigte eine Stromstärke von 4 Amp. Als jedoch aus dem Stromkreise 50 m Messingdraht mit einem Querschnitt von 1,2 qmm ausgeschieden worden waren, stieg die Stromstärke auf 6 Amp. Wie groß war der spez. Widerstand des Messings?

d) Wie viel m Neusilberdraht mit dem Querschnitt $q = 0{,}8$ qmm und dem spez. Widerstand $k = 0{,}2$ mußten aus einem Stromkreise ausgeschaltet werden, um die Stromstärke auf $a_2 = 3$ Amp. zu bringen, wenn die Batterie eine Spannung von $e = 9$ Volt besitzt und ursprüng- $a_1 = 2$ Amp. lieferte?

c. Verteilungsaufgaben.

68. a) Unter drei Personen A, B und C wird eine Summe so verteilt, daß A 50 ℳ weniger als $\frac{1}{3}$, B 200 ℳ mehr als $\frac{1}{4}$ und C 350 ℳ mehr als $\frac{1}{6}$ derselben erhält. Wie groß ist die Summe?

b) Unter drei Personen A, B und C wird eine Summe so verteilt, daß A 120 ℳ weniger als die Hälfte, B 150 ℳ weniger als $\frac{2}{3}$ und C 30 ℳ mehr als $\frac{1}{3}$ derselben erhält. Wie groß ist die Summe?

c) Jemand vermachte von seinem Vermögen seiner Frau 2000 ℳ weniger als die Hälfte, seinem Sohne 5000 ℳ weniger als ein Drittel, seiner Tochter 1000 ℳ mehr als ein Viertel und den Armen den Rest von 2000 ℳ. Wie groß war sein Vermögen?

69. a) 285 ℳ sollen an drei Personen A, B und C so verteilt werden, daß A doppelt so viel wie B und dieser ebenso oft 5 ℳ als C 4 ℳ erhält. Wie viel ℳ bekommt A?

b) 1230 ℳ sollen an vier Personen A, B, C und D so verteilt werden, daß A doppelt so viel und B dreimal soviel wie C und dieser ebenso oft 6 ℳ wie D 5 ℳ erhält. Wie viel ℳ bekommt A?

c) 98 Nüsse sollen an drei Knaben in folgender Weise verteilt werden: Der erste soll ebenso oft 7 wie der zweite 5 Nüsse erhalten,

und der Anteil des dritten soll 10 Nüsse weniger betragen als die Hälfte der Nüsse, die A und B zusammen bekommen. Wie viel Nüsse erhält der erste Knabe?

70. a) Zwei junge Kaufleute hatten einen Lotteriegewinn von 100 000 ℳ nach dem Verhältnis ihrer Beiträge zum Preis des Looses unter sich verteilt und mit ihren Gewinnen Geschäfte gegründet. Obschon in den drei ersten Geschäftsjahren der Verdienst des A im ganzen 25% und der des B nur 20% betrug, hatte B doch 2000 ℳ mehr verdient als A. Wie groß war der Gewinnanteil des A?

b) Zwei Freunde hatten zusammen 700 ℳ auf eine Reise mitgenommen. Nach 20 Tagen hatte der erste $66\frac{2}{3}$% und der zweite 70% seiner Barschaft verbraucht. Wie viel ℳ hatte der erste im Durchschnitt täglich ausgegeben, wenn ihre Barschaften zusammen nur noch 220 ℳ betrugen?

c) Zwei Fabrikanten A und B hatten eine Fabrik für 375 000 ℳ übernommen. Während des ersten Jahres, in dem sie 10% verdienten, verbrauchte A $37\frac{1}{2}$% und B, der unverheiratet war, nur 24% seines Gewinnantheils. Wie groß war die Einlage des A, wenn B von seinem Gewinn 800 ℳ mehr übrig behielt als A?

71. a) Bei einem Geschäft standen die Einlagen zweier Personen A und B in dem Verhältnis 9 : 8. Da aber A dem B, der das Geschäft leitete, für seine Mühe 1600 ℳ von seinem Gewinn überließ, so standen ihre Gewinnanteile in dem Verhältnis 7 : 10. Wie viel ℳ betrug nun noch der Gewinn des A?

b) Bei einem Konkurs verhielten sich die Forderungen zweier Gläubiger A und B wie 3 : 4. Nachdem A auf 100 ℳ und B auf 300 ℳ zu Gunsten des Schuldners verzichtet hatte, verhielten sich ihre Anteile an der Masse wie 4 : 5. Wie viel ℳ bekam A?

c) Die Einlagen zweier Kaufleute A und B bei einem gemeinschaftlichen Geschäft verhielten sich wie 5 : 6. Im Laufe eines Geschäftsjahres verbrauchte jeder von ihnen für seine Haushaltung 8000 ℳ. Wie viel ℳ hatte A eingelegt, wenn die Gewinnüberschüsse der beiden Teilhaber sich wie 3 : 4 verhielten und in dem Geschäftsjahr 10% verdient wurden?

d) An einem Konkurs waren zwei Fabrikanten mit Forderungen beteiligt, die sich wie 2 : 3 verhielten. Nachdem jeder von ihnen an seinen Vertreter 200 ℳ Entschädigung bezahlt hatte, verhielten sich die von ihren geretteten Beträge wie 15 : 23. Wie groß war die Forderung des ersten, wenn 8% der Forderungen zur Auszahlung kamen?

72. a) Unter 3 Personen A, B und C wurden 185 ℳ so verteilt, daß der Anteil des A 10 ℳ mehr als $\frac{2}{3}$ des Anteils von B betrug und die Anteile des B und C sich wie 4 : 5 verhielten. Wie viel ℳ erhielt A?

b) Unter drei Personen A, B und C wurden 336 ℳ so verteilt, daß der Anteil des A 6 ℳ größer war als $\frac{5}{4}$ des Anteils, den B erhielt, während der Anteil des C zu dem des A sich wie 3 : 2 verhalten hätte, wenn er 9 ℳ größer gewesen wäre. Wie viel ℳ erhielt A?

c) Jemand hinterließ ein Vermögen von 159 000 ℳ mit der Bestimmung, daß seine Frau 18 000 ℳ mehr als die Hälfte und jede seiner drei Töchter 12 000 ℳ mehr als ein Drittel der Summe erhalten sollte, die er für jeden seiner beiden Söhne bestimmt hatte. Wie viel ℳ erhielt jeder der Söhne?

d) An einem Unternehmen, zu dem 3800 ℳ erforderlich waren, beteiligte sich A mit einer Einlage, die 200 ℳ mehr als $\frac{2}{5}$ der Einlage des B und 200 ℳ weniger als $\frac{3}{4}$ der Einlage des C betrug. Wie groß war sein Gewinn, wenn bei dem Geschäft 24% verdient wurden?

73. a) Jemand gab auf einer Reise in der ersten Woche 60 ℳ weniger als $\frac{1}{3}$ seiner Barschaft, in der zweiten Woche 30 ℳ mehr als $\frac{1}{4}$ des Restes und in der dritten Woche 20 ℳ weniger als $\frac{2}{5}$ des nunmehrigen Restes aus. Wie groß war seine Barschaft, wenn er beim Beginn der vierten Woche noch 209 ℳ besaß?

b) Ein Kaufmann erübrigte von seinem Verdienst im ersten Jahre 2000 ℳ mehr als $\frac{1}{8}$ seines Vermögens und setzte im zweiten Jahre 400 ℳ mehr als $\frac{1}{20}$ seines vermehrten Besitzes zu. Im dritten Jahre erübrigte er wiederum 1500 ℳ weniger als $\frac{1}{6}$ des Restes und brachte dadurch sein Vermögen auf 100 000 ℳ. Wie viel ℳ besaß er beim Beginn des ersten Jahres?

c) Jemand vermachte seiner Frau 6000 ℳ mehr als $\frac{1}{3}$ seines Vermögens, jedem seiner beiden Söhne 2000 ℳ weniger als $\frac{1}{8}$ des Restes, seiner Tochter 25 000 ℳ mehr als die Hälfte des nunmehrigen Restes und den Armen seiner Vaterstadt 26 000 ℳ. Wie groß war sein Vermögen?

d. Prozentrechnung.

α. Zinsrechnung.

74. a) Wenn Jemand $\frac{2}{5}$ seines Vermögens zu $3\frac{1}{2}$%, $\frac{1}{3}$ zu 4% und den Rest zu $4\frac{1}{4}$% angelegt hat und jährlich 4640 ℳ Zinsen einnimmt, wie groß ist dann sein Vermögen?

b) Jemand hat $\frac{1}{3}$ seines Vermögens zu $3\frac{3}{4}$%, $\frac{1}{4}$ zu 4%, $\frac{1}{6}$ zu $4\frac{1}{4}$%, $\frac{1}{24}$ zu 6% und den Rest zu $4\frac{1}{2}$% angelegt und bezieht jährlich 4975 ℳ Zinsen. Wie groß ist sein Vermögen?

c) Wie groß ist ein Kapital, wenn $\frac{1}{3}$ desselben zu $4\frac{1}{4}$% 4 Jahre, $\frac{1}{4}$ zu 4% $3\frac{1}{2}$ Jahre und der Rest zu $4\frac{1}{2}$% $4\frac{1}{5}$ Jahre lang ausgeliehen war und die Zinsen zusammen 2075 ℳ betrugen?

d) Jemand hat von seinem Vermögen den dritten Teil zu 4%, den vierten Teil zu $3\frac{1}{2}$% und den sechsten Teil zu $4\frac{1}{2}$% angelegt. Mit dem Reste spielte er in einem Jahre an der Börse so glücklich, daß er 25% verdiente. Nach Abzug seiner Haushaltungskosten, die 32 615 ℳ betrugen, vermehrte er in diesem Jahre sein Vermögen um 50 260 ℳ. Wie groß war sein Vermögen vorher?

e) Jemand hat $\frac{1}{3}$ seines Vermögens zu 4%, $\frac{1}{4}$ zu $3\frac{1}{2}$% und $\frac{1}{6}$ zu $4\frac{1}{2}$% angelegt und spielte mit dem Reste an der Börse. Nachdem er hier zwei Jahre lang unglücklich gespielt und im Jahre durchschnittlich 30% verloren hatte, war sein Vermögen nach Abzug von 15 375 ℳ jährlicher Haushaltungskosten um 112 500 ℳ gesunken. Wie groß war ursprünglich sein Vermögen?

f) Ein Kaufmann hatte von seinen Ersparnissen die Hälfte zu $3\frac{1}{2}$%, ein Drittel zu 4% und den Rest zu $4\frac{1}{4}$% ausgeliehen. Durch Hinzufügung der (einfachen) Zinsen wuchsen seine Ersparnisse in 6 Jahren auf 22 095 ℳ an. Wie groß waren seine Ersparnisse vor dieser Zeit?

75. a) Jemand hat zwei Kapitalien, von denen das erste 5000 ℳ größer ist als das zweite, auszuleihen. Leiht er das erste zu $4\frac{1}{2}$% und das zweite zu $3\frac{3}{4}$% aus, so erhält er jährlich 25 ℳ Zinsen weniger, als wenn er das erste zu 4% und das zweite zu $4\frac{1}{8}$% ausleiht. Wie groß ist das erste Kapital?

b) Jemand lieh sich zur Begründung eines Geschäftes 12 000 ℳ, von denen er einen Teil mit 5% und den anderen mit $5\frac{1}{2}$% verzinsen muß. Da das Geschäft ihm im ersten Jahre schon 22% Verdienst abwarf, so blieben ihm nach Abzug der Zinsen noch 2005 ℳ übrig. Wie groß ist das mit 5% zu verzinsende Kapital?

c) Jemand hatte den einen Teil seines Kapitals zu $3\frac{1}{2}$% und den anderen, der 16 000 ℳ größer war als der erste, zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen. Wie groß war sein Kapital, wenn dasselbe auf diese Weise $4\frac{1}{4}$% Zinsen brachte?

d) Von drei Kapitalien war das erste zu $3\frac{1}{2}$%, das zweite zu 4% und das dritte zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen. Das erste war 600 ℳ kleiner als das zweite und dieses 6800 ℳ kleiner als das dritte. Wie groß war das erste, wenn die drei Kapitalien sich (durchschnittlich) mit $4\frac{1}{8}$% verzinsten?

e) Zwei Kapitalien, von denen das erste 540 ℳ kleiner ist als das zweite, bringen gleich viel Zinsen, wenn das erste $3\frac{3}{4}$ Jahre lang zu 5% und das andere $2\frac{1}{4}$ Jahre lang zu $5\frac{1}{3}$% ausgeliehen ist. Wie groß ist das erste Kapital?

f) Jemand hatte zwei Kapitalien, von denen das erste 300 ℳ größer war als das zweite, $3\frac{1}{2}$ Jahre lang zu 4%, bez. 4 Jahre lang

zu $4\frac{1}{4}\,\%$ ausgeliehen. Wie groß war das erste Kapital, wenn beide auf dieselbe Summe angewachsen waren?

76. a) Von zwei Hypotheken, von denen die erste 30000 ℳ größer ist als die zweite, ist die erste zu $3\frac{3}{4}\,\%$ und die zweite zu $4\frac{1}{5}\,\%$ aufgenommen. Wie groß ist die erste, wenn beide zusammen mit 6690 ℳ zu verzinsen sind?

b) Auf einem Hause stehen zwei Hypotheken, welche zusammen 15000 ℳ betragen. Die erste von ihnen ist zu 4% und die zweite zu $4\frac{3}{4}\,\%$ aufgenommen. Wie groß ist die erste Hypothek, wenn beide zusammen mit 645 ℳ zu verzinsen sind?

c) Auf einem Hause stehen drei Hypotheken, von denen die erste mit $3\frac{3}{4}\,\%$, die zweite mit 4% und die dritte mit $4\frac{3}{4}\,\%$ zu verzinsen ist. Die dritte Hypothek ist halb so groß wie die zweite und die erste ist 30000 ℳ größer als die beiden anderen zusammen. Wie groß ist die dritte Hypothek, wenn alle drei mit 5925 ℳ zu verzinsen sind?

77. a) Zu wie viel % sind 13500 ℳ ausgeliehen, wenn sie in 7 Jahren ebenso viel Zinsen bringen wie 9100 ℳ in 9 Jahren bei einem um $\frac{2}{5}$ höheren Zinsfuß?

b) Zu wie viel % sind 4900 ℳ angelegt, wenn sie in $5\frac{1}{2}$ Jahren ebenso viel Zinsen bringen wie 7700 ℳ in $4\frac{1}{2}$ Jahren zu einem um 1 kleineren Zinsfuß?

c) Ein Kapital von 5000 ℳ ist in 6 Jahren auf 1150 ℳ mehr angewachsen, als 4000 in 5 Jahren, obschon diese um 1% höher angelegt waren. Wie groß war der Prozentsatz bei dem ersten Kapital?

d) In einem Geschäft sind 7920 ℳ so angelegt, daß der Zinsfuß jährlich um $\frac{1}{4}\,\%$ zunimmt. Wie groß ist der Zinsfuß des ersten Jahres, wenn das Kapital bis zum Ende des vierten Jahres 1386 ℳ Zinsen gebracht hatte?

e) Jemand hatte drei Kapitalien im Betrage von 7500, 9000 und 3750 ℳ so ausgeliehen, daß das zweite $\frac{2}{5}\,\%$ mehr und das dritte $\frac{1}{4}\,\%$ weniger eintrug als das erste, und dadurch eine durchschnittliche Verzinsung seines Geldes zu $4\frac{1}{4}\,\%$ erzielt. Zu wie viel % war das erste Kapital ausgeliehen?

f) In einem Geschäft waren 5400 ℳ auf 5 Jahre so angelegt, daß der Zinsfuß jährlich um $\frac{1}{5}\,\%$ wuchs. Wie viel % waren für das erste Jahr angesetzt, wenn das Kapital nach Ablauf der Zeit mit 6660 ℳ zurückgezahlt wurde?

78. a) Ein Kapital von 2260 ℳ war anfänglich zu 5% ausgeliehen worden. Nach einiger Zeit mußte der Zinsfuß auf 4% und bald darauf auf $3\frac{3}{4}\,\%$ herabgesetzt worden. Wie lange war das Kapital ausgeliehen, wenn es 2519,9 ℳ Zinsen brachte, der erste Zeitabschnitt $\frac{2}{3}$ und der zweite $\frac{1}{4}$ der ganzen Zeit betrug?

b) Wie lange müssen 17500 ℳ zu 4 % stehen, um 1155 ℳ Zinsen weniger zu bringen als 14000 ℳ, die zu $4\frac{1}{2}$ % $2\frac{1}{4}$ Jahre länger ausgeliehen sind?

c) Ein Kapital von 36720 ℳ, das zu $4\frac{1}{6}$ % ausgeliehen war, wurde gekündigt und zu 6 % wieder angelegt. Nachdem es an der zweiten Stelle $1\frac{1}{2}$ Jahre länger als an der ersten gestanden hatte, betrugen hier seine Zinsen 5661 ℳ mehr, als es an der ersten Stelle gebracht hatte. Wie lange stand das Kapital an der ersten Stelle?

d) Eine Hypothek von 22600 ℳ war zuerst mit 5 % zu verzinsen. Nach einer Reihe von Jahren wurde der Zinsfuß auf 4 % und nach weiteren 3 Jahren auf $3\frac{3}{4}$ % herabgesetzt. Zu diesem Zinsfuß stand die Hypothek noch 1 Jahr. Wie lange war sie mit 5 % zu verzinsen, wenn in der ganzen Zeit 12599,5 ℳ Zinsen bezahlt wurden?

e) Wie lange müssen bei $4\frac{1}{2}$ % die Zinsen von 8250 ℳ zu dem Kapital hinzugefügt werden, damit die Summe entsteht, auf welche 9350 ℳ bei 4 % in einer um 3 Jahre kürzeren Zeit anwachsen?

f) Jemand legte 9600 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ %, 1 Jahr später 7500 ℳ zu $4\frac{1}{5}$ % und weitere $1\frac{1}{2}$ Jahre später 6400 ℳ zu $4\frac{1}{4}$ % an. In wie viel Jahren nach dem Ausleihen des ersten Kapitals sind die drei Kapitalien zusammen auf 28619 ℳ angewachsen?

β. Gewinn- und Verlustrechnung.

79. a) Ein Weinhändler kaufte 120 hl Rheinwein und 150 hl Moselwein zu Preisen für 1 hl, die sich wie 5 : 3 verhielten. Beim Verkaufe verdiente er an dem Rheinwein 25 % und an dem Moselwein 20 %. Wie viel ℳ hatte er für 1 hl Rheinwein bezahlt, wenn er

1) im ganzen 12000 ℳ verdiente?

2) am Rheinwein 1800 ℳ mehr als am Moselwein verdiente?

b) Ein Kaufmann bezog 400 Flaschen roten und 150 Flaschen weißen Bordeaux und bezahlte im ganzen 240 ℳ Zoll. Wie hoch war der Zoll auf 100 Flaschen roten Bordeaux, wenn er $22\frac{1}{2}$ ℳ weniger betrug als der Zoll auf 100 Flaschen des weißen Weins?

c) Ein Kaufmann hatte sich aus Bozen (Tirol) 120 Flaschen Rotwein, 1 Flasche zu 85 ₰, und 175 Flaschen Weißwein, 1 Flasche zu 1,20 ℳ, schicken lassen und bei dem Weißwein für die Flasche 14 ₰ Zoll mehr als bei dem Rotwein bezahlt. Beim Öffnen der Kisten fand er, daß 10 unverzollt gebliebene Flaschen zuviel eingepackt waren, die auf der Rechnung als Ersatz für etwaigen Bruch bezeichnet wurden. Er verkaufte dann die Flasche durchschnittlich für 1,35 ℳ und verdiente an der ganzen Sendung $12\frac{1}{2}$ %. Wie hoch war der Zoll auf eine Flasche Rotwein?

80. a) Ein Kaufmann hatte 50 kg Kaffee, 1 kg zu 2,40 ℳ, 24 kg Thee, 1 kg zu 6,50, und 75 kg Zucker, 1 kg zu 60 ₰, eingekauft. Beim

Verkaufe verdiente er am Thee $5\frac{1}{2}\%$ und am Zucker $3\frac{1}{2}\%$ mehr als am Kaffee. Wie viel % betrug sein Gewinn am Kaffee, wenn er

1) im ganzen 55,50 ℳ verdiente?

2) im ganzen 371,28 ℳ einnahm?

b) Ein Kaufmann hatte drei Posten Ware, den ersten zu 245 ℳ, den zweiten zu 439 ℳ und den dritten zu 316 ℳ eingekauft. Beim Verkaufe verdiente er am zweiten Posten 8% mehr und am dritten $4\frac{1}{2}\%$ weniger als am ersten. Wie viel % betrug sein Gewinn am ersten Posten, wenn er im Durchschnitt 14,09% verdiente?

c) Ein Kaufmann hatte für 50 ℳ Wurst, für 24 ℳ Käse und für 26 ℳ Bier eingekauft. Beim Verkaufe verdiente er am Käse 10% und am Bier 5% mehr als er an der Wurst, die nicht gut ausgefallen war, verlor. Wie viel % verdiente er am Bier, wenn er an der ganzen Ware noch 3,7% gewann?

81. a) Eine Dame vermachte der ersten von zwei Nichten 19870 ℳ. Wie viel ℳ mußte sie der zweiten vermachen, um sie der ersten gleichzustellen, wenn die erste 4‰ und die zweite, die der Dame nicht gleichnahe verwandt war, $6\frac{1}{2}$‰ Erbschaftssteuer zu entrichten hatte?

b) Zwei Vettern erbten zusammen 22500 ℳ. Nach Abzug der Erbschaftssteuer, die für den ersten $1\frac{1}{2}$‰ und für den zweiten $3\frac{2}{3}$‰ betrug, war der Anteil des ersten 7505 ℳ größer als der des zweiten. Wie groß sollte die Erbschaft des ersten sein?

c) Von zwei Vettern, von denen dem ersten 16000 ℳ und dem zweiten 20000 ℳ vermacht worden waren, hatte der erste 12 ℳ Erbschaftssteuer mehr zu bezahlen als der zweite, da bei ihm $1\frac{1}{2}$‰ mehr als bei dem zweiten berechnet wurden. Wie viel ‰ betrug die Erbschaftssteuer bei den ersten?

d) Jemand hatte dem ersten von zwei Neffen 24400 ℳ und dem zweiten, der 3‰ Erbschaftssteuer mehr zu bezahlen hatte als der erste, 24450 vermacht, um ihn dem ersten gleichzustellen. Wie viel ‰ Erbschaftssteuer wurden bei dem ersten berechnet, wenn er nach Abzug der Steuer doch noch 23,6 ℳ mehr erbte als der andere?

82. a) Ein Kaufmann bezog aus Italien 500 kg Weintrauben, von denen sich 25 kg als unverkäuflich herausstellten. Wie viel ℳ hatte er einschließlich der Versandkosten für 1 kg bezahlt, wenn er, um $26\frac{2}{3}\%$ zu verdienen, 1 kg für 0,80 ℳ verkaufen mußte?

b) Ein Kaufmann hatte ein Faß Wein von 150 l bezogen und davon beim Abfüllen einem Freunde 40 l für 47,50 ℳ überlassen. Von dem Reste verkaufte er das Liter für 1,45 ℳ. Wie viel ℳ hatte er einschließlich der Versandkosten für 1 l bezahlt, wenn er an dem Wein 15% verdiente?

c) Ein Kaufmann hatte einen Posten Thee von 250 kg, 1 kg für 6 ℳ, bezogen und davon einem Krämer 25 kg abgelassen. Von

dem Reste verkaufte er das kg für 8,60 ℳ. Wie viel ℳ hat er dem Krämer für 1 kg berechnet, wenn er an dem ganzen Posten 40% verdiente?

83. a) Ein Kaufmann hatte 360 Hasen, das Stück zu 3 ℳ, gekauft und davon schon eine Anzahl zu 3,35 ℳ verkauft, als starker Frost eintrat und ihn veranlaßte, den Preis auf 3,50 ℳ zu erhöhen. Wie viel Hasen verkaufte er zu 3,35 ℳ, wenn er an dem ganzen Posten $14\frac{4}{9}$% verdiente?

b) Ein Kaufmann erhielt eine Sendung Butter, von der er 1 kg mit 1,80 ℳ bezahlte. Er verkaufte davon am ersten Tage 40 kg, 1 kg zu 2,45 ℳ, am zweiten Tage 25 kg, 1 kg zu 2,20 ℳ, und am dritten Tage den Rest, 1 kg zu 1,80 ℳ. Wie viel kg enthielt die Sendung, wenn der Kaufmann daran 25% verdiente?

c) Ein Kaufmann hatte 6 Sack Kaffee, 1 kg zu 2,10 ℳ, gekauft und davon erst 18 kg, 1 kg zu 2,50 ℳ, verkauft, als durch den Ausbruch eines Krieges der Kaffee bedeutend im Preise stieg. Wie viel kg enthielt jeder der gleichschweren Säcke, wenn der Kaufmann nun das kg für 3 ℳ verkaufte und an dem ganzen Posten 40% verdiente?

γ. Rabatt- und Diskontrechnung.

84. a) Ein Kaufmann kaufte Kaffee und Zucker, zusammen für 2500 ℳ Beim Kaffee wurden ihm 8% und beim Zucker 10% Rabatt bewilligt. Wie viel ℳ sollte der Kaffee kosten, wenn er im Ganzen 214 ℳ Rabatt erhielt?

b) Zwei Posten Ware sollten zusammen 1200 ℳ kosten. Es wurden ihm jedoch bei dem ersten $6\frac{2}{3}$% und bei dem zweiten $8\frac{1}{3}$% Rabatt bewilligt. Wie teuer sollte der erste Posten sein, wenn bei ihm der Rabatt 20,10 ℳ weniger betrug als bei dem zweiten?

85. a) Zwei Posten Ware sollten zusammen 2210 ℳ kosten. Da aber bei dem ersten 5% und bei dem zweiten 8% Rabatt bewilligt wurden, so betrug die Barzahlung nur 2062 ℳ. Wie teuer sollte der erste Posten sein?

b) Zwei Posten Ware, die zusammen 3350 ℳ kosten sollten, wurden mit 3137 ℳ bar bezahlt. Was sollte der erste Posten kosten, wenn bei ihm $4\frac{1}{3}$% und bei dem zweiten 8% Rabatt berechnet wurden?

c) Jemand kaufte 28 Flaschen Rheinwein und 23 Flaschen Rotwein, die zusammen 125 ℳ kosten sollten. Da ihm aber beim Rheinwein $4\frac{1}{2}$% und beim Rotwein 7% Rabatt bewilligt wurden, so hatte er nur 117,65 ℳ zu bezahlen. Was sollte eine Flasche Rheinwein kosten?

d) Ein Krämer kaufte bei einem Kaufmann 16 kg Thee und 58 kg Kaffee, im ganzen für 257 ℳ, und erhielt bei dem Thee 15% und bei dem Kaffee 12% Rabatt. Was sollte 1 kg Thee kosten, wenn

der Krämer für den Thee 32,40 ℳ weniger bezahlte als für den Kaffee?

86. a) Ein Gastwirt bestellte für 800 ℳ Weißwein und für 600 ℳ Rotwein. Da er bar bezahlte, wurde ihm Rabatt bewilligt und zwar beim Weißwein 2% weniger als beim Rotwein. Wie viel % Rabatt erhielt er beim Weißwein, wenn er für diesen 192 ℳ mehr bezahlte als für den Rotwein?

b) Ein Tuchfabrikant kaufte für 11200 ℳ einheimische und für 14500 ℳ australische Wolle. Bei der ersten wurden ihm 3% Rabatt mehr bewilligt als bei der zweiten. Wie viel % wurden bei der einheimischen Wolle berechnet, wenn der Fabrikant durch die Barzahlung 3420 ℳ ersparte?

87. a) Bei zwei Posten Ware, von denen der erste 1536 ℳ und der zweite 1506 ℳ kosten sollte, wurden gleichviel % Rabatt bewilligt. Wie viel % betrug der Rabatt, wenn für den ersten Posten 25 ℳ mehr bezahlt wurden als für den zweiten?

b) Zwei Posten Ware, die 3520 ℳ, bez. 3312 ℳ kosten sollten, wurden mit dem gleichen Preise bezahlt, da bei dem ersten Posten $5\frac{5}{12}$% Rabatt mehr bewilligt wurden als bei dem zweiten. Wie groß war der Rabatt bei dem ersten Posten?

c) Zwei Posten Ware, die 280 ℳ, bez. 345 ℳ kosten sollten, wurden zusammen mit 588,25 ℳ bar bezahlt. Wie viel % Rabatt wurden bei dem ersten Posten bewilligt, wenn bei dem zweiten $2\frac{1}{2}$% mehr berechnet wurden?

d) Zwei Posten Ware sollten 750, bez. 925 ℳ kosten. Da aber bei dem ersten Posten $3\frac{3}{8}$% Rabatt weniger bewilligt wurden als bei dem zweiten, so betrug der Preisunterschied 133,5 ℳ. Wie viel % Rabatt wurden bei dem ersten Posten bewilligt?

e) Zwei Posten Ware sollten 480 ℳ, bez. 625 ℳ kosten. Da aber bei der Barzahlung bei dem zweiten Posten 3% Rabatt mehr bewilligt wurden als bei dem ersten, so waren im ganzen nur 1031 ℳ zu bezahlen. Wie viel % Rabatt wurden bei dem ersten Posten bewilligt?

f) Jemand kaufte 12 Flaschen Rheinwein, 1 Flasche zu 1,80 ℳ, und 15 Flaschen Rotwein, 1 Flasche zu 2,40 ℳ. Bei dem Rheinwein wurden ihm 2% Rabatt weniger bewilligt als bei dem Rotwein. Wie viel % betrug der Rabatt bei dem Rheinwein, wenn im ganzen 51,12 ℳ zu bezahlen waren?

g) Ein Hotelbesitzer bestellte bei einem Weinhändler 80 Flaschen Rheinwein, 1 Flasche zu 2 ℳ, 60 Flaschen Moselwein, 1 Flasche zu 1,25 ℳ, 100 Flaschen Rotwein, 1 Flasche zu 2,40 ℳ, und 50 Flaschen Schaumwein, 1 Flasche zu 3,60 ℳ. Da ihm aber beim Rotwein 5% und beim Schaumwein 8% Rabatt mehr bewilligt wurden als beim Rhein-

und Moselwein, so betrug seine Rechnung nur 550 ℳ. Wie viel % Rabatt erhielt er beim Rheinwein?

88. a) Von zwei Wechseln, die zusammen 4200 ℳ betragen, ist der erste nach 5 und der zweite nach 8 Monaten fällig. Auf welche Summe lautet der erste Wechsel, wenn er bei der Diskontierung zu $4\frac{1}{2}$% 609 ℳ mehr einbringt als der andere?

b) Von zwei Wechseln, die sich um 3000 ℳ unterscheiden, ist der größere nach 75 Tagen und der andere nach 100 Tagen fällig. Auf welche Summe lautet der größere Wechsel, wenn beide unter Berechnung von 4% Diskont zusammen für 20 800 ℳ verkauft werden?

c) Zwei Wechsel, von denen der erste nach 4 Mon. 10 Tagen und der zweite nach 7 Mon. 15 Tagen fällig ist, bringen zusammen 2741,25 ℳ ein, wenn der erste mit $3\frac{3}{4}$% und der zweite mit $4\frac{1}{4}$% Diskont verkauft wird. Auf welchen Betrag lautet der erste Wechsel, wenn beide zusammen auf 2800 ℳ lauten?

d) Zwei Wechsel, von denen der erste nach 6 und der zweite nach 8 Monaten fällig ist, bringen zusammen 3220 ℳ ein, wenn der erste mit 4% und der andere mit $4\frac{1}{2}$% Diskont verkauft wird. Der Betrag des ersten ist 500 ℳ höher als der Betrag des zweiten Wechsels. Auf welche Summe lautet der erste?

e) Zwei Wechsel, von denen der größere noch 225 Tage und der kleinere noch 170 Tage zu laufen hat, unterscheiden sich um 200 ℳ. Wird der größere mit 4% und der kleinere mit $3\frac{3}{4}$% Diskont verkauft, so bringt der erste $177\frac{1}{2}$ ℳ mehr ein als der zweite. Auf welche Summe lautet der größere Wechsel?

89. a) Zwei Wechsel über 3600 ℳ, bez. 6200 ℳ, von denen der erste 3 Monate länger zu laufen hat als der zweite, werden mit $3\frac{3}{4}$% Diskont zusammen für $9582\frac{1}{2}$ ℳ verkauft. Nach wie viel Monaten war der erste fällig?

b) Zwei Wechsel über 3540 ℳ und 3570 ℳ wurden an demselben Tage, der erste mit $4\frac{1}{6}$ und der andere mit $5\frac{5}{9}$% Diskont für die gleiche Summe verkauft. Nach wie viel Tagen war der erste Wechsel fällig, wenn der zweite 36 Tage länger zu laufen hatte?

c) Von zwei Wechseln über 600 ℳ, bez. 480 ℳ, von denen der erste $1\frac{1}{2}$ Monat länger zu laufen hat als der zweite, bringt der erste bei der Diskontierung zu $4\frac{1}{2}$% 115,05 ℳ mehr ein als der zweite, wenn dieser mit $4\frac{3}{4}$% diskontiert wird. Nach welcher Zeit ist der erste Wechsel fällig?

90. a) Ein Kaufmann hatte drei Wechsel über 5000 ℳ, 6000 ℳ und 8000 ℳ ausgestellt. Eine größere Einnahme macht es ihm möglich, die Wechsel zusammen für 18 592 ℳ aufzukaufen, als der erste noch 3, der zweite noch $4\frac{1}{2}$ und der dritte noch $7\frac{1}{2}$ Monate zu laufen hatte. Wie viel % Diskont wurde bewilligt?

b) Jemand verkaufte zwei Wechsel über 2400 ℳ, bez. 3300 ℳ, von denen der erste nach 7 und der zweite nach 9 Monaten fällig ist, für 5432 ℳ. Wie viel % Diskont wurden bei dem ersten berechnet, wenn bei dem zweiten, weniger sicheren Wechsel 3% mehr in Anrechnung gebracht wurden?

c) Ein Bankier mußte drei Wechsel über 12000 ℳ, 24000 ℳ und 27600 ℳ, von denen der erste noch $5\frac{1}{2}$, der zweite noch 8 und der dritte noch $10\frac{2}{3}$ Monate zu laufen hatte, verkaufen. Bei dem ersten mußte er sich $1\frac{1}{2}$% und bei dem zweiten $\frac{1}{2}$% Diskont mehr gefallen lassen als bei dem dritten. Wie viel % Diskont wurden ihm bei dem dritten Wechsel berechnet, wenn er im Ganzen 60675,5 ℳ erhielt?

δ. Terminrechnung.

91. a) Ein Kaufmann hat nach 3 Monaten 800 ℳ und nach weiteren 5 Monaten 1200 ℳ zu zahlen. Wann kann er auf einmal seinen Verpflichtungen nachkommen?

b) Ein Kaufmann hat nach 5 Monaten für Thee 840 ℳ, nach 7 Monaten für Kaffee 960 ℳ und nach 11 Monaten für Fleischware 1160 ℳ an seinen Lieferanten zu bezahlen. Wann kann er seine ganze Schuld auf einmal abtragen?

c) Jemand hat nach 5 Monaten 1123,5 ℳ, nach 7 Monaten 1697,5 ℳ und nach 13 Monaten 3570 ℳ zu bezahlen. Nach wie viel Monaten kann er seine ganze Schuld auf einmal abtragen?

d) Der Kaufpreis eines Hauses betrug 82000 ℳ, zahlbar nach einem Jahre. Der Käufer zahlte aber nach 6 Monaten 24000 ℳ und nach 10 Monaten 18000 ℳ ab. Wann muß er den Rest abtragen?

e) Ein Kaufmann hatte ein Geschäft für 12000 ℳ übernommen und sich verpflichtet, diese Summe nach 18 Monaten zu bezahlen. Er konnte jedoch schon nach 5 Monaten 2000 ℳ, 5 Monate später 3000 ℳ und nach weiteren $5\frac{1}{2}$ Monaten wiederum 2000 ℳ abtragen. Wie lange durfte er dann noch den Rest behalten?

92. a) Jemand hat nach 2 Monaten 450 ℳ, nach weiteren 3 Monaten 720 ℳ und 4 Monate später eine dritte Schuld zu bezahlen. Wie groß ist diese, wenn er seine ganze Schuld nach 6 Monaten tilgen kann?

b) Ein Kaufmann hatte für Ware an seinen Lieferanten nach 4 Monaten 360 ℳ, nach 7 Monaten 240 ℳ und nach 11 Monaten einen dritten Posten zu bezahlen. Er zog es aber vor, nach 9 Monaten seine ganze Schuld auf einmal abzutragen. Wie groß war der dritte Posten?

c) Ein Hotelbesitzer hatte eine Sendung Wein nach 8 Monaten zu bezahlen. Es paßte ihm aber besser, nach 2 Monaten 300 ℳ, nach

weiteren 5 Monaten 400 ℳ und dann nach 6 Monaten den Rest abzutragen. Wie viel ℳ kostete der Wein?

d) Ein Kaufmann hatte aus einer Fabrik 40 Stücke Tuch von je 45 m erhalten und sich verpflichtet, den Preis nach einem Jahre zu bezahlen. Da er aber nach 3 Monaten 2000 ℳ und 4 Monate später 4800 ℳ abtrug, so konnte er den Rest $10\frac{1}{2}$ Monate über die festgesetzte Zeit hinaus behalten. Was kostet 1 m Tuch im Durchschnitt?

93. a) Jemand sollte auf ein Grundstück, das er für 8400 ℳ gekauft hatte, 2100 ℳ anzahlen und den Rest der Kaufsumme nach $1\frac{1}{2}$ Jahren abtragen. Er wünschte jedoch die ganze Summe auf einmal zu bezahlen. Wann konnte dies geschehen?

b) Ein Holzhändler kaufte von einer Gemeinde ein Stück Wald für 12 000 ℳ und sollte davon 7000 ℳ bar, 3500 ℳ nach 9 Monaten und 1500 ℳ nach 11 Monaten bezahlen. Wann konnte er die ganze Summe auf einmal bezahlen?

c) Ein Fabrikant hatte für Rohmaterial nach 12 Monaten 25 000 ℳ zu bezahlen. Statt dessen bezahlte er sofort 5000 ℳ, nach 7 Monaten 6000 ℳ und nach weiteren 4 Monaten wiederum 6000 ℳ. Wie lange durfte er den Rest dann noch behalten?

d) Bei der Übernahme einer Fabrik hatte sich der Inhaber verpflichtet, nach $1\frac{1}{2}$ Jahren an den früheren Besitzer 45 000 ℳ auszuzahlen. Es war ihm jedoch möglich, sofort 5000 ℳ, nach 4 Monaten 10 000 ℳ, nach weiteren 3 Monaten 5000 ℳ und 6 Monate später wiederum 5000 ℳ abzutragen. Wieviel Monate über die festgesetzte Zeit hinaus durfte er den Rest behalten?

94. a) Beim Ankauf eines Geschäfts hatte der Besitzer sich verpflichtet, von der Kaufsumme 5000 ℳ bar, 2000 ℳ nach 4 Monaten, 3000 ℳ nach 9 Monaten und den Rest nach 15 Monaten zu bezahlen. Die drei ersten Termine konnte er nicht einhalten. Durch einen Lotteriegewinn kam er dagegen nach 11 Monaten in die Lage, seine ganze Schuld auf einmal abzutragen. Wie groß war die Kaufsumme?

b) Der Käufer eines Hauses sollte von dem Kaufpreis 20 000 ℳ bar, nach 3 Monaten 15 000 ℳ, 6 Monate später 30 000 ℳ und nach weiteren 4 Monaten den Rest bezahlen. Er einigte sich jedoch mit dem Verkäufer dahin, daß er nach 9 Monaten die ganze Kaufsumme auf einmal abtragen konnte. Wie hoch war der Kaufpreis des Hauses?

c) Ein Kaufmann hatte 80 Sack Kaffee von je 50 kg gekauft und sollte den Preis nach $7\frac{1}{2}$ Monaten bezahlen. Er zog es jedoch vor, sofort 1000 ℳ, nach 2 Monaten 1500 ℳ und nach weiteren 4 Monaten 2500 ℳ abzuzahlen, um den Rest $6\frac{1}{2}$ Monate über die festgesetzte Zeit hinaus behalten zu können. Wie teuer war 1 kg Kaffee?

95. a) Ein Kaufmann kaufte einen Posten Kaffee, den er nach 10 Mo-

naten mit 5400 ℳ bezahlen sollte. Er einigte sich jedoch mit dem Verkäufer dahin, daß er seine Schuld durch 6 gleiche, nach je 3 Monaten auf einander folgende Zahlungen abtragen dürfe. Wann sollte die erste Zahlung eintreten?

b) Es kaufte jemand ein Haus für 75600 ℳ, zahlbar nach 15 Monaten. Nach 3 Monaten zahlte er 8400 ℳ ab und einigte sich dabei mit dem Verkäufer dahin, daß er von dann ab in 5 gleichen Terminen je 13440 ℳ abtragen dürfe. Wann sollte die letzte Zahlung erfolgen?

c) Ein Bauunternehmer kaufte von einem Holzhändler für 8400 ℳ Holz, zahlbar nach $4\frac{1}{2}$ Monaten. Es war ihm jedoch bequemer, nach einer gewissen Zeit 2400 ℳ, 3 Monate später 1900, nach weiteren 2 Monaten 2100 ℳ und dann nach 3 Monaten den Rest abzutragen. Nach wie viel Monaten trat die erste Zahlung ein?

d) Jemand hatte eine Schuld von 1000 ℳ nach 14 Monaten abzutragen. Sein Gläubiger gestattete ihm jedoch, in fünf Terminen, die jedesmal um 1 Monat länger wurden, seiner Verpflichtung nachzukommen. Nach welcher Zeit erfolgte die erste Zahlung, wenn jede folgende Zahlung 50 ℳ größer sein sollte als die vorhergehende?

96. a) Ein Bauunternehmer sollte den Preis für ein Grundstück in fünf gleichen nach je 3 Monaten zu entrichtenden Raten bezahlen. Die beiden ersten Termine konnte er nicht einhalten. Dagegen zahlte er nach 8 Monaten 9000 ℳ ab und konnte nun den Rest noch 10 Monate behalten. Wie groß war der Preis des Grundstücks?

b) Der Preis für ein Haus sollte nach 16 Monaten gezahlt werden. Der Käufer zog es jedoch vor, sofort 9000 ℳ und den Rest in sechs gleichen, nach je 5 Monaten zu entrichtenden Raten abzutragen. Wie groß war der Preis des Hauses?

c) Jemand sollte eine gewisse Schuld nach einem Jahre begleichen. Statt dessen bezahlte er 5mal nach je 2 Monaten die gleiche Summe und 4 Monate nach der festgesetzten Zeit den Rest im Betrage von 150 ℳ. Wie groß war die Schuld?

d) Ein Tuchhändler sollte den Preis für 50 Stück Tuch von je 35 m Länge nach $8\frac{2}{5}$ Monaten bezahlen. Er einigte sich jedoch mit dem Fabrikanten dahin, daß er sofort 2750 ℳ anzahlen und den Rest durch sechs jedesmal um 200 ℳ steigende Raten in Terminen von je drei Monaten begleichen sollte. Wie teuer war im Durchschnitt ein Meter des Tuches?

e. Mischungsrechnung. Aufgaben aus der Physik.

97. a) Ein Kaufmann mischte 28 kg Kaffee, 1 kg zu 2,40 ℳ, mit einer zweiten Sorte, von der 1 kg 1,74 gekostet hatte. Beim Rösten der Mischung gingen 15% des Gewichts verloren. Wie viel kg der

zweiten Sorte hatte er genommen, wenn der Preis für 1 kg des gebrannten Kaffees sich auf 2,50 ℳ stellte?

b) Ein Kaufmann will aus zwei Sorten Kaffee, 1 kg zu 2,50 ℳ bez. 1,75 ℳ, 25 kg gebrannten Kaffee, 1 kg zu 2,46 ℳ herstellen. Wie viel kg der besseren Sorte hat er zu nehmen, wenn beim Rösten $16\frac{2}{3}\,\%$ des Gewichts verloren gehen?

c) Ein Kaufmann röstete eine Mischung aus 16 kg Kaffee, 1 kg zu 2,25 ℳ, mit 14 kg einer zweiten Sorte. Wie viel ℳ hatte 1 kg der zweiten Sorte gekostet, wenn beim Rösten $13\frac{1}{3}\,\%$ des Gewichts verloren gingen und der Preis für 1 kg der Mischung 30 ₰ mehr betrug als für 1 kg der zweiten Sorte?

98. a) Ein Weinhändler mischte 600 l Rheinwein, 1 l für 1,80 ℳ, mit einer zweiten Sorte, von der ein l 90 ₰ gekostet hatte. Von der Mischung behielt er den zehnten Teil für seinen eigenen Gebrauch zurück und verkaufte den Rest zu 1,60 ℳ für 1 l. Wie viel l der zweiten Sorte hatte er genommen, wenn er an dem Wein noch 270 ℳ verdiente?

b) Ein Kaufmann mischte 75 kg Thee, 1 kg für 8 ℳ, mit 50 kg einer zweiten Sorte und überließ einem Geschäftsfreunde 30 kg der Mischung zum Preise von 7,50 ℳ für 1 kg. Den Rest verkaufte er so, daß er für 1 kg 1,50 ℳ mehr nahm als er für 1 kg der zweiten Sorte gegeben hatte, und erzielte dadurch an der ganzen Mischung einen Gewinn von 82,50 ℳ. Wie teuer war 1 kg der zweiten Sorte?

c) Eine Mischung aus zwei Sorten Kaffee, 1 kg für 2,40 ℳ bez. 2 ℳ, hatte beim Rösten 16 % ihres Gewichts verloren. Das kg des gebrannten Kaffees wurde für 2,80 ℳ verkauft und an der ganzen Mischung ein Gewinn von 8,40 ℳ erzielt. Wie viel kg von jeder Sorte wurden zu der Mischung verwandt, wenn von der ersten Sorte 4 kg weniger genommen wurden als von der zweiten?

99. a) Jemand gießt $31\frac{1}{2}$ kg Wasser mit $10\frac{1}{2}$ kg 88prozentiger*) Schwefelsäure zusammen. Wieviel-prozentig ist die dadurch entstehende Schwefelsäure?

b) Aus 34 kg 55prozentiger Schwefelsäure werden durch Abdampfen 12 kg Wasser entfernt. Wieviel-prozentig ist der Rest?

c) Aus 448 kg 25prozentiger Salzsole werden durch Abdampfen 128 kg Wasser entfernt. Wieviel-prozentig ist der Rest?

d) Wenn mit 18 kg Silber vom Feingehalt**) 725 11 kg Kupfer zusammengeschmolzen werden, wie groß ist dann der Feingehalt der Legierung?

---

*) d. h. 1 kg Schwefelsäure enthält 88 Gewichtsteile reine Schwefelsäure und 12 Gewichtsteile Wasser.

**) d. h. 1 kg enthält 725 g reines Silber und 275 g anderes Metall.

e) Wenn 175 g 16karätiges*) Gold mit 105 g Kupfer zusammengeschmolzen werden, wieviel-karätig ist dann die Legierung?

f) Wieviel-prozentig ist eine Mischung aus 6 kg 35prozentiger und 8 kg 84prozentiger Salzsole?

g) Jemand vermischt mit 24 kg 65prozentiger Schwefelsäure 12 kg Wasser und 25 kg 84prozentiger Schwefelsäure. Wieviel-prozentig ist die Mischung?

h) Wenn 15 kg Silber vom Feingehalt 840 mit 9 kg Silber vom Feingehalt 360 zusammengeschmolzen werden, wie groß ist dann der Feingehalt der Legierung?

i) Wenn 63 g 18karätiges mit 27 g 13karätigem Gold zusammengeschmolzen werden, wieviel-karätig ist dann die Legierung?

100. a) Wie viel kg Wasser müssen zu 55 kg 72prozentiger Salzsole zugelassen werden, damit sie 45prozentig wird?

b) Wie viel kg Wasser müssen zu 32 kg 86prozentigem Spiritus hinzugegossen werden, damit er 64prozentig wird?

c) Wie viel kg Wasser müssen aus 15 kg 32prozentiger Schwefelsäure abgedampft werden, damit sie 80prozentig wird?

d) Wie viel kg Wasser müssen 42 kg 54prozentiger Salzsole entzogen werden, damit sie 84prozentig wird?

e) Wie viel kg Silber mit dem Feingehalt 875 müssen mit 4,7 kg Kupfer zusammengeschmolzen werden, damit eine Legierung mit dem Feingehalt 546 entsteht?

f) Wie viel g 15karätiges Gold müssen mit 24 g Kupfer zusammengeschmolzen werden, damit 9karätiges Gold entsteht?

g) Wie viel kg 50prozentigen Spiritus muß man mit 14 kg 80prozentigem Spiritus mischen, um 64prozentigen zu erhalten?

h) Ein Weinhändler mischte 480 l Wein, der 10,5% (des Rauminhalts) Alkohol enthielt, mit einer zweiten Sorte, in der nur 7% Alkohol enthalten waren. Wie viel l der zweiten Sorte hat er genommen, wenn die Mischung 9% Alkohol enthielt?

i) Wie viel kg Silber vom Feingehalt 820 muß man mit 16,12 kg Silber vom Feingehalt 585 zusammenschmelzen, um Silber vom Feingehalt 690 zu erhalten?

k) Wie viel g 12karätiges Gold muß man mit 75 g 20karätigem Gold zusammenschmelzen, um 15karätiges Gold zu erhalten?

101. a) Wenn man 12 kg Wasser und 17 kg Spiritus zusammengießt und dadurch 51prozentigen Spiritus erhält, wieviel-prozentig ist dann der benutzte Spiritus?

---

*) d. h. von 24 Gewichtsteilen sind 16 Gewichtsteile reines Gold (Feingold). Ein Karat ist gleich 9,74 g. Diese Einteilung ist noch vielfach im Gebrauch, obschon nach einem Reichsgesetz der Feingehalt nach Tausendteilen bestimmt werden soll.

257 190

b) Wieviel-prozentig ist eine Schwefelsäure, wenn 16 kg derselben mit 9 kg Wasser zusammen eine 48prozentige Schwefelsäure liefern?

c) Welchen Feingehalt besitzen 6,25 kg Silber, wenn sie durch Legierung mit 3,75 kg Kupfer Silber vom Feingehalt 540 liefern?

d) Wieviel-karätig sind 85 g Gold, wenn sie mit 68 g Kupfer 10karätiges Gold liefern?

e) Jemand mischte 24 kg 78prozentigen Spiritus mit 15 kg einer zweiten Sorte und erhielt dadurch 68prozentigen Spiritus. Wieviel-prozentig ist die zweite Sorte?

f) Wenn 9,6 kg 83prozentige Schwefelsäure mit 7,2 kg einer zweiten Sorte zusammen 71prozentige Schwefelsäure liefern, wieviel-prozentig ist dann die zweite Sorte?

g) 3,76 kg Silber vom Feingehalt 915 liefern durch Zusammenschmelzen mit 1,88 kg Silber von anderer Zusammensetzung eine Legierung mit dem Feingehalt 765. Wie groß ist der Feingehalt der zweiten Sorte?

h) Wieviel-karätig sind $58\frac{1}{2}$ g Gold, wenn sie mit $31\frac{1}{2}$ g 8karätigem Gold eine $14\frac{1}{2}$karätige Legierung liefern?

102. a) Wie viel kg Wasser und wie viel kg 78prozentige Salzsole sind in 13 kg 45prozentiger Salzsole enthalten?

b) Wie viel kg Wasser und wie viel kg 75prozentiger Schwefelsäure sind in 15 kg 27prozentiger Schwefelsäure enthalten?

c) Wie viel kg Kupfer und wie viel kg Silber vom Feingehalt 650 muß man zusammenschmelzen, um 14 kg Silber vom Feingehalt 520 zu erhalten?

d) Wie viel g Kupfer und wie viel g 18karätiges Gold muß man legieren, um 84 g 12karätiges Gold zu erhalten?

e) Wie viel kg 78prozentigen und wie viel kg 33prozentigen Spiritus muß man zusammengießen, um 60 kg 54prozentigen Spiritus zu erhalten?

f) Wie viel kg Silber vom Feingehalt 918 und wie viel kg Silber vom Feingehalt 525 können zu 5,764 kg Silber vom Feingehalt 750 zusammengeschmolzen werden?

g) Ein Bräutigam bestellte zwei Trauringe von je 15 g Gewicht aus 18karätigem Gold. Der Goldschmied hatte aber nur 20karätiges und 15karätiges Gold zur Verfügung. Wie viel g von jeder Sorte mußte er nehmen?

103. a) Zur Herstellung eines Messinggefäßes werden 2,2 kg Kupfer und 3,6 kg Zink verwandt. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Messings?*)

---

*) Ist V der Rauminhalt (in ccm, bez. in cdm oder l) und G das Gewicht

b) Zur Herstellung einer Broncefigur werden 15,4 kg Kupfer und 29,2 kg Zinn verwandt. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Bronce?

c) Zur Herstellung eines massiven silbernen Leuchters wurden 420 g reines Silber und 220 g Kupfer verwandt. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Leuchters?

d) Aus 22,5 g Feingold und 7,5 g Kupfer wurden zwei Trauringe hergestellt. Wie groß ist deren spezifisches Gewicht?

e) Zu einem Schmuckgegenstand sind 48 g Feingold und 32 g reines Silber verwandt worden. Wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

f) Wie groß ist das spezifische Gewicht des Königswassers, wenn in demselben auf 1 Gewichtsteil konzentrierter Salpetersäure mit dem spezifischen Gewicht 1,8 jedesmal 3 Gewichtsteile konzentrierter Salzsäure mit dem spezifischen Gewicht 1,2 kommen?

g) In dem Woodschen Metall kommen auf 6 Gewichtsteile Blei*) je 2 Gewichtsteile Zinn und Kadmium mit dem spezifischen Gewicht 8,6 sowie 7 Gewichtsteile Wismuth mit dem spezifischen Gewicht 9,8. Wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

h) Eine 3,75 kg schwere Platte aus Eisen ist an einem 2,8 kg schweren Stück Holz befestigt. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes, wenn der ganze Körper im Wasser von 4° 2,05 kg von seinem Gewicht verliert?

i) Eine Hohlkugel aus Aluminium mit einem Innenraume von 450 ccm ist mit Sand ausgefüllt. Wie groß ist dessen spezifisches Gewicht, wenn die gefüllte Kugel im Wasser von 4° 1005 g wiegt und die Hohlkugel 320 g schwer ist?

104. a) Wie viel g Kupfer sind mit 315 g reinem Silber zusammenzuschmelzen, damit die Legierung das spezifische Gewicht 9,82 erhält?

b) Wie viel kg Zinn sind mit 17,6 kg Kupfer zu legieren, um Bronce mit dem spezifischen Gewicht 8,05 herzustellen?

c) Wie viel g Platin sind mit 308 g Kupfer zusammenzuschmelzen, um eine Legierung mit dem spezifischen Gewicht 12,52 herzustellen?

d) Wie viel kg muß ein Gürtel aus Kork mit dem spezifischen Gewicht 0,24 mindestens wiegen, um einen Knaben von 56 kg Gewicht mit dem spezifischen Gewicht 1,12 am Untersinken im Wasser zu hindern?

(in g, bez. in kg) eines Körpers, so ist $s = \frac{G}{V}$ sein spezifisches Gewicht. Bei den Aufgaben 103—105 ist die bei den Legierungen häufig eintretende Verminderung des Rauminhalts nicht zu berücksichtigen.

Als spezifisches Gewicht ist benutzt bei

Gold	die Zahl 19,3	Silber	die Zahl 10,5	Platin	die Zahl 21,2
Eisen	„ „ 7,5	Kupfer	„ „ 8,8	Zinn	„ „ 7,3
Zink	„ „ 7,2	Aluminium	„ „ 2,56	Blei	„ „ 11,3

*) Nach Rüdorff, Grundriß der Chemie, Seite 63.

e) Eine 6 kg schwere Legierung ist aus 8 Teilen Silber und 7 Teilen Kupfer zusammengesetzt. Wie viel kg Silber sind hinzuzufügen, damit die ganze Masse das spezifische Gewicht 10 besitzt?

f) Eine 594 g schwere Legierung ist aus 5 Teilen Gold und 7 Teilen Silber zusammengesetzt. Wie viel g Gold sind hinzuzufügen, um das spezifische Gewicht des Metalls auf 16 zu erhöhen?

105. a) Aus Schwefelsäure mit dem spezifischen Gewicht 1,8 und Wasser von 4° sollen 14 kg verdünnter Schwefelsäure mit dem spezifischen Gewicht 1,4 hergestellt werden. Wie viel l Wasser sind zu der Mischung zu nehmen?

b) Aus Schwefelsäure mit dem spezifischen Gewicht 1,8 und Wasser von 4° sollen 10 kg verdünnte Schwefelsäure mit dem spezifischen Gewicht $1\frac{3}{7}$ hergestellt werden. Wie viel l Wasser sind zu nehmen?

c) Ein Goldschmied wünscht aus Gold und Kupfer eine Legierung von 650 g mit dem spezifischen Gewicht 13 herzustellen. Wie viel g Gold muß er nehmen?

d) Zum Guß eines Standbildes sollen 483 kg Bronce mit dem spezifischen Gewicht 8,05 verwandt werden. Wie viel kg Kupfer und wie viel kg Zinn sind dazu erforderlich?

e) Wie viel g reines Silber und wie viel g Kupfer sind in einem Markstück enthalten, wenn es $5\frac{5}{9}$ g wiegt und das spezifische Gewicht 10,3 besitzt?

f) Wie viel g Feingold und wie viel g Kupfer sind in einem Zwanzigmarkstück enthalten, wenn es 8 g wiegt und das spezifische Gewicht 14,7 besitzt?

106. a) Wenn 37 kg Wasser von 85° mit 13 kg Wasser von 15° zusammengegossen werden, wie hoch ist dann die Temperatur der Mischung?*)

b) Wie viel kg Wasser von 80° muß man zu 5,5 kg Wasser von 24° hinzugießen, damit die Mischung eine Temperatur von 58° besitzt?

c) Welche Temperatur besitzen 6,75 kg Wasser, wenn sie mit 9,25 kg Wasser von 80° zusammen Wasser von 53° liefern?

d) In einer Badewanne sollen 540 l (kg) Wasser von 36° hergestellt werden. Wie viel l (kg) kochendes Wasser und wie viel l Leitungswasser sind zu nehmen, wenn dieses eine Temperatur von 10° besitzt?

Spezifische Wärme.

107. a) Eine 2 kg schwere Kugel aus Eisen mit der spezifischen Wärme**) 0,1138 wurde auf 250° erwärmt und dann in 6 l Wasser

*) Auf die gleichzeitige Erwärmung des Gefäßes ist bei den Aufgaben 106—108 keine Rücksicht zu nehmen.

**) Die spezifische Wärme giebt die Anzahl Kalorien an, die erforderlich sind, um die Temperatur eines Kilogramms der Substanz um 1° zu erhöhen.

von 8° geworfen. Um wie viel Grad stieg die Temperatur des Wassers?

b) Ein kg Quecksilber mit der spezif. Wärme 0,028 wird auf $202\frac{1}{2}$° erwärmt und dann in Wasser von 8° gegossen. Wie viel l (kg) Wasser enthält das Gefäß, wenn die Temperatur des Wassers auf 15° steigt?

c) Ein Klumpen Silber mit der spezifischen Wärme 0,057, der auf 435° erwärmt worden war, wurde in ein Gefäß mit 3 kg Wasser von 16° geworfen. Wie viel kg wog das Silber, wenn die Temperatur des Wassers auf 35° stieg?

d) Eine stark erwärmte 8 kg schwere Platte aus Kupfer mit der spezifischen Wärme 0,095 wurde zur Abkühlung in einen Trog mit 25 kg Wasser von 1,44° geworfen. Wie hoch war die Temperatur der Platte, wenn die Temperatur des Wassers auf 25° stieg?

e) Eine stark erwärmte 5 kg schwere Bleikugel fiel in $1\frac{1}{2}$ kg Alkohol von 8° und erhöhte dessen Temperatur auf 34,4°. Wie hoch war die Temperatur der Bleikugel, wenn die spezifische Wärme des Bleis 0,0314 und des Alkohols 0,602 beträgt?

f) Wie viel g Alkohol von 50° und wie viel g Terpentinöl von 20° sind zu einer Mischung von 822 g und 30° benutzt worden, wenn die spezifische Wärme des Alkohols 0,602 und des Terpentinöls 0,440 beträgt?

Schmelzwärme.

108. a) 8 kg Wasser von 52° werden über 3 kg Schnee von 0° gegossen. Welche Temperatur hat die Mischung, nachdem der Schnee vollständig geschmolzen ist?*)

b) Wie viel kg Wasser von 85° müssen über 2,5 kg Schnee von 0° gegossen werden, um den Schnee zum Schmelzen zu bringen und der Mischung eine Temperatur von 10° zu verschaffen?

c) Wie viel kg Schnee von 0° sind in 6 kg Wasser von 65° geschmolzen worden, wenn die Mischung die Temperatur 7° besitzt?

d) Wie viel kg Wasser von 85° und wie viel kg Schnee von 0° ergeben eine Mischung von 15 kg Wasser mit einer Temperatur von 8°?

e) Wie viel kg Aluminium von 424° müssen in 2,675 kg Schnee von 0° geworfen werden, um ihn in Wasser von 4° zu verwandeln, wenn die spezifische Wärme des Aluminiums 0,214 beträgt?

f) Welche spezifische Wärme besitzt eine Bronce, wenn 8 kg derselben mit einer Temperatur von 460° 3,2 kg Schnee von 0° in Wasser von 10° verwandeln?

---

*) Als Schmelzwärme für 1 kg Schnee von 0° sind bei diesen Aufgaben 80 Kalorien benutzt.

Verdampfungswärme.

109. a) Durch ein Schlangenrohr werden 0,2 kg Wasserdampf*) von 100° in 4,8 kg Wasser von 7° geleitet. Welche Temperatur erhält dadurch das Wasser?

b) Wie viel kg Wasserdampf von 100° sind durch 2,3 kg Wasser von 12° aufgesogen worden, wenn dessen Temperatur auf 62° gestiegen ist?

c) Wie viel kg Wasserdampf von 100° und wie viel kg Wasser von 5° haben sich zu 10 kg Wasser von 36,6° mit einander vereinigt?

d) Wenn 0,5 kg Wasserdampf von 100° zum Schmelzen von 3 kg Schnee von 0° benutzt werden, welche Temperatur erhält dann das entstehende Wasser?

e) Wie viel kg Wasserdampf von 100° sind erforderlich, um mit 2,08 kg Schnee von 0° Wasser von 13° zu liefern?

f) Wie viel kg Schnee von 0° liefern mit 0,35 kg Wasserdampf von 100° Wasser von 25°?

g) Wie viel kg Wasserdampf von 100° und wie viel kg Schnee von 0° vereinigen sich zu 2,39 kg Wasser von 37°?

f. Aufgaben aus der Planimetrie.

110. a) In einem **rechtwinkligen Dreieck** mit der Kathete $a = 15$ cm ist die Kathete b 3 cm kleiner als die Hypotenuse. Wie groß ist diese?

b) Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete $a = 84$ cm hat den Umfang $u = 182$ cm. Wie groß ist die andere Kathete?

c) Die Hypotenusenhöhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist 12 cm größer als der kleinere und 16 cm kleiner als der größere Hypotenusenabschnitt. Wie groß ist die Höhe?

d) Wie groß ist eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn sie 3 cm kleiner als die Hypotenuse und 2 cm größer als ihre Projektion auf die Hypotenuse ist?

e) Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist 3 cm größer als ihre Projektion auf die Hypotenuse und der nichtanliegende Abschnitt der Hypotenuse ist 12 cm lang. Welche Länge besitzt die Kathete?

f) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen 36 cm lang. Verlängert man die kleinere um 4 cm und verkürzt die größere um 4 cm, so nimmt der Inhalt des Dreiecks um 8 qcm zu. Wie groß sind die beiden Katheten?

g) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks unterscheiden sich um 7 cm. Verkürzt man die größere um 1 cm und verlängert die kleinere

---

*) Als Verdampfungswärme sind 537 Kalorien benutzt; 1 kg Wasserdampf von 100° soll also 637 Kalorien enthalten.

um 3 cm, so nimmt der Inhalt des Dreiecks um 17 qcm zu. Wie groß sind die beiden Katheten?

111. a) In einem **gleichschenkligen Dreieck** mit dem Umfang $u = 130$ cm verhält sich die Länge eines Schenkels zu der Länge der Grundlinie wie 3 : 4. Wie groß ist die Grundlinie?

b) In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang $u = 256$ cm hat die zur Grundlinie gehörige Höhe die Länge $h = 80$ cm. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

c) In einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Schenkel 2 cm größer als die Hälfte der Grundlinie sind, hat die zur Grundlinie gehörige Höhe die Länge $h = 16$ cm. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

112. a) In einem **ungleichseitigen Dreieck** verhält sich eine Seite zu der zugehörigen Höhe wie 5 : 7. Verlängert man beide um 4 cm, so wächst der Inhalt des Dreiecks um 56 qcm. Wie groß ist die Seite?

b) In einem Dreieck bildet eine Seite mit der zu ihr gehörigen Höhe die Summe $l = 25$ cm. Verlängert man die Seite um 1 cm und die Höhe um 4 cm, so wächst der Inhalt des Dreiecks um 28 qcm. Wie groß ist die Seite?

c) Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 5 : 8. Verlängert man, ohne den eingeschlossenen Winkel zu ändern, die kleinere um 6 cm und verkürzt die größere um 4 cm, so wächst der Inhalt um ebensoviel, wie wenn man die kleinere Seite um 1 cm verkürzt und die größere um 6 cm verlängert. Wie groß sind die beiden Seiten?

d) Wie groß sind die Seiten eines Dreiecks mit dem Inhalt*) $J = 72^2$ qcm, wenn sie sich wie 9 : 10 : 17 verhalten?

e) Einem Kreise mit dem Halbmesser $\varrho = 6$ cm ist ein Dreieck umgeschrieben, dessen Seiten sich wie 5 : 5,6 : 3,4 verhalten. Wie groß sind die Seiten?

13. a) Die anstoßenden Seiten eines **Rechtecks** verhalten sich wie 3 : 5. Verkürzt man die kleinere um 1 cm und verlängert die größere um 2 cm, so nimmt der Inhalt des Rechtecks um 5 qcm zu. Wie lang sind die beiden Seiten?

b) Die Diagonalen eines Rechtecks, dessen Seiten sich wie 3 : 4 verhalten, ändern sich nicht, wenn die kleinere Seite um 6 cm verlängert und die größere Seite um 6 cm verkürzt wird. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

c) In einem Rechteck, dessen Seiten sich wie 12 : 5 verhalten, nimmt das Quadrat über der Diagonale um 79 qcm zu, wenn man die größere Seite um 12 cm verkürzt und die kleinere um 17 cm verlängert. Wie lang sind die Seiten?

d) Zwei Rechtecke von gleichen Grundlinien (Höhen) verhalten sich

*) Benutze die Formel: $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

wie 8 : 11 und ihre Umfänge unterscheiden sich um 24 cm. Wie groß sind ihre Höhen (Grundlinien)?

114. a) Der Inhalt eines **Rhombus**, dessen Diagonalen sich um 8 cm unterscheiden, bleibt ungeändert, wenn man die kleinere Diagonale um 3 cm verlängert und die größere um 4 cm verkürzt. Wie groß sind beide Diagonalen?

b) Der Inhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen die Summe $l = 82$ cm besitzen, bleibt ungeändert, wenn man die kleinere Diagonale um 2 cm verlängert und die größere um 2 cm verkürzt. Wie groß sind die Diagonalen?

c) Die Diagonalen eines Rhombus unterscheiden sich um 9 cm Verlängert man jede derselben um 4 cm, so wächst der Inhalt um 90 qcm. Wie groß sind die Diagonalen?

d) Die Diagonalen eines Rhombus verhalten sich wie 4 : 3. Verlängert man die größere um 8 cm und verkürzt die kleinere um 4 cm, so bleibt der Inhalt ungeändert. Wie groß sind die Diagonalen?

115. a) In einem **Trapez** mit der Höhe $h = 13$ cm und dem Inhalt $J = 208$ qcm

1) unterscheiden sich die Grundlinien um 6 cm;

2) verhalten sich die Grundlinien wie 5 : 3;

wie groß sind die Grundlinien?

b) In einem Trapez ist die Höhe um 15 cm und die kleinere der Grundlinien um 13 cm kleiner als die größere. Verlängert man die Höhe um 1 cm und verkürzt die kleinere Grundlinie um 3 cm, so bleibt der Inhalt des Trapezes ungeändert. Wie groß sind die Grundlinien des Trapezes?

c) In einem Trapez ist die größere Grundlinie 22 cm größer als die kleinere und diese 6 cm größer als die Höhe. Wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt des Trapezes 29 qcm größer ist als das Quadrat über der kleineren Grundlinie?

d) In einem gleichschenkligen Trapez, dessen Grundlinien sich um 10 cm unterscheiden, ist die Höhe 1 cm kleiner als ein Schenkel. Wie groß sind die beiden Grundlinien, wenn das Trapez den Inhalt $J = 174$ qcm besitzt?

e) In einem gleichschenkligen Trapez mit der Höhe $h = 20$ cm unterscheiden sich die Grundlinien um 16 cm und die Diagonalen sind gleich der größeren Grundlinie. Wie groß ist der Inhalt des Trapezes?

Nr. 22. Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten.

a. Mit 2 Unbekannten.

1 a) $x = 3y - 7$, $x = 2y - 2$.

b) $y = 2x - 2$, $y = 5x - 11$.

c) $3x = 21 - 5y$,
$3x = 4y - 6$.

d) $5y = 3x - 2$,
$5y = 4x - 11$.

e) $7x = 9y + 5$,
$7x = 117 - 5y$.

f) $8y = 5x - 3$,
$8y = 53 - 3x$.

g) $11x = 8y + 7$,
$11x = 13y - 23$.

h) $9y = 2x - 31$,
$9y = 5 - 16x$.

2. a) $4x = 7y + 2$,
$12x = 25y - 2$.

b) $9y = 5x + 2$,
$3y = 29 - 4x$.

c) $21x = 9y - 3$,
$3x = 31 - 5y$.

d) $20y = 9x + 26$,
$40y = 27x - 2$.

e) $35x = 17y + 59$,
$7x = 5y - 9$.

f) $6y = 7x + 35$,
$24y = 41x - 29$.

g) $3x = 5y - 19$,
$\frac{1}{2}x = 3y - 14$.

h) $\frac{2}{3}y = 3x - 11$,
$8y = 11x - 7$.

i) $15x = 13y - 2$,
$\frac{5}{6}x = 3y - 32$.

k) $\frac{4}{5}y = 3 - 2\frac{1}{3}x$,
$12y = 31 - 20x$.

l) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{19}$,
$\frac{1}{4}x = \frac{5}{6} - \frac{8}{9}y$.

m) $\frac{1}{3}y = 1 - x$,
$\frac{1}{6}y = 3 - 4\frac{1}{4}x$.

n) $\frac{1}{6}x = \frac{1}{4}y - 4$,
$\frac{1}{15}x = 7 - \frac{1}{8}y$.

o) $\frac{1}{4}y = 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$,
$\frac{1}{20}y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{3}$.

3. a) $2x = 5y - 11$,
$3x = 27 - 7y$.

b) $4y = 3x + 4$,
$5y = 4x + 3$.

c) $7x = 37 - 2y$,
$4x = 17y + 3$.

d) $6y = 17x + 2$,
$5y = 19x - 8$.

e) $9x = 16y - 1$,
$7x = 13y - 3$.

f) $9y = 7x - 3$,
$11y = 5x + 7$.

g) $8x = 25 - 5y$,
$12x = 9 - 17y$.

h) $9y = 13x - 2$,
$15y = 23x + 2$.

i) $18x = 31y + 5$,
$24x = 53y - 5$.

k) $34y = 5 - 13x$,
$51y = 4x - 63$.

l) $39x = 14y + 8$,
$52x = 19y + 9$.

m) $57x = 13y + 5$,
$95x = 26y - 9$.

n) $46x = 4 - 21y$,
$69x = 4y + 77$.

o) $63y = 19 - 22x$,
$105y = 8x + 121$.

p) $0{,}15x = 0{,}7y + 0{,}02$,
$0{,}25x = 1{,}3y - 0{,}02$.

q) $0{,}78y = 0{,}19x + 0{,}023$,
$0{,}65y = 0{,}18x + 0{,}004$.

r) $2{,}4x = 1{,}7y + 0{,}1$,
$3{,}2x = 2{,}3y - 0{,}1$.

s) $4{,}9y = 3{,}2x + 1{,}9$,
$3{,}5y = 2{,}4x + 0{,}9$.

t) $1{,}5x = 1{,}1y + 0{,}01$,
$2x = 1{,}7y - 0{,}08$.

u) $2{,}5y = 3{,}3x - 0{,}07$,
$6y = 6{,}9x + 0{,}24$.

v) $ax = 2by - ab$
$bx = by - ab + b^2$.

w) $a^2by = 2abx - a$,
$ab^2y = 2b - b^2x$.

x) $4ax = 7b - \frac{3b^2}{a}y$,
$3a^2x = 5b^2y - 2ab$.

y) $5aby = 3a^2(x - a) + 2abx - 7b^2(x - b)$,
$7a^2y = (3x + 4a)a^2 - 5b(2a^2 + ab + b^2 - bx)$.

4. a) $x - y = 19$,
$y = x - 5$.

b) $x - y = 5$,
$x = 3y - 1$,

c) $3x - 5y = 5$,
$3x = 7y + 1$.

d) $4x - 7y = 8$,
$7y = 3x + 1$.

e) $7x + 8y = 67$,
$8y = 9x - 13$.

f) $11x - 15y = 36$,
$11x = 27y + 12$.

g) $13y - 2x = 49$,
$13y = 8x + 1$.

h) $16x - 7y = 57$,
$7y = 3x - 5$.

5. a) $5x + 9y = 91$,
$3y = 11x + 5$.

b) $7x - 12y = 13$,
$4y = 5x - 23$.

c) $11x - 15y = 14$,
$5y = 3x - 2$.

d) $2x + 27y = 97$,
$9y = 67 - 5x$.

e) $7x - 3y = 13$,
$6y = 50 - 5x$.

f) $5x - 2y = 10$,
$15x = 31 - 7y$.

g) $4x + 11y = 96$,
$16x = 43y + 36$.

h) $6x - 7y = 23$,
$21y = 37x - 31$.

i) $8x - 9y = 25$,
$45y = 13 - 29x$.

k) $6x + 5y = 3$,
$30x = 9 - 23y$.

l) $0{,}7x - 0{,}9y = 1$,
$0{,}3y = 0{,}2x - 0{,}2$.

m) $2{,}5x + 0{,}4y = 9{,}5$,
$0{,}5x = 0{,}4y - 0{,}5$.

n) $0{,}6x + 1{,}3y = 0{,}7$,
$1{,}8x = 1{,}7y - 0{,}14$.

o) $0{,}8x - 0{,}3y = 0{,}34$,
$1{,}5y = 0{,}7x - 0{,}05$.

p) $2\frac{1}{8}x - \frac{4}{5}y = 2$,
$1\frac{3}{5}y = 5x - 6$.

q) $4\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{2}y = 4\frac{4}{5}$,
$\frac{3}{5}x = 4\frac{1}{4}y - 3$.

r) $11\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{6}y = 43$,
$2\frac{1}{4}x = 22 - 2\frac{2}{3}y$.

s) $6\frac{2}{3}x - 10\frac{1}{2}y = -\frac{5}{6}$,
$\frac{7}{8}y = 4\frac{1}{6}x - 1\frac{3}{8}$.

t) $4x + \frac{27}{y} = 23$,
$\frac{9}{y} = 16 - 3x$.

u) $\frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6}$,
$\frac{4}{y} = \frac{9}{x} - 2\frac{1}{2}$.

v) $\frac{24}{x} + \frac{55}{y} = 8$,
$\frac{48}{x} = \frac{43}{y} + 2\frac{1}{11}$.

w) $\frac{35}{x} - \frac{24}{y} = 12{,}7$,
$\frac{105}{x} = 65\frac{1}{2} - \frac{65}{y}$.

6. a) $5x + 6y = 43$,
$9y = 7x - 8$.

b) $8x - 5y = 11$,
$12x = 11y - 15$.

c) $21x - 16y = 88$,
$28x = 43y + 9$.

d) $17x - 20y = 94$,
$25y = 9x - 93$.

e) $15x + 26y = 4$,
$39y = 7 - 23x$.

f) $35x - 31y = 27$,
$42x = 5y - 32$.

g) $68x - 19y = 28{,}3$,
$51x = 37{,}5 - 40y$.

h) $51x - 57y = 9$,
$95y = 45x + 1$.

i) $3{,}2x - 2{,}5y = 9{,}2$,
$2{,}4x = 2{,}3y + 5{,}2$.

k) $3{,}9x + 5{,}1y = 23{,}1$,
$8{,}5y = 28{,}5 - 1{,}5x$.

l) $0{,}35x + 0{,}24y = 15{,}3$,
$4{,}2x = 5{,}7y + 12$.

m) $4{,}1x - 4{,}8y = 0{,}17$,
$0{,}32y = 0{,}1 - 0{,}84x$.

n) $0{,}78x - 0{,}53y = 0{,}308$
$9{,}1x = \frac{1}{3}(17{,}4y + 11{,}24)$.

o) $5{,}5y - 2{,}7x = 104{,}6$,
$0{,}44y = 10 - 0{,}6x$.

p) $\frac{3}{4}x + \frac{8}{y} = 4$,
$\frac{12}{y} = 7 - \frac{11}{8}x$.

q) $\frac{14}{x} - \frac{9}{y} = 1$,
$\frac{21}{x} = 8\frac{1}{3} - \frac{16}{y}$.

r) $\frac{16}{x} + 5y = 6{,}5$,
$\frac{24}{x} = 13y - 0{,}5$,

s) $\frac{7}{x} + \frac{24}{y} = 11{,}5$,
$\frac{42}{y} = \frac{11}{x} + 8{,}5$.

t) $ax + by = a^2 + b^2$,
$cy = cx + 2bc$.

u) $2a^2x - 3b^2y = a(4-b)$,
$5aby = \frac{5}{6}a^2x - 3b(ax-2)$.

v) $(a+b)^2x - aby = b$,
$(a^2 - b^2)x = a - b^2y + ab(by - 1)$.

w) $abx - (a-b)^2y = 2b - a$,
$(a^2 - b^2)y = a^2x + b^2 - a(ax - 1)$.

7. a) $x + y = 21$,
$x - y = 11$.

b) $x + y = 20$,
$x - y = 8$.

c) $x + 5y = 29$,
$x + 3y = 19$.

d) $4x + y = 31$,
$2x - y = 11$.

e) $7x - 5y = 11$,
$3x + 5y = 19$.

f) $8x + 9y = 93$,
$8x - 5y = 23$.

g) $7x - 2y = 24$,
$3x - 2y = 8$.

h) $3x - 11y = -11$,
$3x + 4y = 49$.

i) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 4$,
$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 12$.

k) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 18$,
$\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 10$.

l) $\frac{x}{7} + \frac{y}{8} = 8$,
$\frac{x}{7} - \frac{y}{6} = 1$.

m) $\frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 9$,
$\frac{5y}{6} - \frac{x}{9} = 32$.

n) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 13$,
$\frac{4x}{9} - \frac{y}{5} = 1$.

o) $\frac{2x}{9} + \frac{3y}{11} = 23$,
$\frac{5y}{11} - \frac{2x}{9} = 17$.

p) $\frac{3x}{8} + \frac{7y}{19} = 45$,
$\frac{13x}{16} - \frac{7y}{19} = 31$.

q) $\frac{5x}{12} + \frac{6y}{11} = 32$,
$\frac{5x}{12} - \frac{9y}{11} = 2$.

r) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$,
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$.

s) $\frac{3}{4x} + \frac{7}{5y} = \frac{9}{20}$,
$\frac{9}{10y} - \frac{3}{4x} = \frac{17}{140}$.

t) $\frac{12}{x} + \frac{y}{3} = 5$,
$\frac{16}{x} - \frac{y}{3} = 2$.

u) $\frac{5}{x} + \frac{6y}{5} = 10\frac{2}{5}$,
$\frac{3}{2x} - \frac{6y}{5} = 2\frac{3}{5}$.

v) $\frac{3x}{8} + \frac{15}{y} = 6$, $\quad \frac{25}{y} - \frac{3x}{8} = 2.$

w) $\frac{7x}{9} - \frac{14}{y} = 27\frac{1}{3}$, $\quad \frac{63}{2y} + \frac{7x}{9} = 29\frac{1}{2}.$

x) $x + y = a$, $\quad x - y = b.$

y) $x + y = 3a + b$, $\quad x - y = a - 3b.$

z) $ax + by = a^2 - b^2$, $\quad ax - by = a^2 + b^2.$

α) $a^2x + by = a + b$, $\quad a^3x - by = a^2 - b.$

β) $ax - y = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$, $\quad bx - y = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$

γ) $a^2x - b^2y = \frac{b}{a - b}$, $\quad abx + b^2y = \frac{a}{a - b}.$

8. a) $5x + 7y = 50$, $\quad 9x + 14y = 97.$

b) $12x - 13y = 9$, $\quad 17y - 4x = 35.$

c) $8x - 5y = 49$, $\quad 7x + 15y = 101.$

d) $16x + 11y = 38$, $\quad 43y - 48x = 38.$

e) $12x + 7y = 309$, $\quad 60x - 49y = 285.$

f) $22x - 13y = 125$, $\quad 66x - 65y = 141.$

g) $21x - 15y = 72$, $\quad 28x + 25y = 6.$

h) $14x + 27y = 15$, $\quad 35x - 18y = 123.$

i) $13x + 4y = -38$, $\quad 7x - 3y = -5.$

k) $21x - 19y = 70$, $\quad 2x - 3y = -27.$

l) $39x - 38y = 1$, $\quad 91x - 57y = 4.$

m) $69x - 51y = 0$, $\quad 115x + 34y = 7.$

n) $58x - 75y = 4$, $\quad 100y - 87x = 21.$

o) $25x - 21y = -9$, $\quad 55x + 45y = 41.$

p) $91x - 85y = 109$, $\quad 52x - 34y = 106.$

q) $84x + 38y = 47$, $\quad 105x - 119y = -25\frac{1}{2}.$

r) $0{,}56x + 0{,}45y = 0{,}37$, $\quad 0{,}84x - 0{,}36y = 0{,}348.$

s) $7{,}2x + 1{,}5y = 0{,}42$, $\quad 4{,}8x - 2{,}5y = 0{,}98.$

t) $7{,}8x + 4{,}9y = -1$, $\quad 11{,}7x - 3{,}5y = 9{,}35.$

u) $2{,}6x - 5{,}1y = -50$, $\quad 3{,}9x - 3{,}4y = 10.$

v) $3{,}5x - 3{,}8y = -4{,}7$, $\quad 5{,}7y - 6{,}3x = 3{,}9.$

w) $0{,}8x - 0{,}9y = 1{,}1$, $\quad 0{,}5x + 0{,}7y = 7.$

x) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=50,$ $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=12.$

y) $\frac{x}{9}+\frac{y}{16}=6\frac{1}{2},$ $\frac{x}{18}-\frac{y}{40}=1.$

z) $\frac{2x}{15}+\frac{7y}{12}=3,$ $\frac{7x}{25}-\frac{5y}{16}=\frac{3}{20}.$

α) $\frac{7x}{18}-\frac{3y}{14}=7\frac{1}{6},$ $\frac{11x}{24}+\frac{8y}{35}=18\frac{11}{30}.$

β) $\frac{5x}{6}+\frac{9y}{25}=4{,}3,$ $\frac{7x}{9}-\frac{11y}{20}=-\frac{5}{12}.$

γ) $\frac{3x}{35}-\frac{2y}{27}=-\frac{1}{15},$ $\frac{5x}{42}+\frac{7y}{18}=4\frac{1}{3}.$

δ) $\frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-\frac{1}{2},$ $\frac{10}{x}+\frac{7}{y}=7\frac{1}{3}.$

ε) $\frac{25}{x}+\frac{18}{y}=16,$ $\frac{15}{x}-\frac{12}{y}=2.$

ζ) $\frac{7}{2x}+\frac{16}{3x}=\frac{5}{12},$ $\frac{7}{x}+\frac{21}{y}=\frac{37}{32}.$

η) $\frac{18}{5x}+\frac{28}{3y}=3\frac{8}{15},$ $\frac{27}{25x}-\frac{44}{15y}=-\frac{28}{75}.$

ϑ) $ax+by=a,$ $by-ay=b.$

ι) $(a+b)x-ay=a^2,$ $bx-(a-b)y=b^2.$

κ) $(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2,$ $(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2.$

λ) $(a+b)x-(a-b)y=4ab,$ $(a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2).$

μ) $(a-b)x+(a+b)y=a+b,$ $(a+b)x-(a-b)y=\frac{a^3+a^2b+3ab^2-b^3}{a^2-b^2}.$

9. a) $x+13=y+9,$ $y-5=21-x.$

b) $x+24=y+18,$ $y+5=35-x.$

c) $4x+11=42-y,$ $17+y=6+2x.$

d) $3x+17=11y+6,$ $4y-11=38-3x.$

e) $64-2x=5y-1,$ $8+5y=3x-2.$

f) $29=4x+20+3y,$ $7x-10=17-3y.$

g) $0{,}5x-1{,}9=0{,}3y-1,$ $2{,}5-0{,}3y=0{,}3x-1{,}4.$

h) $0{,}15=0{,}53-0{,}7x-0{,}5y,$ $0{,}13+0{,}5y=0{,}59-0{,}9x.$

i) $1{,}3x - 0{,}11 = 0{,}12 + 0{,}4y$,
$0{,}31 = 1{,}3x + 0{,}12 - 0{,}5y$.

k) $0{,}49 = 0{,}46 + 0{,}9x - 0{,}7y$,
$0{,}49 - 0{,}9x = 0{,}22 - 0{,}3y$.

l) $15x + 25y - 14 = 12x + 20y + 13$,
$40x + 32y - 53 = 31x + 17y + 28$.

m) $3x - 2y - 6x + 21 = 12x - 24y - 10$,
$35x - 80 - 60y + 9x - 6y = 8x - 16y$.

n) $3x + 9y + 210 = 10y + 270$,
$20y - (24y - 60) = 7x - (y - 24) - 9x - 72$.

o) $5x - 17 + 3y = 48 - (4x - 5) - (5y - 22)$,
$7x + 19 - 5y = 7y - (17 + 8x) + 3y - 9$.

p) $13x - (32 - 15y) = 105 - 12x - (11y - 68)$,
$26x + 79 - 32y = 12 - 9x - (23 - 7y)$.

q) $45x - (12y - 90) = 50y + 200$,
$44y - 40x + 790 - (168y - 2890) = 0$.

r) $53x - (27 - 19y) - 71 = 8y - (11x - 19)$,
$35x + 16 - 17y = 176 - 33x + 7y$.

s) $198 - 3x - (15y + 3) = 30x + 12y + 6$,
$8x + 4y + 32 = 20 + 15x - (5y - 75)$.

t) $ax - 4ab + by = ay - bx$,
$ax - by = bx + ay$.

u) $ax - by + ab = ay - b^2$,
$bx + ay - a^2 = by + ab$.

v) $ax - ay = \frac{ab}{a+b} - by$,
$bx - ay = by - \frac{a^2}{a-b} + b$.

w) $ax + by + b^4 = bx - ay + a^4$,
$ax + by - a^4 = ay - bx - b^4$.

10. a) $12(2x - 3y) - 7(x + y) = 84$,
$9(5x - 8y) = 8(3x - 5y + 21) + 696$.

b) $2(7x + 3y) - 4(6x - 5y) = 280$,
$5(11x + 7y) - 2(15x + 9y) = 1760$.

c) $10(5y - x) = 44 + 11(3x + 1)$,
$2x + 7y + 8 = 8(3x - 2y)$.

d) $2(3x-5y)-3(x-5)=56-4(6+2y)$,
$2(4x-3)-33=5(x-2y)+2(3y-5)$.

e) $3(5x-3)-12=5(2y+3)+2(6x-y)$,
$4(3x-2)+2(7-4x)=34+2(y-3)$.

f) $5x-y-3(x+2y)+27=2(2x-5)$,
$5(2x+7y)+10y=4(3x+14y)-3(2x+y)+8$.

g) $5(x-12y)-(3x-52y)=4(x+y-6)$,
$9(2x-10y)-2(4x-23y)-7(7y-6)=9$.

h) $6x(4y-3)-3y(8x-5)=8(x-3y)$,
$9y(4x+7)-6x(6y+1)=3(10x+3y)$.

i) $4x(15y-41)+12y(18-5x)=7(13y+19)$,
$9x(5y-1)-15y(3x-5)=12(8x+5)$.

k) $(8x+3)(6y-5)-(3x-1)(16y-11)=6(x-3)$,
$(7x-5)(6y+1)-(14x-19)(3y+2)=6(y+2)$.

l) $(12y-13)(3x+4)-(4x-3)(9y-11)=10(7y-3x)$,
$(15x+2)(4y+3)-(12y-11)(5x+2)=15(3x+2y)$.

m) $(6x-9)(12y+13)-(4y+5)(18x-31)=2(3x+7y)$,
$(6x-9)(9y+8)+(2x-3)(5+27y)=5(x+6y)$.

n) $x(x-y)-(x+y)(x-2a)=2a(x-y)$,
$(x-a)(x-y)-(x+a)(x+3a)=3a(x-7a)+y(x+a)$.

o) $(x+y)(a+b)+2a(a+b)=2(x+y)+a(a+b)^2$,
$[(x+y)+(a+b)][(x-y)-(a-b)]=[(x+y)-(a+b)][(x-y)+a-b)]$.

p) $(x+y+2a-3b)(x-y-a+4b)=(x+y-6a-3b)(x-y-3a+2b)$,
$(x+4a-3b)(y+a-3b)=(x-b)(y+3a-3b)$.

11. a) $\frac{5y-x}{11}=y-\frac{3x-2y+1}{2}$,
$\frac{2x+7y}{8}=3x-2y-1$.

b) $\frac{10y-x}{12}-\frac{2y-5}{7}=\frac{4x-y}{4}$,
$\frac{x+3y}{10}+7=\frac{y+9}{3}+\frac{3x-2y}{2}$.

c) $\frac{3x-5y}{7}-\frac{3y-2x}{3}=11+y$,
$\frac{x-3y}{9}-\frac{4x-3y}{6}=5-(x-y)$.

d) $\frac{6x-5y}{4}+\frac{7x+4y}{12}=\frac{5x+8y}{16}$,

$\frac{3x+4y}{8}-\frac{8y-x}{9}=\frac{2x+5y}{12}-2\frac{3}{4}$.

e) $\frac{4x+3y-3}{7}+\frac{5x-2y+7}{14}=\frac{9y-5x}{21}+\frac{3y}{4}$,

$\frac{3x+4y}{5}-\frac{14x-3y}{15}=\frac{4x-3y}{10}+\frac{3y-2x}{2}$.

f) $\frac{3x+4y}{12}-\frac{5y-3x}{9}=\frac{2x+3y}{6}-\frac{3y-2x}{3}$,

$\frac{1}{4}(x+4)+\frac{1}{10}(y-3)=\frac{3x}{4}-\frac{y-11}{2}$.

g) $\frac{5y-2x}{25}+\frac{5y+3x}{50}=\frac{3(x+y)}{40}+\frac{3y-2x}{10}$,

$\frac{3x+7y}{8}-\frac{5(x+y)}{12}=\frac{5x+6y}{20}-\frac{5y-14}{60}$.

h) $\frac{3x-5y}{3}+\frac{7-3x}{6}=\frac{7y-5x}{48}+\frac{3x+y}{16}$,

$\frac{4x-5y}{24}+\frac{x-4y}{15}=\frac{x}{10}-\frac{x-3y}{60}$.

i) $\frac{6x-5y}{10}-\frac{6x+y}{16}=\frac{3x-7y-1}{20}$,

$\frac{7x+2y}{13}-\frac{4x-y}{6}=\frac{8x+5y}{52}-\frac{7x-10}{26}$.

k) $\frac{3x+2}{14}-\frac{5x-8y}{12}=\frac{5x+y}{21}+\frac{8y-9x}{28}$,

$\frac{5x-2y}{18}+\frac{7x-y}{27}=\frac{7x+8y}{36}-\frac{14y-17x}{54}$.

l) $\frac{x-12y}{12}-\frac{3x-44y}{60}=\frac{x-y}{15}-\frac{2}{5}$,

$\frac{x-3y}{21}-\frac{7y-x}{63}=\frac{7y-6}{18}+\frac{x-5}{14}$.

m) $\frac{8x-y}{9}-\frac{7x+y}{12}=\frac{13x-3y}{16}-\frac{5x-4y}{18}$,

$\frac{11x-4y}{15}+\frac{11x+y}{20}=\frac{17x+2y}{30}-\frac{7y-5x}{12}$.

n) $\frac{x-0,3}{5}-\frac{y-0,1}{15}=\frac{3y-x}{25}+\frac{2x-3y-0,3}{3}$,

$\frac{4x-3y}{9}-\frac{4x+3y}{15}=\frac{6x+7y}{25}+\frac{9y-28x}{75}$.

o) $\frac{0,3x-0,2y}{33}+\frac{0,5y-0,15}{44}=\frac{0,3x+0,2y}{12}-\frac{0,3x+2y}{66}$,

$\frac{0,4x+0,05}{13}-\frac{0,7y+0,05}{26}=\frac{0,3x-0,2y}{39}+\frac{x-0,2}{3}$.

p) $\frac{0{,}11x-0{,}04y}{15}-\frac{0{,}13x-0{,}05y}{18}=\frac{x-0{,}1}{30}+\frac{y+0{,}1}{45}$,

$\frac{x+y}{6}-\frac{x-y-0{,}2}{21}=\frac{2x+3y+0{,}1}{42}-\frac{5x+2y-0{,}3}{14}$.

q*) $(2x+3y-7):(5x-2y+4)=3:4$,
$(7x-9y+15):(4x-5y+12)=2:5$.

r) $(4x+5y-7):(7x-3y+4)=2:5$,
$(9x-8y+4):(5x+4y+4)=7:9$.

s) $(7x+3y+2):(5x-4y-6)=5:6$,
$(8x+5y+2):(7x-6y-4)=4:11$.

t) $\frac{4y-3x}{8y+3x}=\frac{2}{13}=\frac{6y+x}{29x+21y}$.

u) $(5x-3y):(5y+3x):(3x+7y)=13:18:21$.

v) $(7x-4y):(6y-5x):(6y-x)=1:4:8$.

w) $(8x-3y):(5x-3):(4y+1)=3:4:7$.

x) $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$,

$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=1$.

y) $\frac{x+a}{a}-\frac{y+b}{b}=\frac{b^2-ay}{ab}$,

$\frac{x+b}{a^2}+\frac{y+a}{b^2}=\frac{x+y}{ab}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{a^2b^2}$.

z) $\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}=0$,

$(a+b)(x+y)=\frac{(a^2+b^2)(x-y)}{a-b}$.

α) $\frac{x}{a^2-ab+b^2}-\frac{y}{a^2+ab+b^2}=2b$,

$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a^2+2b^2$.

β) $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b}=2a-b$,

$\frac{x}{a}+\frac{y}{a-b}=a$.

γ) $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$,

$-\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}$.

*) Leichtere Aufgaben dieser Art s. Aufg. 52 u. 54 auf Seite 38.

12. a) $\frac{6x-5}{5} = 2x - 5,$

$\frac{4x-3y}{2x} = \frac{3y-22}{10}.$

b) $\frac{7x+8y}{6} = 7 + \frac{4y}{3},$

$\frac{5x-3y}{4} - (2x - 13) = \frac{7x-y}{3x} + y - 4.$

c) $\frac{6x^2-y+2x+4}{2x} = 3x + 1,$

$\frac{5x+y}{2y+7} - \frac{6x+y}{3} = \frac{2x-11}{4} - \frac{8y+3}{12}.$

d) $\frac{4x-9y^2}{3y} = 8 - 3y,$

$\frac{3x^2-9y+7}{3x} = x - \frac{1}{9}$

e) $\frac{5x^2-12y}{x} = 5x - 8,$

$\frac{7x+6y}{5x+3y} = y - \frac{3}{7}.$

f) $\frac{12+xy}{x} = 3 + y,$

$\frac{12+5y}{7y} + \frac{2x-5}{3} = \frac{x-4}{5y}.$

g) $\frac{9x^2+5xy}{3x} = 3x - y + 13\frac{1}{3},$

$\frac{5x-2y}{2y} = \frac{x+3}{5} - \frac{3y-7}{8}.$

h) $\frac{9x}{4x-3y} + \frac{5x}{3} = \frac{3x+4}{2},$

$\frac{3}{x} - \frac{9-xy}{x} = y - 2.$

i) $\frac{8y}{4x+3y} + 2y = \frac{5y-2}{2}.$

$\frac{12}{y} + \frac{3xy-4}{y} = 3x + 2.$

13. a) $5y - 8x = \frac{7}{6}xy,$

$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{15}.$

b) $\frac{7}{y} + \frac{3}{x} = 2,$

$5x - 6y = \frac{29}{7}xy.$

c) $\frac{4y}{5} - \frac{x}{3} = \frac{8xy}{3},$

$\frac{6}{x} - \frac{7}{6y} = 12.$

d) $x - \frac{5}{6}y = \frac{14}{3}xy,$

$\frac{15}{2x} + \frac{26}{3} = -\frac{1}{y}.$

e) $\frac{7}{2x}+\frac{16}{3y}=\frac{5}{6}$,
$16x-5y=\frac{2}{7}xy$.

f) $\frac{9}{4x}+\frac{4}{5y}=\frac{43}{60}$
$12x-7y=\frac{13}{5}xy$.

g) $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{22}{xy}$,
$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{38}{xy}$.

h) $5x-6y=xy$,
$\frac{4}{y}+3=\frac{5}{x}$.

i) $\frac{1}{x}-y=y$,
$x-\frac{8}{y}=-5$.

k) $\frac{3}{y}+x=4x$,
$5y-\frac{3}{x}=8$.

b. Mit mehr als zwei Unbekannten.

14. a) $x=29-y-z$,
$x=11+y-z$,
$x=5-y+z$.

b) $y=14-x+z$,
$y=x+z-12$,
$y=10+x-z$.

c) $z=25-x-y$,
$z=11-x+y$,
$z=2x+y-4$.

d) $3x=2y+5z-15$,
$3x=51-4y-5z$,
$3x=42-6y+2z$.

e) $2y=32-x-3z$,
$2y=62-4x-6z$,
$2y=9x-z-20$.

f) $6z=4+4y-2x$,
$6z=6+18y-12x$,
$6z=27-9x+3y$.

g) $6z=3x-5y-27$,
$9z=2x+4y-3$,
$4z=x+7y-3$.

h) $8y=5x-3z+1$,
$9y=2x+5z-7$,
$12y=3x-2z+23$.

i) $10x=7y-3z+22$,
$15x=4y+5z+27$,
$25x=3y+9z+51$.

k) $15x=8y+5z-32$,
$9x=5y-2z+10$,
$18x=13y-4z+8$.

l) $0{,}1x=0{,}2y-0{,}3z+0{,}2$,
$0{,}2x=0{,}1+0{,}3y-0{,}1z$,
$0{,}3x=0{,}9+0{,}1y-0{,}2z$.

m) $1{,}2x=0{,}89-0{,}4y+0{,}7z$,
$0{,}6x=0{,}28+0{,}5y-0{,}3z$,
$0{,}4x=0{,}35+0{,}6y-0{,}9z$.

n) $0{,}5y=0{,}9x+0{,}2z-0{,}38$,
$0{,}6y=0{,}64-0{,}7x+0{,}1z$,
$0{,}1y=0{,}22-0{,}2x-0{,}3z$.

o) $0{,}4z=0{,}3x-0{,}5y+0{,}37$,
$0{,}6z=0{,}37-0{,}4x+0{,}3y$,
$0{,}9z=0{,}76+0{,}2x-0{,}6y$.

15. a) $x-y+z=7$,
$2x=z$,
$8y=5z$.

b) $x+y-z=6$,
$3z=2y$,
$3x=5y$.

c) $y - x + z = 11,$
$2z = 3x,$
$3y = 4x.$

d) $x - y - z = 3,$
$2z = y,$
$x = 2y.$

e) $5x + 3y - 4z = -1,$
$3x = 2y,$
$3z = 5y.$

f) $13x + 11y - 14z = 19,$
$5z = 8x,$
$3z = 4y.$

g) $3x - 7y + 4z = 25,$
$5z = 6x - 1,$
$3y = 2x - 3.$

h) $8x - 9y + 12z = 4,$
$5x = 3y + 1,$
$10z = 4y - 2.$

i) $5x - 8y + 9z = 8,$
$4x = 7z + 5,$
$6y = 13z - 1.$

k) $7x - 3y + 8z = 23,$
$5x = 3z + 1,$
$4y = 7z - 1.$

l) $6x - 5y + 3z = 38,$
$9x - 5z = 16,$
$6y - 5z = 1.$

m) $5x - 6y + 3z = 14,$
$8x - 3y = 41,$
$12z + 5y = 61.$

n) $11x - 12y + 5z = 77,$
$5x + 12z = 165,$
$16y - 9x = 15.$

o) $9x - 4y + 3z = 49,$
$7x + 9y = 182,$
$2z - y = 8.$

p) $0{,}7x + 0{,}5y - 0{,}9z = 0{,}2,$
$0{,}4y + 0{,}3z = 0{,}15,$
$0{,}9x + 0{,}2z = 0{,}2.$

q) $0{,}2x + 0{,}3y - 0{,}5z = -7,$
$0{,}5x - 0{,}2y = 1,$
$0{,}7z - 0{,}4y = 13.$

r) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 3,$
$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = 3,$
$\frac{6}{z} + \frac{7}{y} = 5\frac{1}{2}.$

s) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = 2\frac{1}{2},$
$\frac{7}{x} - \frac{5}{z} = 2\frac{2}{3}.$
$\frac{5}{y} - \frac{3}{z} = \frac{3}{4}.$

t) $\frac{7}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z} = 3,$
$\frac{8}{y} - \frac{3}{x} = 18,$
$\frac{12}{z} - \frac{7}{x} = 34.$

u) $\frac{8}{x} + \frac{7}{y} - \frac{3}{z} = 10.$
$\frac{9}{y} + \frac{2}{x} = 20.$
$\frac{15}{z} - \frac{25}{x} = 35.$

16. a) $x + y = 7,$
$x + z = 9,$
$y + z = 12.$

b) $x + y = 58,$
$y - z = 8,$
$y - z = 4.$

c) $3x + 4y = 25,$
$4x - 3z = -3,$
$5y + 6z = 50.$

d) $7x - 9z = 19,$
$4x - 3y = 7,$
$2y + 3z = 9.$

e) $3y + 5z = 60,$
$8y - 9x = 22,$
$5y + 2z = 43.$

f) $9y - 4z = 5,$
$7y - 2x = 1,$
$3z + 4x = 15.$

g) $7x - 9y = 6,$
$5x + 8z = 54,$
$7y - 6z = 10.$

h) $5x - 3z = 34,$
$3x + 10y = 74,$
$2z + 15y = 79.$

i) $0{,}6x + 0{,}8y = 5,$
$0{,}3z - 0{,}4x = 0{,}3,$
$y + 1{,}2z = 10.$

k) $0{,}5x + 0{,}3y = 0{,}65,$
$0{,}4y - 0{,}2z = 0{,}22,$
$0{,}3x + 0{,}4z = 0{,}57.$

l) $1{,}75x - 2{,}25y = 1{,}5,$
$1{,}25x + 2z = 13{,}5,$
$1{,}75y - 1{,}5z = 2{,}5.$

m) $2{,}5x + 1{,}3z = 2{,}26,$
$1{,}5x + 5y = 3{,}7,$
$0{,}2z + 1{,}5y = 0{,}79.$

n) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 6,$
$\frac{x}{2} - \frac{z}{5} = 2,$
$\frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 8.$

o) $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{10} = 17,$
$\frac{5z}{4} - \frac{4y}{5} = 26,$
$\frac{3x}{2} - \frac{2z}{5} = 14.$

p) $\frac{2y}{5} - \frac{3z}{4} = -2,$
$\frac{4x}{7} + \frac{3z}{8} = 18,$
$\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 29.$

q) $\frac{3x}{4} + \frac{2z}{9} = 13,$
$\frac{5x}{6} - \frac{3y}{5} = 1,$
$\frac{4y}{3} - \frac{5z}{6} = 5.$

r) $(a-b)x + (a+b)y = a^2 + b^2,$
$(a+b)x - az = 0,$
$(a-b)y + bz = 2ab.$

s) $ax - (a+b)y = ab + b^2,$
$(a-b)x + (a+b)z = (a+b)^2,$
$(a-b)y + az = a^2 + b^2.$

t) $(a+b)x - (a-b)y = a^3 + a^2b - ab^2 + b^3,$
$(a-b)x + az = a^3,$
$(a+b)y - bz = b^3.$

17. a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$,
$\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$,
$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$.

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a+b$,
$\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=a-1$,
$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=b-1$.

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20}$,
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12}$,
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{30}$.

d) $\frac{5}{x}-\frac{6}{y}=\frac{1}{6}$,
$\frac{3}{y}+\frac{8}{z}=1$,
$8x-9z=\frac{5}{6}xz$.

e) $6y+7z=5\frac{1}{2}yz$,
$5y-4x=3xy$,
$3x+2z+3xz$.

f) $3x+7y=23xy$,
$3z+8x=38xz$,
$5y-6z=2yz$.

g) $7z-3y=2yz$,
$9x+2y=20xy$,
$7x+5z=33xz$.

h) $5x-3y=-21xy$,
$3x+7z=26xz$,
$8y+9z=5yz$.

i) $\frac{2x+3y}{xy}=\frac{3}{2}$,
$\frac{5x-z}{xz}=\frac{1}{12}$,
$\frac{4y+3z}{yz}=\frac{13}{12}$.

k) $\frac{5x-3y}{xy}=\frac{1}{12}$,
$\frac{3x+2z}{xz}=\frac{7}{8}$,
$\frac{5y-3z}{yz}=\frac{1}{8}$.

l) $5(2x-3y)+3(3x-5z)=31$,
$2(2x-3y)+5(5y-7z)=19$,
$4(3x-5z)-3(5y-7z)=19$.

m) $7(8x-5y)+3(6x+z)=55$,
$5(8x-5y)-6(4y-3z)=5$,
$4(6x+z)+3(4y-3z)=64$.

n) $\frac{15}{4x-3y}-\frac{8}{3x-2z}=1$,
$\frac{20}{4x-3y}+\frac{9}{2x+z}=7$,
$\frac{12}{3x-2z}-\frac{5}{2y+z}=\frac{4}{3}$.

o) $\frac{6}{6x-5y}-\frac{10}{7x-5z}=1$,
$\frac{8}{6x+5y}-\frac{9}{7y-4z}=5$,
$\frac{4}{7x-5z}+\frac{15}{7y-4z}=7$.

p) $\frac{4z}{2x+3y}+\frac{9}{2x-32}=4\frac{1}{8}$,
$\frac{28}{2x+3y}-\frac{15}{5y-4z}=\frac{1}{2}$.
$\frac{4}{2x-3z}-\frac{5}{5y-4z}=0$.

q) $\frac{15}{4x-5y}-\frac{7}{3y-10z}=10$,
$\frac{40}{3x+5z}-\frac{11}{3y-10z}=13$,
$\frac{60}{3x+5z}-\frac{5}{4x-5y}=2$.

r) $6 + \frac{5(4z-x)}{3x-2y} = 11(4z-x)$,
$5(2y-7z) + 3 = \frac{8(2y-7z)}{3x-2y}$,
$3(4z-x) + \frac{4(4z-x)}{2y-7z} = 7$.

s) $8(5z-6x) - 9(5x-4y) = (5x-4y)(5z-6x)$,
$4(7y-4z) + 2(5x-4y) = 3(5x-4y)(7y-4z)$,
$12(7y-4z) - 7(5z-6x) = \frac{1}{2}(7y-4z)(5z-6x)$.

18. a) $x + 2y + 3z = 32$,
$2x + y + 3z = 31$,
$3x - 2y + z = 8$.

b) $2x - 3y + 4z = 8$,
$3x + 4y - 5z = -4$,
$4x - 6y + 3z = 1$.

c) $7x - 6y + 2z = 4$,
$14x - 8y - z = 0$,
$2x + 9y - 3z = 19$.

d) $6x + 5y - 4z = 98$,
$9x - 15y + 6z = -6$,
$8x - 3y - 9z = 12$.

e) $9x - 7y - 6z = 18$,
$12x - 14y + 9z = 27$,
$18x - 35y + 15z = 0$.

f) $18x - 15y - 2z = 17$,
$12x + 25y - 14z = 53$,
$16x - 10y + 7z = 69$.

g) $2x - 3y - 4z = 6$,
$3x - 4y + 5z = 56$,
$5x + 7y - 9z = 106$.

h) $2x + 3y - 5z = 16$,
$3x - 2y + 4z = 36$,
$5x + 7y - 11z = 44$.

i) $3x - 4y + 2z = 8$,
$4x + 5y - 3z = 51$,
$5x - 6y - 7z = -4$.

k) $5x - 7y + 4z = 25$,
$3x + 8y - 5z = 22$,
$4x + 3y - 6z = 9$.

l) $5(3x-4y) - 4(7z-2x) + 3(5y-2z) = 16$,
$2(7x-2y) + 3(5x-4z) - 4(5y-3z) = 78$,
$3(2x+3y) - 3(3y-4z) + 4(4x-5z) = 108$.

m) $3(x+y) + 2(x+z) = 6y + 54$,
$8(2x-y) + 6(3x-z) - 3(3x+4) = 0$,
$3(x+2y) + 8(5x-2z) + 48 = 12z$.

n) $\frac{3y-2x}{4} + \frac{4z-3x}{3} + \frac{2y-7z}{6} = 0$,
$\frac{5x-3y}{15} - \frac{4y-3x}{5} + \frac{7y+2z}{9} = 2\frac{2}{15}$,
$\frac{7z}{8} - \frac{6x-5y}{12} + \frac{3z-8x}{3} = -5\frac{23}{24}$.

o) $\frac{5x-4y}{6} - \frac{5z-6x}{9} + \frac{7y-4z}{12} = \frac{1}{6}$,
$\frac{7y-4x}{4} - \frac{9z-5y}{12} + \frac{2x-3z}{16} = -\frac{11}{48}$,
$\frac{3x-y}{10} - \frac{3y-z}{15} - \frac{3z-x}{25} = -\frac{2}{25}$.

p) $0{,}6x + 0{,}8y - 0{,}5z = 4$,
$1{,}4x - 1{,}8y + 1{,}9z = 2$,
$1{,}8x + 2{,}4y + 2{,}2z = 12$.

q) $1{,}4x - 2{,}4y - 3z = -0{,}4$,
$0{,}8x + 3{,}2y + 4z = 11{,}2$,
$x - 2y + 1{,}8z = 7{,}6$.

r) $0{,}2x - 0{,}3y + 0{,}4z = 0{,}24$,
$0{,}6x + 0{,}8y - 0{,}5z = 0{,}21$,
$0{,}4x - 0{,}6y + 0{,}3z = 0{,}03$.

s) $3{,}6x - 3y - 0{,}4z = 0{,}34$,
$2{,}4x + 5y - 2{,}8z = 1{,}06$,
$3{,}2x - 2y + 1{,}4z = 1{,}38$.

t) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{4} = 24$,
$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - \frac{z}{5} = 8$,
$\frac{x}{6} - \frac{y}{15} + \frac{z}{10} = 6$.

u) $\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} - \frac{3z}{4} = 1$,
$\frac{3x}{2} - \frac{7y}{2} + z = -11$,
$\frac{3x}{4} + \frac{5y}{8} - \frac{z}{2} = 12\frac{1}{4}$.

v) $\frac{x}{2} - \frac{7y}{18} - \frac{z}{3} = 1$,
$\frac{4x}{3} - \frac{14y}{9} + z = 3$,
$\frac{6x}{5} - \frac{7y}{3} + z = 0$.

w) $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} - \frac{5z}{12} = 1\frac{1}{3}$,
$\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + z = 9$,
$\frac{5x}{8} + \frac{7y}{8} - \frac{5z}{4} = 6\frac{1}{8}$.

x) $(a-b)(x-y) + 4z = a^2 + 2ab + b^2$,
$bx - ay + abz = a^2b^2$,
$(a+b)x + (a-b)y - 2z = a^2 - b^2$.

y) $ax - by - (a-b)z = \frac{a^4 - b^4}{a+b}$,
$bx + ay - (a+b)z = 0$,
$(a+b)x - (a-b)y - (a-b)z = a^3 + b^3$.

19. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 12$,
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 18$,
$\frac{5}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 13$.

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 3$,
$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{9}{z} = 2$,
$\frac{5}{x} - \frac{6}{y} + \frac{15}{z} = 7$,

c) $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 2\frac{1}{4}$,
$\frac{10}{x} - \frac{9}{y} + \frac{6}{z} = 3\frac{3}{4}$,
$\frac{15}{x} - \frac{6}{y} + \frac{8}{z} = 7\frac{1}{8}$.

d) $\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{13}{z} = 2\frac{1}{18}$,
$\frac{8}{x} - \frac{15}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18}$,
$\frac{9}{x} - \frac{12}{y} - \frac{1}{z} = \frac{8}{9}$.

e) $3yz+2xz-xy=xyz$,
$5yz+2xy-3xz=2\frac{1}{6}xyz$,
$3xy+4yz-7xz=\frac{5}{6}xyz$,

f) $5xy-3xz+2yz=1\frac{5}{6}xyz$,
$4xz+8yz-3xy=5\frac{1}{3}xyz$,
$3yz+xz-4xy=-\frac{1}{3}xyz$.

g) $\frac{8}{3x-4y}-\frac{3}{7z-4x}+\frac{7}{4y-5z}=12$,
$\frac{4}{3x-4y}+\frac{9}{7z-4x}+\frac{1}{4y-5z}=0$,
$\frac{12}{3x-4y}-\frac{21}{7z-4x}+\frac{4}{4y-5z}=17$.

h) $\frac{6}{5y-6x}-\frac{8}{4x+3z}+\frac{7}{5y+4z}=-3$,
$\frac{9}{5y-6y}+\frac{12}{4x+3z}-\frac{7}{5y+4z}=7$,
$\frac{15}{5y-6x}-\frac{4}{4x+3z}+\frac{5}{5y+4z}=1$.

i) $2(5x-3y)+\frac{3(5x-3y)}{7x-2z}-\frac{5(5x-3y)}{2y+z}=8$,
$\frac{10(7x-2z)}{5x-3y}+\frac{20(7x-2z)}{2y+z}=9$,
$\frac{6(2y+z)}{5x-3y}+\frac{4(2y+z)}{7x-2z}-4(2y+z)=15$.

20. a) $3x-4y=4$,
$6y-5z=5$,
$z-u=2$,
$2u-x=-2$.

b) $5x-2z=18$,
$3y+4u=9$,
$6u-5z=-5$,
$2x+3u=8$.

c) $x+y+z=12$,
$x+y+u=13$,
$x+z+u=14$,
$y+z+u=15$.

d) $x+y-z=0$,
$x+y-u=4$,
$x+z-u=9$,
$y+z-u=2$,

e) $6x+4y+3z=36$,
$2x+y+3u=22$,
$10x+5z+8u=80$,
$2y+6z+3u=45$.

f) $2x-3y+5z=18$,
$3x+y-2u=-8$,
$6x-5z+3u=2$,
$9y+10z-5u=32$.

g) $x+y+z+u=18$,
$x-y+z-u=2$,
$x+y-z-u=4$,
$-x+y+z-u=0$.

h) $x+y+z+u=7$,
$x+2y+3z-u=6$,
$2x-3y-2z+4u=7$,
$3x-y+z+2u=10$.

i) $\begin{aligned} 2x + y - z + 2u &= 3, \\ x - 2y + z - u &= 1, \\ x - y + 2z - 2u &= 5, \\ 2x + 2y - 2z + u &= 9. \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} 3x + 6y - 18z - 4u &= 1, \\ x - 3y + z + u &= -6, \\ 4x + 2y - 2z - u &= 33, \\ 6x - 4y + 2z + u &= 27. \end{aligned}$

l) $\begin{aligned} 0{,}2x - 0{,}3y - 0{,}4z + 0{,}6u &= 0{,}8, \\ 0{,}3x - 0{,}2y - 0{,}1z + 0{,}3u &= 0{,}8, \\ 0{,}4x + 0{,}6y - 0{,}1z - 0{,}2u &= 0{,}5, \\ 0{,}6x + 0{,}3y + 0{,}3z - 0{,}5u &= 0{,}1. \end{aligned}$

m) $\begin{aligned} 0{,}5x - 1{,}5y + z - 2u &= -0{,}5, \\ -0{,}6x + 0{,}2y - z + 0{,}6u &= -6{,}8, \\ 2x - 2y + 1{,}5z - 0{,}5u &= 12{,}5, \\ -0{,}2x + 0{,}6y + 0{,}4z + 0{,}4u &= 3{,}4. \end{aligned}$

n) $\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} - \frac{u}{10} &= 8, \\ -\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - \frac{z}{9} + \frac{u}{5} &= 4, \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{15} - \frac{z}{6} - \frac{u}{4} &= 2, \\ -\frac{x}{6} + \frac{7y}{15} + \frac{z}{3} + \frac{u}{2} &= 21. \end{aligned}$

o) $\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} + \frac{u}{6} &= 2, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{9} - \frac{z}{2} + \frac{u}{3} &= 1, \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} + \frac{z}{6} - \frac{u}{4} &= -\frac{5}{6}, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - \frac{5u}{12} &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$

p) $\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} - \frac{1}{u} &= -8, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{6}{z} + \frac{2}{u} &= 34, \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{z} - \frac{6}{u} &= 10, \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{2}{z} - \frac{3}{u} &= -14. \end{aligned}$

q) $\begin{aligned} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{3}{z} + \frac{6}{u} &= 12, \\ \frac{9}{x} - \frac{3}{y} - \frac{4}{z} + \frac{3}{u} &= 19, \\ \frac{6}{x} + \frac{15}{y} - \frac{8}{z} + \frac{12}{u} &= 11, \\ \frac{3}{x} + \frac{25}{y} - \frac{6}{z} - \frac{4}{u} &= -20. \end{aligned}$

r) $\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4u - v &= 6, \\ 2x + 4y + z - u - 3v &= 11, \\ 3x - y + 2z - 2u + 4v &= 13, \\ 4x - 2y - 4z + 3u + 2v &= -1, \\ x + y + z + u + v &= 14. \end{aligned}$

s) $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z - 2u - 3v + 2w &= -2, \\ x + y + 2z + 2u - v - w &= 12, \\ 3x - 2y + 4z - u - 3w &= 5, \\ 4x + y - 6z + 4u - 2v &= -4, \\ -2x - 3y + 2z - v + 3w &= -1, \\ 6y + 3z - 4u - 2v + 6w &= 11. \end{aligned}$

Nr. 23. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.†)

a. Vorübungen.

1. a) Zwei Zahlen haben die Summe a und die Differenz b. Wie groß ist jede von ihnen?

Beispiele. 1. $a=34, b=28$. 2. $a=39, b=16$. 3. $a=5{,}4, b=8{,}3$.

b) Zwei Zahlen haben die Summe a und das Verhältnis $p:q$. Wie groß ist jede von ihnen?

Beispiele. 1. $a=25, p:q=3:2$. 2. $a=64, p:q=7:3$.
3. $a=5{,}6, p:q=3:5$. 4. $a=9\frac{3}{4}, p:q=8:5$.

c) Zwei Zahlen haben die Differenz d und das Verhältnis $p:q$. Wie groß ist jede von ihnen?

Beispiele. 1. $d=7, \quad p:q=5:6$. 2. $d=9, \quad p:q=5:8$.
3. $d=4{,}3, p:q=12:7$. 4. $d=10\frac{2}{5}, p:q=13:9$,

2. a) Zwei Zahlen verhalten sich wie $p:q$. Vermehrt man die erste um a und die zweite um b, so verhalten sich die entstandenen Zahlen wie $r:s$. Wie groß sind die ursprünglichen Zahlen?

Beispiele. 1. $p:q=2:3; \quad a=4, \quad b=10; \quad r:s=4:7$.
2. $p:q=5:7; \quad a=3, \quad b=3; \quad r:s=3:4$.
3. $p:q=3:5; \quad a=0{,}5, \quad b=0{,}3; \quad r:s=5:7$.

b) Ein Bruch wird gleich $\frac{a}{b}$, wenn man seinen Zähler um c vermehrt und seinen Nenner um d vermindert. Vermindert man jedoch den Zähler um c' und vermehrt den Nenner um d', so wird der Bruch gleich $\frac{a'}{b'}$. Wie heißt der Bruch?

Beispiele. 1. $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}, c=3, d=2; \quad \frac{a'}{b'}=\frac{1}{3}, c'=1, d'=4$.
2. $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}, c=3, d=3; \quad \frac{a'}{b'}=\frac{1}{5}, c'=2, d'=7$.
3. $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}, c=1, d=1; \quad \frac{a'}{b'}=\frac{2}{5}, c'=3, d'=4$.

c) Addiert man den Nenner eines Bruches zu seinem Zähler, so wird der Bruch gleich $\frac{a}{b}$. Subtrahiert man dagegen c von dem Nenner, so erhält man den Bruch $\frac{a'}{b'}$. Wie heißt der Bruch?

Beispiele. 1. $\frac{a}{b}=\frac{14}{9}, c=5, \frac{a'}{b'}=\frac{5}{4}$. 2. $\frac{a}{b}=1\frac{7}{8}, c=10, \frac{a'}{b'}=\frac{3}{2}$.

---

†) Aufgaben, die sich bequem auf Gleichungen mit einer Unbekannten zurückführen lassen, sind nur in sehr geringer Anzahl aufgenommen worden.

3. a) Die Quadrate zweier Zahlen, deren Summe gleich a ist, unterscheiden sich um d. Wie heißen die beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 23$, $d = 69$. 2. $a = 13$, $d = 39$.
2. $a = 2$, $d = 0{,}8$. 4. $a = 3\frac{1}{2}$, $d = 4\frac{1}{12}$.

b) Zwei Zahlen unterscheiden sich um d und ihre Quadrate um d'. Wie heißen die beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $d = 4$, $d' = 56$. 2. $d = 5$, $d' = 95$.
3. $d = 1$, $d' = 6$. 4. $d = 1\frac{3}{8}$, $d' = 5\frac{21}{64}$.

c) Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu ihrem Produkte wie $p : q$ und die Differenz ihrer reciproken Werte ist gleich d. Wie heißen die Zahlen?

Beispiele. 1. $p : q = 5 : 24$, $d = \frac{1}{24}$. 2. $p : q = 4 : 15$, $d = \frac{2}{15}$.

d) Die Differenz zweier Zahlen verhält sich zu ihrem Produkte wie $p : q$ und die Summe ihrer reciproken Werte ist gleich a. Wie heißen die Zahlen?

Beispiele. 1. $p : q = 1 : 30$, $a = \frac{2}{15}$. 2. $p : q = 2 : 45$, $a = \frac{8}{45}$.

4*.) a) Vermehrt man von 3 Zahlen mit der Summe s die 1te um a, die 2te um b und die 3te um c, so verhalten sie sich wie $p : q : r$. Wie heißen die Zahlen?

Beispiele. 1. $s = 57$, $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, $p : q : r = 3 : 4 : 5$.
2. $s = 47$, $a = 3$, $b = 5$, $c = 9$, $p : q : r = 5 : 4 : 7$.
3. $s = 63$, $a = 9$, $b = 23$, $c = 15$, $p : q : r = 2 : 11 : 9$.

5*.) a) Vermindert man von 3 Zahlen mit der Summe s die 1te um a, die 2te um b und die 3te um c, so verhalten sie sich wie $p : q : r$. Wie heißen die Zahlen?

Beispiele. 1. $s = 36$, $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, $p : q : r = 2 : 3 : 4$.
2. $s = 76$, $a = 5$, $b = 6$, $c = 5$, $p : q : r = 5 : 3 : 7$.
3. $s = 93$, $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$, $p : q : r = 7 : 5 : 4$.

b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben.

6. a) Arbeitet in einem Monat ein Mann 25 Tage und seine Frau 16 Tage, so verdienen sie zusammen 107 ℳ. Arbeitet dagegen der Mann 24 Tage und die Frau 20 Tage, so verdienen sie zusammen 112 ℳ. Wie viel ℳ verdient der Mann und wie viel ℳ die Frau an einem Tage?

b) Ein Gastwirt hatte bei seinem Bierverleger ein Faß Münchener Bier, 1 l zu 40 ₰, und ein Faß Lagerbier, 1 l zu 22 ₰, bestellt. Die Rechnung belief sich aber auf 51 ℳ statt auf 42 ℳ, da eine Ver-

*) Durch den Stern (*) werden die Aufgaben als Gleichungen mit drei Unbekannten gekennzeichnet.

wechslung der beiden Sorten eingetreten war. Wie viel l Münchener und wie viel l Lagerbier hatte der Gastwirt bestellt?

c) Ist eine von zwei Röhren 25 und die andere 28 Minuten geöffnet, so liefern sie zusammen 1465 l Wasser. Ist dagegen die erste 20 und die zweite 21 Minuten geöffnet, so liefern sie zusammen 1130 l Wasser. Wie viel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

d) Von zwei Röhren, die zusammen in 6 Minuten 240 l Wasser liefern, liefert die erste in 9 Minuten 20 l Wasser mehr als die zweite in 11 Minuten. Wie viel Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

e) Auf einer Landpartie betragen die Unkosten 168 ℳ. Trägt jeder Mann 4,50 ℳ und jede Frau 3,50 ℳ zu den Unkosten bei, so fehlen 10 ℳ. Trägt dagegen jeder Mann 5 ℳ und jede Frau 4 ℳ bei, so bleiben 10 ℳ übrig. Wie viel Männer und wie viel Frauen haben an der Landpartie teil genommen?

f) In einer Reitbahn von 240 m Länge ritten zwei Reiter A und B von derselben Stelle in entgegengesetzter Richtung ab und begegneten sich zum ersten Male 17 Sekunden nach Aufbruch des Reiters A. 20 Sekunden später trafen sie sich zum zweiten Male. Wie viel m legte jeder von ihnen in der Sekunde zurück, wenn B 6 Sekunden vor A abritt?

g) Ein Wagen fuhr von A nach B mit einer Geschwindigkeit von 9 km in der Stunde. Gleichzeitig mit ihm brach von B nach A ein Radfahrer auf, der dem Wagen nach 3 Stunden begegnete und ihn auf seiner Rückkehr von A, wo er ebenso lange wie der Wagen auf einer Zwischenstation gerastet hatte, nach einer $3\frac{1}{2}$ stündigen Fahrt 18 km vor B wieder überholte. Wie weit ist B von A entfernt und wie viel km legte der Radfahrer in der Stunde zurück?

h) Zwei Wandrer gingen sich von zwei Orten, die 38 km von einander entfernt sind, entgegen und trafen sich nach 4 Stunden. Wäre dagegen der erste 1,9 Stunden vor dem zweiten weggegangen, so hätten sie sich 3 Stunden nach dem Aufbruch des zweiten getroffen. Wie viel km legte jeder von ihnen in der Stunde zurück?

i) Zwei Freunde A und B gingen sich von zwei Orten, die 21 km aus einander liegen, entgegen und hofften, bei gleichzeitigem Aufbruch um 7 Uhr vorm. sich um 9 Uhr 20 Minuten treffen zu können. Da aber B schon um 6 Uhr aufbrach, so traf er mit A schon um 8 Uhr 50 Minuten zusammen, obschon A in der Stunde $\frac{3}{11}$ km weniger zurücklegte, als er gedacht hatte. Wie viel km wollte jeder von ihnen in der Stunde zurücklegen?

k) Zwei Radfahrer A und B fuhren sich aus einer Entfernung von 222 km entgegen und waren nach 3 Stunden noch 123 km von einander entfernt. A machte nun eine Pause von einer Stunde, während B nur $\frac{1}{2}$ Stunde ruhte. Wie viel km legte jeder der beiden Fahrer

in der Stunde zurück, wenn sie sich $7\frac{1}{2}$ Stunden nach Beginn ihrer Fahrt begegneten?

l) Die Rheinstrecke zwischen Rüdesheim und Köln beträgt 160 km. Fährt ein Dampfer um 6 Uhr vorm. von Rüdesheim nach Köln, so begegnet er um $10\frac{3}{4}$ Uhr einem von Köln kommenden Dampfer, der um 8 Uhr von dort abfährt. Beginnt dagegen der erste Dampfer um 8 Uhr und der zweite um 6 Uhr seine Fahrt, so begegnen sie sich erst um $11\frac{1}{4}$ Uhr. 1) Wie viel km legt jeder Dampfer in der Stunde zurück? 2) Wie viel km legt das Wasser und wie viel km legt jeder Dampfer stündlich in ruhigem Wasser zurück, wenn beide in diesem gleich schnell fahren?

m) Zwei Reiter ritten sich aus zwei Städten entgegen und begegneten sich $3\frac{1}{4}$ Stunden nach Aufbruch des ersten Reiters. Wäre dieser ebenso viel Stunden vor dem zweiten weggeritten, wie er nach ihm wegritt, so hätten sie sich $4\frac{3}{4}$ Stunden nach seinem Aufbruch getroffen. Wie weit sind die beiden Städte von einander entfernt und wie viel Stunden später als der zweite Reiter brach der erste auf, wenn der erste 12 km und der zweite 9 km in der Stunde zurücklegte?

n) Jemand bestimmte in seinem Testament, daß seine Nichte von seinem Vermögen doppelt so viel wie jeder seiner beiden Neffen und die Armen seiner Vaterstadt den Rest im Betrage von 10000 ℳ erhalten sollten. Bei der Vollstreckung des Testaments stellte sich heraus, daß das Vermögen des Erblassers nur $\frac{9}{10}$ der angenommenen Größe besaß. Damit aber darunter die Armen nicht zu leiden hätten, verzichtete die Nichte auf den 8ten und jeder der Neffen auf den 12ten Teil der ihnen vermachten Summe. Wie groß sollte die ganze Erbschaft sein und wie viel ℳ sollte jeder der Neffen erhalten?

7. a) Bei einem Rennen auf einer Bahn von 525 m Länge durfte der Radfahrer A 15 Sekunden vor B abfahren. Trotzdem wurde er von B zum ersten Male in 276 Sekunden und 210 Sekunden später zum zweiten Male überrundet. Wie viel m legte jeder der beiden Fahrer bei gleichmäßiger Fahrt in der Sekunde zurück?

b) Ein Bote ging von Potsdam nach Brandenburg und wurde von einem Radfahrer, der gleichzeitig mit ihm von Berlin aufgebrochen war, in $2\frac{1}{3}$ Stunden eingeholt. Wäre der Bote aber 2 Stunden vor dem Radfahrer aufgebrochen, so hätte dieser ihn erst in 3 Stunden eingeholt. Wie viel km legte jeder der beiden in der Stunde zurück, wenn Potsdam von Berlin 28 km entfernt ist?

c) In einer Radfahrbahn von 500 m Länge fuhren zwei Radfahrer von derselben Stelle und in derselben Richtung ab. Der erste, der 5 Sekunden später als der zweite abfuhr, überrundete diesen zum ersten Male in 280 Sekunden und würde ihn in 328 Sekunden zum

ersten Male überrundet haben, wenn er 13 Sekunden nach ihm aufgebrochen wäre. Wie viel m legt jeder von ihnen in der Sekunde zurück?

d) Ein Wagen fuhr von A nach B. $2\frac{1}{2}$ Stunden nach seiner Abfahrt folgte ihm ein Radfahrer, der nach 2 Stunden noch 13 km hinter ihm war und nach weiteren 3 Stunden ihn bereits um 5 km überholt hatte. Wie viel km legte der Wagen, bez. der Radfahrer in der Stunde zurück?

e) Ein Wasserbehälter kann durch eine von zwei Röhren gefüllt und durch die andere entleert werden. Wird die erste 10 Minuten vor der zweiten geöffnet, so befinden sich 15 Minuten nach Öffnung der zweiten in dem Behälter 170 l Wasser. Wird dagegen die erste 20 Minuten vor der zweiten geöffnet, so befinden sich 40 Minuten nach Öffnung der ersten in dem Behälter 320 l Wasser. Wie viel l Wasser liefert jede der beiden Röhren in der Minute?

f) Bei einem Rennen auf einer Bahn von 552 m Länge hatte der Radfahrer A eine Vorgabe von 63 m erhalten. Trotzdem überrundete ihn der Radfahrer B bereits in 246 Sekunden zum ersten Male. Hätte A seine Fahrt 16 Sekunden früher als B beginnen dürfen, ohne noch eine Vorgabe zu erhalten, so wäre er erst in 288 Sekunden zum ersten Male überrundet worden. Wie viel m legte jeder der Radfahrer durchschnittlich in der Sekunde zurück?

g) Bei einem Rennen auf einer Bahn von 450 m Länge erhielt B von A eine Vorgabe von 35 m und durfte außerdem 5 Sekunden vor ihm abfahren. Trotzdem überrundete ihn A zum ersten Male in 180 Sekunden und zum zweiten Male in weiteren 150 Sekunden. Wie viel m legte jeder der beiden Fahrer in der Sekunde zurück?

h) In einer Reitbahn von 240 m Länge ritten zwei Reiter A und B hintereinander her. Obschon B vor A einen Vorsprung von 25 m hatte und 10 Sekunden vor ihm abreiten durfte, wurde er doch von A in 220 Sekunden zum ersten Male und nach weiteren 160 Sekunden zum zweiten Male überholt. Wie viel m legte jeder der beiden Reiter in der Sekunde zurück?

i) Bei einem Rennen, das auf einer Bahn von 870 m Länge über 3 Runden ging, hatte A von B eine Vorgabe von 58 m erhalten. Da beide gleichzeitig das Zielband erreichten, mußte das Rennen unter denselben Bedingungen noch einmal gefahren werden. Diesmal aber legte B in der Sekunde durchschnittlich 22,5 cm mehr zurück als vorher, während A seine Geschwindigkeit nicht mehr zu erhöhen vermochte. Wie viel m legte jeder der beiden Fahrer beim ersten Rennen in der Sekunde zurück, wenn B beim zweiten Rennen 38 m (genauer $37\frac{5}{7}$ m) vor A das Zielband erreichte?

8. a) Laufen zwei Schlittschuhläufer in einer kreisförmigen Bahn von 480 m Länge hinter einander, so wird B von A alle 240 Sekunden

überholt. Dagegen treffen sich die beiden alle 40 Sekunden, wenn sie einander entgegenfahren. Wie viel m legt jeder von ihnen in der Sekunde zurück?

b) Ein Dampfer legte eine Strecke von 84 km stromaufwärts in 6 Stunden und stromabwärts in 4 Stunden zurück. Wie viel km legt das Wasser in der Stunde zurück und wie viel km würde der Dampfer in ruhigem Wasser stündlich zurücklegen?

c) In einer Bahn von 546 m Länge fuhren zwei Radfahrer gleichzeitig von derselben Stelle und in derselben Richtung ab. Der erste überrundete den zweiten in 273 Sekunden. Die beiden Fahrer würden sich dagegen bereits nach 21 Sekunden begegnen, wenn sie in entgegengesetzter Richtung die Bahn durcheilten. Wie viel m legte jeder von ihnen in der Sekunde zurück?

9. a) Von zwei Wanderern braucht der erste für eine Strecke 3 Stunden mehr als der zweite, da er in der Stunde 1 km weniger als dieser zurücklegt. Würden dagegen beide Wanderer ihre Geschwindigkeit um 1 km in der Stunde erhöhen, so würde der erste nur 2 Stunden mehr brauchen als der zweite. Wie lang ist die Strecke und wie viel km legt der erste in einer Stunde zurück?

b) Ein Schnellzug braucht, um von A nach B zu fahren, $3\frac{1}{2}$ Stunden weniger als ein Personenzug, da er stündlich 20 km mehr als dieser zurücklegt. Dagegen braucht ein Güterzug, der stündlich 10 km weniger als der Personenzug zurücklegt, für die Strecke $3\frac{1}{2}$ Stunden mehr als dieser. Wie lang ist die Strecke von A nach B und wie viel km legt der Schnellzug in der Stunde zurück?

c) Wenn ein Zug auf der Fahrt von A nach B seine fahrplanmäßige Geschwindigkeit in der Stunde um 5 km erhöht, so kommt er in B 20 Minuten zu früh an. Fährt er dagegen in der Stunde 5 km langsamer, so verspätet er sich um 25 Minuten. Wie weit ist A von B entfernt und wie viel km beträgt die fahrplanmäßige Geschwindigkeit des Zuges in der Stunde?

0. a) In einer Garnison würden die vorhandenen Lebensmittel für eine Kompagnie Infanterie und eine Schwadron Husaren 30 Tage ausreichen. Da aber die Husaren nach 12 Tagen abreiten, so reichen die Vorräte für die Infanterie allein noch 27 Tage. Wie lange würden die Lebensmittel für jede Abteilung allein ausgereicht haben?

b) Zwei Fuhrleute A und B hatten es übernommen, die Steine zum Bau einer Straße in 12 Tagen anzufahren. Nach 8 Tagen mußte B jedoch aufhören, da eins seiner Pferde erkrankt war. In wie viel Tagen hätte jeder Fuhrmann allein die Steine herbeigefahren, wenn A nach dem Ausscheiden des B noch 7 Tage zu thun hatte?

c) Beginnen zwei Arbeiter gemeinsam eine Arbeit, so werden sie

damit in $9\frac{3}{5}$ Stunden fertig. Fängt dagegen der zweite 4 Stunden später als der erste an zu arbeiten, so brauchen sie zusammen noch 8 Stunden, um die Arbeit zu beenden. Wie viel Stunden braucht jeder von ihnen, um die ganze Arbeit allein auszuführen?

d) Zum Bau einer Straße hatten zwei Dörfer A und B so viel Arbeiter geschickt, daß er in 18 Tagen fertig werden konnte. Da aber nach 12 Tagen die Leute des Dorfes A nicht mehr kamen, so mußten die Leute des Dorfes B noch 10 Tage allein arbeiten, um die Straße fertig zu machen. In wie viel Tagen würde jedes Dorf allein die Arbeit ausgeführt haben?

e) Zwei Röhren füllen einen Behälter, wenn die erste 15 und die zweite 18 Minuten geöffnet bleibt. Wird dagegen die erste auf 12 und die zweite auf 15 Minuten geöffnet, so wird nur $\frac{41}{50}$ des Behälters gefüllt. In wie viel Minuten würde jede Röhre den Behälter allein füllen?

f) Zwei Arbeiter A und B sollten eine Arbeit in 8 Stunden ausführen. Da A sich jedoch um 3 Stunden verspätet hatte, so wurde nur $\frac{51}{56}$ der Arbeit fertig, obwohl beide eine Stunde über die festgesetzte Zeit hinaus arbeiteten. In wie viel Stunden hätte jeder Arbeiter die ganze Arbeit allein fertig gebracht?

g) Ein Behälter, der durch die erste von zwei Röhren gefüllt und durch die zweite entleert werden kann, läuft 30 Minuten nach Öffnung der ersten Röhre über, wenn diese 10 Minuten vor der zweiten geöffnet wird. Dagegen ist 15 Minuten nach Öffnung der ersten Röhre nur $\frac{13}{20}$ des Behälters gefüllt, wenn die zweite Röhre 8 Minuten nach der ersten geöffnet wird. Wie viel Minuten brauchen die beiden Röhren, um den (leeren) Behälter zu füllen, bez. um den gefüllten Behälter zu entleeren?

h) Zwei Röhren füllen einen Behälter in Zeitabschnitten, die sich wie 5 : 6 verhalten. Werden beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so fehlen nach 15 Minuten in dem Behälter noch 60 l. Wird dagegen die erste 3 Minuten vor der zweiten geöffnet, so sind 18 Minuten nach Öffnung der ersten bereits 12 l übergeflossen. Wie viel l faßt der Behälter und wie viel Minuten braucht die erste Röhre, um ihn zu füllen?

11. a) Ein Vater ist jetzt 12 Jahre älter als seine beiden Söhne zusammen und war vor 8 Jahren 3 mal so alt wie der ältere und $4\frac{1}{2}$ mal so alt wie der jüngere Sohn. Wie alt ist jetzt jeder von den dreien?

b) In einer Familie sind Mutter, Tochter und Enkelin zusammen 80 Jahre alt. Wenn nun in 10 Jahren die Mutter 4 mal und die Tochter $2\frac{1}{5}$ mal so alt sein wird wie die Enkelin, wie alt ist dann jetzt jede von ihnen?

c) In einer Familie ist der Großvater doppelt so alt wie sein

Sohn und sein ältester Enkel zusammen. Nach 12 Jahren wird der Großvater nur $1\frac{1}{3}$ mal so alt wie die beiden zusammen und $1\frac{4}{5}$ mal so alt wie sein Sohn sein. Wie alt ist jeder von ihnen?

12. a) In einer 3stelligen Zahl mit der Quersumme 15 ist die zweite Ziffer um 2 größer als die erste und $\frac{2}{3}$ mal so groß wie die erste und dritte zusammen. Wie heißt die Zahl?

b) Vertauscht man in einer 3stelligen Zahl, deren letzte Ziffer gleich der Summe der beiden ersten und deren zweite Ziffer um 4 kleiner als die erste ist, die zweite mit der dritten Ziffer, so wird die Zahl um 54 größer. Wie heißt die Zahl?

c) Der Wert einer 3stelligen Zahl, deren letzte Ziffer gleich der Summe der beiden ersten und gleich dem 4ten Teile der aus diesen bestehenden Zahl ist, nimmt um 594 zu, wenn ihre letzte und erste Ziffer mit einander vertauscht werden. Wie heißt die Zahl?

d) Vertauscht man in einer 3stelligen Zahl mit der Quersumme 10 die erste Ziffer mit der zweiten, so nimmt die Zahl um 90 ab. Setzt man aber die dritte Ziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 207 zu. Wie heißt die Zahl?

13.*) a) Drei Röhren, durch die ein Wasserbehälter gefüllt werden kann, liefern zusammen

455 l, wenn die erste 8, die zweite 9 und die dritte 14 Minuten,
481 l, „ „ „ 12, „ „ 15 „ „ „ 7 „
618 l, „ „ „ 16, „ „ 6 „ „ „ 21 „

geöffnet ist. Wie viel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

b) Von drei Röhren, die zusammen in 5 Minuten 295 l Wasser liefern, liefert die erste in 6 Minuten 4 l Wasser mehr als die zweite und dritte zusammen in 4 Minuten, während die zweite in $19\frac{1}{2}$ Minuten ebenso viel liefert, wie die erste und dritte zusammen in 10 Minuten. Wie viel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

c) Arbeitet ein Meister mit 8 Gesellen und 6 Lehrlingen, so beträgt der Tagelohn 45 *M*. Arbeitet er mit 12 Gesellen und 9 Lehrlingen, so verdienen sie zusammen täglich 65 *M*. Wenn dagegen der Meister mit 4 Gesellen und 12 Lehrlingen arbeitet, so beträgt der Tagelohn nur 43 *M*. Wie viel *M* werden für den Meister, einen Gesellen und einen Lehrling als Tagelohn berechnet?

d) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt und durch eine dritte geleert werden. In dem Behälter befinden sich

25 l, wenn die erste Röhre 6, die zweite 8 und die dritte 9 Minuten,
62 l, „ „ „ „ 9, „ „ 16 „ „ „ 15 „
49 l, „ „ „ „ 15, „ „ 4 „ „ „ 10 „

geöffnet bleibt. Wie viel l Wasser fließen in der Minute durch jede der drei Röhren?

e) Die in einem Zuge befindlichen Personen, die sämtlich von

Berlin nach Aachen fuhren, hatten zusammen 6300 ℳ Fahrgeld bezahlt. Die zweite Klasse enthielt 3 mal so viel Personen wie die beiden anderen zusammen und brachte $3\frac{1}{5}$ mal so viel ein wie diese. Wie viel Personen waren in jeder Klasse, wenn das Fahrgeld für die erste Klasse 30 ℳ, für die zweite 20 ℳ und für die dritte 15 ℳ betrug?

f) Auf einer Landpartie, an der Männer, Frauen und Kinder, im ganzen 36 Personen teilgenommen hatten, betrugen die Kosten 75 ℳ. Wurden diese so verteilt, daß auf einen Mann 4 ℳ, auf eine Frau 3 ℳ und auf ein Kind 1,50 ℳ kamen, so behielt der Veranstalter der Partie 7,50 ℳ übrig. Dagegen hätte er 3 ℳ zulegen müssen, wenn er für einen Mann 3,50 ℳ, für eine Frau 2,75 ℳ und für ein Kind 1,25 ℳ berechnet hätte. Wie viel Männer, Frauen und Kinder hatten an der Partie teilgenommen?

g) In einem Keller liegen drei gleichgroße, nur zum Teil mit Wein gefüllte Fässer. Um eins der Fässer zu füllen, müßte man von dem Inhalt

des zweiten den 5ten Teil und des dritten den 3ten Teil in das erste,
oder „ ersten „ 8ten „ „ „ dritten „ 6ten „ „ „ zweite,
„ „ ersten die Hälfte „ „ zweiten „ 5ten „ „ „ dritte
gießen. Wie viel l Wein sind in jedem der drei Fässer, wenn alle drei zusammen 1200 l enthalten, und wie viel l faßt jedes Faß?

14.*) a) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar in

70 Minuten, wenn die erste und die zweite Röhre,
84 „ „ „ erste „ „ dritte „
140 „ „ „ zweite „ „ dritte „

gleichzeitig geöffnet werden. In wie viel Minuten wird jede Röhre den Behälter allein füllen?

b) Ein Wall kann durch drei Arbeiter in 6 Stunden aufgeworfen werden. Fängt der dritte erst an, wenn die beiden ersten Arbeiter schon 3 Stunden gearbeitet haben, so brauchen sie zusammen noch $4\frac{1}{4}$ Stunden. Kommt dagegen der zweite 3 Stunden später als die beiden anderen, so brauchen sie zusammen noch 4 Stunden. Wie viel Stunden braucht jeder der drei Arbeiter, um den Wall allein aufzuwerfen?

c) Drei Röhren füllen einen Behälter, wenn

die erste 20, die zweite 15 und die dritte 6 Minuten,
oder „ „ 12, „ „ 14 „ „ „ 14 „

geöffnet bleibt. Wird dagegen

die erste 8, die zweite 11 und die dritte 8 Minuten

geöffnet, so wird nur $\frac{2}{3}$ des Behälters gefüllt. In wie viel Stunden würde jede Röhre den Behälter allein füllen?

d) Ein Behälter, der durch die beiden Röhren I und II gefüllt und durch eine dritte Röhre III entleert werden kann, wird gefüllt, wenn

die Röhre I 25, die Röhre II 18 und die Röhre III 20 Minuten,
„ „ I 20, „ „ II 21 „ „ „ III 18 „

geöffnet bleiben. Ist dagegen

die Röhre I 15, die Röhre II 9 und die Röhre III 10 Minuten

geöffnet, so wird nur $\frac{2}{3}$ des Behälters gefüllt. In wie viel Minuten würde jede der Röhren I und II den Behälter füllen und die Röhre III den vollen Behälter entleeren?

15.*) a) Bei einem Rennen wurde von zwei Radfahrern, deren Geschwindigkeiten sich wie 25 : 28 verhielten, der erste von dem zweiten bei einer Vorgabe von 42 m in 28 Sekunden eingeholt und nach weiteren 7 Minuten zum ersten Male überrundet. Wie lang ist die Bahn und wie viel m legten die beiden Fahrer in der Minute zurück?

b) Zwei Radfahrer fahren sich von zwei Orten A und B aus entgegen. Fährt der erste 2 Stunden vor dem zweiten ab, so trifft er ihn nach einer 5stündigen Fahrt. Bricht er dagegen $3\frac{2}{3}$ Stunden nach dem zweiten auf, so begegnet er ihm schon nach $2\frac{1}{3}$ Stunden. Fahren schließlich beide zu gleicher Zeit ab, so sind sie nach $3\frac{1}{2}$ Stunden noch 19 km von einander entfernt. Wie weit liegen A und B auseinander und wie viel km legt jeder Fahrer in der Stunde zurück?

c) Zwei Reiter ritten sich aus zwei Orten A und B entgegen und trafen sich 2 Stunden nach dem Aufbruch des zweiten, der $3\frac{7}{12}$ Stunden nach dem ersten von B fortritt. Nach der Begegnung ritten sie bis B, bez. A weiter, hielten sich dort etwas auf und begannen zu derselben Zeit ihre Rückkehr. Dabei begegneten sie sich nach 4 Stunden, während sie eine Stunde früher noch $21\frac{1}{2}$ km von einander entfernt waren. Wie viel km legte jeder der Reiter in der Stunde zurück und wie weit ist A von B entfernt?

d) Bei einem Rennen wurde der Radfahrer A von B trotz einer Vorgabe von 60 m nach $6\frac{2}{3}$ Minuten zum ersten Male und nach weiteren 6 Minuten zum zweiten Male überrundet. Hätte A die Fahrt ohne Vorgabe 12 Sekunden vor B beginnen dürfen, so wäre er von B erst in $7\frac{2}{5}$ Minuten zum ersten Male überrundet worden. Wie lang ist die Bahn und wie viel m legte jeder Radfahrer in der Sekunde zurück?

e) Bei einem Rennen auf einer Bahn von 600 m Länge erhielt der Radfahrer A von B eine Vorgabe und durfte seine Fahrt 5 Sekunden vor B beginnen. Trotzdem holte ihn dieser in 54 Sekunden ein und überrundete ihn zum ersten Male in weiteren $6\frac{2}{3}$ Minuten. Bei einem zweiten Rennen zwischen denselben Fahrern, bei dem A 3 m Vorgabe mehr als vorher erhielt und die Fahrt 8 Sekunden vor B

beginnen durfte, wurde A von B in 8 Minuten zum ersten Male überrundet. Wie viel m legte jeder Fahrer in der Sekunde zurück und wie groß war die Vorgabe bei dem ersten Rennen?

16.*) a) Vermehrt man in einer 3stelligen Zahl die erste Ziffer um 2, so wird sie gleich der Hälfte der aus den beiden letzten Ziffern bestehenden Zahl. Vermehrt man die zweite Ziffer um 5, so erhält man den 9ten Teil der aus der ersten und dritten Ziffer bestehenden Zahl. Vermindert man schließlich die erste Ziffer um 3 und vermehrt die dritte um 3, so ist die aus den beiden ersten Ziffern bestehende Zahl 3 mal so groß wie die entstehende dritte Ziffer. Wie heißt die Zahl?

b) Eine 3stellige Zahl ist 28 mal so groß wie ihre Quersumme und ihre letzte Ziffer ist gleich dem 5ten Teil der aus den beiden ersten Ziffern bestehenden Zahl, wenn diese um 4 vermindert wird. Wird dagegen die erste Ziffer um 8 vermehrt, so erhält man den 4ten Teil der aus den beiden letzten Ziffern bestehenden Zahl. Wie heißt die Zahl?

c) Vertauscht man in einer 3stelligen Zahl
die erste Ziffer mit der zweiten, so wird die Zahl um 180 kleiner,
„ zweite „ „ „ dritten, „ „ „ „ „ 54 größer,
und „ erste „ „ „ dritten, so fehlen nur 32 an dem Doppelten der Zahl. Wie heißt die Zahl?

d) Vertauscht man in einer 3stelligen Zahl
die erste Ziffer mit der zweiten, so wird die Zahl um 270 kleiner,
und „ zweite „ „ „ dritten, „ „ „ „ „ 18 größer.
Stellt man ferner die erste Ziffer an das Ende, so wird die Zahl um 279 kleiner. Wie heißt die Zahl?

17. a) Die Stromstärke einer Batterie sank auf 2 Amp., wenn ein Widerstand von 3 Ohm, und auf 3 Amp., wenn ein Widerstand von $1\frac{1}{3}$ Ohm eingeschaltet wurde. Wie groß war ursprünglich die Stromstärke und der gesamte Widerstand der Batterie?

b) Fügt man zu einer Batterie von 5 Elementen, die eine Stromstärke von $1\frac{1}{2}$ Amp. liefert, 3 Elemente derselben Art hinzu, so steigt die Stromstärke auf 2,2 Amp., während der gesamte Widerstand um 0,72 Ohm zunimmt. Wie groß ist die Spannung eines Elements und der Widerstand des eingeschalteten Stromkreises?

c) Bei einem äußeren Widerstand von 2 Ohm liefern 5 Elemente eine Stromstärke von 2 Amp., wenn sie hinter einander —, und eine Stromstärke von 0,72 Ohm, wenn sie parallel geschaltet werden. Wie groß ist die Spannung und der innere Widerstand eines Elementes?

c. Prozentrechnung.

18. a) Zwei Kapitalien, von denen das erste zu $3\frac{1}{2}\%$ und das zweite zu 4% ausgeliehen ist, bringen 52 ℳ Zinsen. Wäre dagegen das erste

zu 4% und das zweite zu $3\frac{1}{2}$% ausgeliehen, so würden die Zinsen 53 ℳ betragen. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

b) Zwei Kapitalien von 1200 ℳ und 1400 ℳ bringen jährlich 111 ℳ Zinsen und würden 110 ℳ Zinsen bringen, wenn man ihre Prozentsätze mit einander vertauschte. Zu wie viel % sind die Kapitalien ausgeliehen?

c) Zwei Kapitalien bringen jährlich gleichviel Zinsen, wenn das erste zu $3\frac{3}{4}$% und das zweite zu $4\frac{1}{5}$% ausgeliehen wird. Wird dagegen das erste zu 4% und das zweite zu $4\frac{1}{5}$% verliehen, so bringt das erste 19 ℳ Zinsen mehr als das zweite. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

d) Wird ein Kapital auf 3 Jahre zu $3\frac{3}{4}$% ausgeliehen, so bringt es ebensoviel Zinsen, wie ein zweites Kapital, das zu $4\frac{1}{5}$% auf $3\frac{1}{2}$ Jahre ausgeliehen ist. Steht dagegen das erste $3\frac{1}{2}$ Jahre lang zu $4\frac{1}{5}$%, so trägt es 65,04 ℳ Zinsen mehr als das zweite zu 4% in $3\frac{3}{4}$ Jahren. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

e) Zwei Kapitalien wachsen auf dieselbe Summe an, wenn das erste zu $4\frac{1}{2}$% auf $2\frac{2}{3}$ Jahre und das zweite zu 4% auf $3\frac{1}{2}$ Jahre ausgeliehen ist. Wie groß sind die beiden Kapitalien, wenn beim ersten die Zinsen 100 ℳ weniger betragen als beim zweiten?

f*) Hat jemand von drei Kapitalien das erste und zweite zu 4% und das dritte zu 5% ausgeliehen, so erhält er 1280 ℳ Zinsen. Hat er das erste und dritte zu 4% und das zweite zu 5% ausgeliehen, so bringt dieses 350 ℳ Zinsen weniger als die beiden anderen zusammen. Hat er dagegen das erste zu 5%, das zweite zu 4% und das dritte zu $3\frac{1}{2}$% ausgeliehen, so bringt das erste 380 ℳ Zinsen weniger als die beiden anderen zusammen. Wie groß sind die drei Kapitalien?

g*) Jemand hatte von drei Kapitalien das erste zu 4% auf 3 Jahre, das zweite zu $4\frac{1}{2}$% auf $2\frac{2}{3}$ Jahre und das dritte zu $3\frac{3}{4}$% auf $2\frac{2}{5}$ Jahre ausgeliehen. Wie groß waren die Kapitalien,

wenn das erste und zweite zusammen 1416 ℳ,
„ erste „ dritte „ 1200 ℳ
und „ zweite „ dritte „ 1080 ℳ

Zinsen brachten?

19. a) Ein Kapital von 4500 ℳ brachte 300 ℳ Zinsen und würde 375 ℳ Zinsen gebracht haben, wenn es $\frac{1}{2}$ Jahr länger ausgeliehen gewesen wäre. Wie lange und zu wie viel % war das Kapital ausgeliehen?

b) Ein zu 4% ausgeliehenes Kapital bringt in einer gewissen Zeit 119 ℳ Zinsen und würde 170 ℳ Zinsen liefern, wenn es $1\frac{1}{2}$ Jahre länger ausgeliehen wäre. Wie groß ist das Kapital und auf wie viel Jahre ist es ausgeliehen?

c) Ein Kapital bringt jährlich 50 ℳ Zinsen und würde, wenn man den Zinsfuß um $\frac{1}{2}$% vergrößerte, jährlich 56,25 ℳ Zinsen tragen. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel % ist es ausgeliehen?

d) Jemand hatte drei Kapitalien, von denen das zweite 800 ℳ mehr und das dritte 200 ℳ weniger betrug als das erste, so ausgeliehen, daß das zweite 1% weniger und das dritte $\frac{1}{8}$% Zinsen mehr brachte als das erste. Wie groß war das erste Kapital und zu wie viel % war es ausgeliehen, wenn alle drei Kapitalien jährlich gleichviel Zinsen brachten?

e) Ein Kapital ist in 8 Jahren auf 11180 ℳ angewachsen und würde, wenn es $\frac{1}{2}$% Zinsen mehr gebracht hätte, in 5 Jahren schon auf 10427,5 ℳ angewachsen sein. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel % ist es ausgeliehen?

20. a) Ein Weinhändler hatte 2500 l Rheinwein und 4000 l Moselwein zusammen für 7200 ℳ gekauft und gewinnt im Ganzen 1000 ℳ, wenn er den Preis für 1 l beim Rheinwein um 15% und beim Moselwein um $12\frac{1}{2}$% erhöht. Wie viel ℳ hatte er für 1 l von jeder Sorte bezahlt?

b) Ein Gastwirt ließ sich 50 Flaschen Rheinwein und 40 Flaschen Rotwein zusammen für 160 ℳ schicken. Unterwegs zerbrachen 3 Flaschen Rheinwein und 4 Flaschen Rotwein. Um den Schaden auszugleichen und außerdem an der Sendung noch 107 ℳ zu gewinnen, erhöhte er den Preis für eine Flasche Rheinwein um 1,40 ℳ und für eine Flasche Rotwein um 1,50 ℳ. Wie viel ℳ bezahlte er für eine Flasche von jeder Sorte?

c) Eine Obstfrau kaufte 25 kg Aepfel und 20 kg Birnen zusammen für 20 ℳ. Beim Auswiegen büßte sie 1 kg Aepfel und $\frac{1}{2}$ kg Birnen ein. Wenn sie nun für 1 kg Aepfel 10 ₰ und für 1 kg Birnen 20 ₰ mehr nahm, als sie ausgegeben hatte, und im Ganzen 5,65 ℳ verdiente, wie viel hatte sie dann für 1 kg von jeder Sorte bezahlt?

d) Ein Kaufmann hatte für 375 ℳ zwei Sorten Kaffee gekauft, von denen 1 kg 2,40 ℳ, bez. 1,80 ℳ kostete. Beim Rösten verlor die erste Sorte 14% und die zweite 16% ihres Gewichts. Wenn er nun 1 kg gebrannten Kaffee der ersten Sorte für 3 ℳ und der zweiten Sorte für 2,50 ℳ verkaufte und im Ganzen $40\frac{1}{2}$ ℳ verdiente, wie viel kg von jeder Sorte hatte er dann gekauft?

e) Ein Mehlhändler kaufte für 2140 ℳ Weizen und Roggen und bezahlte den Centner beim Weizen mit 15 ℳ und beim Roggen mit 8 ℳ. Er verkaufte 1 kg Weizenmehl für 40 ₰ und 1 kg Roggenmehl für 30 ₰ und verdiente, da der Erlös für die Kleie alle Unkosten deckte, an der ganzen Ware 840 ℳ. Wie viel Centner Weizen und

Roggen hatte er gekauft, wenn der Weizen 95% und der Roggen 90% Mehl lieferte?

f*) Ein Kaufmann kaufte für 181 ℳ Thee, Kaffee und Zucker, im ganzen 73 kg, und bezahlte für 1 kg Thee 6 ℳ, für 1 kg Kaffee 2,20 ℳ und für 1 kg Zucker 0,60 ℳ. Beim Verkauf verdiente er am Thee $16\frac{2}{3}$%, am Kaffee 15% und am Zucker $33\frac{1}{3}$% und gewann dabei am Thee 3,75 ℳ mehr als am Kaffee und Zucker zusammen. Wie viel von jeder Sorte hatte er gekauft?

21. a) Von drei Partien Ware sollte die erste 40 ℳ mehr und die zweite 90 ℳ weniger kosten als die dritte. Da aber bei der ersten 2% Rabatt mehr und bei der zweiten 2% Rabatt weniger bewilligt wurden als bei der dritten, so wurden für die erste nur 32 ℳ mehr und für die zweite nur 81,6 ℳ weniger bezahlt als für die dritte. Wie viel ℳ sollte diese kosten und wie viel % betrug bei ihr der Rabatt?

b) Von zwei Posten Ware sollte die erste 60 ℳ mehr kosten als die zweite. Wurden beim ersten 2% Rabatt mehr als beim zweiten berechnet, so sank der Preisunterschied auf 48 ℳ. Wurden umgekehrt beim ersten 2% Rabatt weniger berechnet als beim zweiten bewilligt waren, so stieg der Unterschied auf 62,40 ℳ. Wie viel ℳ sollte der erste Posten kosten und wie viel % betrug der Rabatt bei dem zweiten?

c) Bei dem ersten von zwei Posten Ware, der 20 ℳ weniger als der zweite kosten sollte, wurde ein gewisser Rabatt bewilligt. Betrug der Rabatt beim ersten Posten 1% weniger als beim zweiten, so kostete er nur 11 ℳ weniger als dieser. Wurden dagegen beim zweiten Posten 3% Rabatt mehr als beim ersten bewilligt, so kostete er sogar 3,40 ℳ weniger als der erste. Wie viel ℳ sollte der erste Posten kosten und wie viel % betrug bei ihm der Rabatt?

d) Wurden bei drei Partien Ware, von denen die dritte ebensoviel kosten sollte wie die beiden anderen zusammen, 4% Rabatt bewilligt, so wurden sie zusammen mit 783,36 ℳ bezahlt. Wurde dagegen der Rabatt von 4% bei der ersten und dritten Partie in Hundert und bei der zweiten auf Hundert berechnet, so wurden für die beiden ersten 0,32 ℳ mehr bezahlt als für die dritte. Wie viel ℳ sollte jede der drei Partien Ware kosten?

22. a) Zwei Wechsel über a ℳ und b ℳ, von denen der erste n Monate später fällig war als der zweite, wurden für a' ℳ, bez. für b' ℳ verkauft. Wie viel % Diskont wurden berechnet, und nach wie viel Monaten war der erste Wechsel fällig?

Beispiele. 1. $a = 800, b = 1200, n = 3, a' = 773, b' = 1173.$
2. $a = 650, b = 720, n = 4, a' = 624, b' = 704.$
3. $a = 1450, b = 825, n = 5, a' = 1386{,}2, b' = 805{,}2.$

b) Ein Bankier verkaufte n Monate vor seiner Verfallzeit für a ℳ einen Wechsel, den er n' Monate früher für a' ℳ gekauft hatte. Auf welche

Summe lautete der Wechsel und wie viel % Diskont mußte der Bankier bewilligen, wenn er beim Einkauf d% Diskont mehr berechnet hatte, als er beim Verkauf bewilligte?

Beispiele. 1. $a = 2950$, $a' = 2900$, $n = 5$, $n' = 3$, $d = 1$.
2. $a = 2379$, $a' = 2330$, $n = 3$, $n' = 4$, $d = 1\frac{1}{2}$.
3. $a = 1780$, $a' = 1732{,}5$, $n = 4$, $n' = 5$, $d = 1\frac{2}{3}$.

c) Ein Bankier kaufte unter Berechnung von p% Diskont einen Wechsel für a ℳ, n Monate später verkaufte er den Wechsel mit p'% für a' ℳ. Auf welche Summe lautete der Wechsel und wie viel Monate hatte er noch zu laufen, als ihn der Bankier verkaufte?

Beispiele. 1. $a = 5880$, $a' = 5925$, $n = 3$, $p = 4$, $p' = 5$.
2. $a = 4365$, $a' = 4401$, $n = 4$, $p = 3\frac{3}{5}$, $p' = 4\frac{2}{5}$.
3. $a = 3438$, $a' = 3552$, $n = 5$, $p = 6$, $p' = 4$.

23. a) Ein Kaufmann hat für Ware nach n Monaten a ℳ zu bezahlen. Es ist ihm jedoch bequemer, an zwei verschiedenen **Terminen** seiner Verpflichtung nachzukommen, indem er einen Teil seiner Schuld nach p und den Rest nach q Monaten abträgt. Wie groß sind die beiden Raten?

Beispiele. 1. $a = 2500$, $n = 8$, $p = 5$, $q = 10$.
2. $a = 1650$, $n = 10$, $p = 4$, $q = 15$.
3. $a = 1275$, $n = 11$, $p = 6$, $q = 23$.

b) Jemand wünscht eine Schuld in zwei Raten, deren erste d ℳ größer als die zweite sein soll, so abzutragen, daß die erste Rate p Monate vor und die zweite q Monate nach dem Fälligkeitstermin bezahlt wird. Der Gläubiger schlägt dagegen vor, die Schuld durch zwei sich um d' unterscheidende Raten so zu tilgen, daß die kleinere nach r und die größere nach s Monaten ausgezahlt wird. Wie groß ist die Schuld und nach wie viel Monaten ist sie fällig?

Beispiele. 1. $d = 200$, $d' = 600$, $p = 4$, $q = 5$, $r = 4$, $s = 13$.
2. $d = 100$, $d' = 300$, $p = 7$, $q = 8$, $r = 5$, $s = 10$.
3. $d = 400$, $d' = 200$, $p = 4$, $q = 6$, $r = 4\frac{1}{3}$, $s = 11$.

d. Mischungsrechnung. Aufgaben aus der Physik.

24. a) Mischt man zwei Sorten Wallnüsse, von denen 1 kg 65 ₰, bez. 80 ₰ kostet, so stellt sich der Preis für 1 kg der Mischung auf 75 ₰. Er würde sich aber nur auf 70 ₰ stellen, wenn von der geringeren Sorte 8 kg mehr und von der besseren 14 kg weniger genommen würden. Wie viel kg von jeder Sorte werden zu der ersten Mischung genommen?

b) Ein Weinhändler stellt aus zwei Sorten Wein eine Mischung her. Nimmt er von der ersten Sorte 200 l und von der zweiten 600 l, so kann er mit einem Gewinn von 20 % das Liter der Mischung

für 1,50 ℳ verkaufen. Nimmt er aber von der ersten Sorte 250 l und von der zweiten 500 l, so gewinnt er 25%, wenn er das Liter der Mischung für 1,50 ℳ verkauft. Wie viel ℳ hatte er für 1 l von jeder Sorte bezahlt?

c) Ein Theehändler mischte 24 kg Thee mit 18 kg einer zweiten Sorte und verdiente 87 ℳ, wenn er für 1 kg der Mischung 1,5 ℳ mehr nahm, als ihn 1 kg der zweiten Sorte gekostet hatte. Bei einer zweiten Mischung, zu der er 20 kg der ersten und 25 kg der zweiten Sorte genommen hatte, verdiente er 92 ℳ, wenn er für 1 kg der Mischung 2,60 ℳ mehr nahm, als er für 1 kg der ersten Sorte gegeben hatte. Wie viel ℳ hatte ihn 1 kg der beiden Sorten gekostet?

d) Ein Kaufmann stellte aus zwei Sorten Kaffee, 1 kg für 2 ℳ, bez. 1 kg für 2,60 ℳ, eine Mischung her, deren Mischungspreis sich auf 2,72 ℳ stellte, da beim Rösten 15% des Gewichts verloren gingen. Hätte er von der ersten Sorte 9,2 kg und von der zweiten 0,8 kg mehr genommen, so hätte sich der Mischungspreis nur auf 2,70 ℳ gestellt, obschon dann 16% des Gewichts beim Rösten eingebüßt worden wären. Wie viel kg von jeder Sorte hatte er genommen?

e) Ein Mehlhändler ließ einen Posten Roggen mit einem Posten Weizen zusammenmahlen und verkaufte 1 kg Mehl für 40 ₰. Dabei verdiente er 236 ℳ, obschon die Mischung nur $92\frac{1}{2}$% Mehl geliefert hatte. Eine zweite Mischung, zu der er 7 Centner Roggen mehr und 2 Centner Weizen weniger als vorher genommen hatte, lieferte nur 90% Mehl und brachte einen Gewinn von 273 ℳ, wenn das kg Mehl ebenfalls für 40 ₰ verkauft wurde. Wie viel Centner Roggen und Weizen waren in der ersten Mischung enthalten, wenn ein Centner Roggen 9 ℳ und Weizen 15 ℳ gekostet hatte?

25. a) Mischt ein Destillateur 5 kg Spiritus mit 15 kg einer zweiten Sorte, so wird die Mischung 65prozentig†). Mischt er jedoch 12 kg der ersten Sorte mit 18 kg der zweiten, so erhält er 62prozentigen Spiritus. Wie viel % Alkohol enthält jede Sorte?

b) Ein Goldschmied hatte zwei Sorten Gold. Legiert er 136 g der ersten mit 68 g der zweiten Sorte, so erhält er 14karätiges†) Gold. Fügt er zu dieser Legierung noch 204 g der zweiten Sorte hinzu, so wird sie 16karätig. Wieviel-karätig ist jede Sorte?

c) Werden 1,4 kg Silber mit 3,5 kg einer zweiten Sorte legiert, so entsteht Silber mit dem Feingehalt†) 825. Werden dagegen 3,2 kg der ersten und 2,4 kg der zweiten Sorte legiert, so hat das Silber den Feingehalt 775. Wie groß ist der Feingehalt der beiden Sorten?

26. a) Mischt man 8 kg Schwefelsäure mit einer 80prozentigen Schwefelsäure, so wird die Mischung 60prozentig. Nimmt man von

†) Vergl. die Anmerkungen auf Seite 98, 99 u. 101.

der ersten Sorte $\frac{1}{2}$ kg weniger und von der zweiten 4 kg mehr, so wird die Mischung 65prozentig. Wieviel-prozentig ist die erste Sorte und wie viel kg der zweiten Sorte wurden bei der ersten Mischung verwandt?

b) Ein Goldschmied legierte 10karätiges Gold mit 240 g einer zweiten Sorte und erhielt dadurch 14karätiges Gold. Um jedoch 16karätiges Gold zu erhalten, hätte er zu der Legierung 40 g von der ersten und 600 g von der zweiten Sorte hinzufügen müssen. Wie viel g von der ersten Sorte hatte er genommen und wieviel-karätig war die zweite Sorte?

c) Ein Goldschmied legierte Silber mit dem Feingehalt 540 und 3 kg einer zweiten Sorte und erhielt dadurch Silber mit dem Feingehalt 660. Um hieraus Silber mit dem Feingehalt 700 herzustellen, hätte er 0,5 kg der ersten und 3,4 kg der zweiten Sorte hinzufügen müssen. Wie viel kg der ersten Sorte hatte er genommen und welchen Feingehalt besaß die zweite Sorte?

27. a) Jemand hat aus 42prozentiger und 74prozentiger Salzsole eine 56prozentige Mischung hergestellt. Gießt er zu der Mischung 30 kg der ersten und 130 kg der zweiten Sorte hinzu, so hat er 62-prozentige Salzsole. Wie viel kg von jeder Sorte hat er genommen?

b) Eine Legierung aus 8karätigem und 18karätigem Gold war 14karätig. Wurden zu der Legierung 30 g der ersten und 270 g der zweiten hinzugefügt, so entstand 15karätiges Gold. Wie viel g von jeder Sorte waren zu der ersten Legierung genommen worden?

c) Ein Goldschmied wollte Silber mit dem Feingehalt 750 herstellen und legierte zu dem Zwecke zwei Sorten mit dem Feingehalt 680, bez. 815. Da er sich aber verrechnet hatte und die Legierung nur den Feingehalt 730 besaß, so mußte er noch 2,8 kg der ersten und 8 kg der zweiten Sorte hinzufügen. Wie viel kg von jeder Sorte hatte er zuerst genommen?

28. a) Gießt man Wasser von 12° mit Wasser von 40° zusammen, so erhält man eine Mischung†) von 28°. Fügt man dann 2 kg der ersten und 1 kg der zweiten Sorte hinzu, so entsteht eine Mischungstemperatur von 26°. Wie viel kg von jeder Sorte enthält die Mischung?

b) Läßt man in eine Badewanne 60 kg Leitungswasser und 40 kg Wasser aus dem Badeofen ein, so hat das Wasser in der Wanne eine Temperatur von 42°. Läßt man aber 210 kg Wasser aus der Leitung und 90 kg aus dem Badeofen hinzulaufen, so entsteht eine Mischungstemperatur von 36°. Wie viel Grad hat das Wasser in der Leitung und in dem Badeofen?

---

†) Vergl. die Anmerkung auf Seite 102 bei Nr. 106.

c) Gießt man Wasser von 10^0 in 3 kg Wasser von höherer Temperatur, so erhält man Wasser von 25^0. Fügt man von jeder Sorte $\frac{1}{2}$ kg hinzu, so steigt die Temperatur auf $25\frac{3}{4}{}^0$. Wie viel kg Wasser der ersten Sorte sind in der ersten Mischung enthalten und welche Temperatur besitzt die zweite Sorte?

29. a) Zur Bestimmung der **Schmelzwärme** wurde über Schnee von 0^0 so viel Wasser von 60^0 gegossen, daß Wasser von 20^0 entstand. Bei einem zweiten Versuche wurden von dem Wasser 2 kg und von dem Schnee 1 kg mehr als vorher genommen und zu Wasser von 18^0 vereinigt. Wie viel kg Schnee und Wasser wurden zu dem ersten Versuche benutzt?

b) Jemand goß über Schnee von 0^0 5 kg warmes Wasser und erzielte dadurch eine Mischung von 10^0. Zu einem zweiten Versuche nahm er 1 kg Schnee mehr als vorher und 7 kg um 6^0 wärmeres Wasser und erhielt eine Mischung von 14^0. Wie viel kg Schnee benutzte er zu dem ersten Versuche und welche Temperatur besaß das dabei verwandte Wasser?

c) Über Schnee von 0^0 wurde Wasser von 60^0 gegossen, und da der Schnee nicht ganz schmolz, noch 5 kg Wasser von 74^0 hinzugefügt. Nun erhielt die Mischung eine Temperatur von 15^0. Zu einem zweiten Versuche wurden 0,5 kg Schnee weniger und 3,5 kg Wasser von 60^0 mehr als vorher genommen und dabei eine Mischung von $7\frac{1}{2}{}^0$ erzielt. Wie viel kg Schnee und Wasser von 60^0 wurden zu dem ersten Versuche benutzt?

d) Über 3,5 kg Schnee von 0^0 wurde zuerst Wasser von 70^0 und dann Wasser von 85^0 gegossen und dadurch eine Mischung von 10^0 hergestellt. Bei einem zweiten Versuche wurden über 2,8 kg Schnee von 0^0 von der ersten Sorte 0,5 kg mehr und von der zweiten 0,2 kg weniger genommen und dabei eine Mischungstemperatur von 20^0 erreicht. Wie viel kg Wasser von jeder Sorte wurden zu dem ersten Versuche benutzt?

e) Über 1,5 kg Schnee von 0^0 wurden 2 kg Wasser gegossen, und da ein Teil des Schnees ungeschmolzen blieb, 1 kg Wasser von höherer Temperatur hinzugefügt. Die Mischung erhielt dadurch eine Temperatur von 10^0. Zu einem zweiten Versuche wurden von jeder Wassersorte zunächst 1 kg mehr als vorher gemischt und dann 3 kg Schnee in die Mischung geworfen. Wenn diesmal das Wasser eine Temperatur von 5^0 erhielt, wie viel Grad hatte dann jede der beiden Wassersorten?

30. a) Zur Bestimmung der **Verdampfungswärme** des Wassers ließ jemand Wasserdampf von 100^0 in ein Gefäß mit Wasser von 12^0 und erhöhte dadurch die Temperatur des Wassers auf 57^0. Bei einem zweiten Versuche ließ er 0,5 kg Wasserdampf mehr als vorher in die

$3\frac{3}{4}$fache Menge Wasser von 7°. Wie viel kg Wasserdampf und Wasser wurden bei dem ersten Versuche benutzt, wenn bei dem zweiten die Temperatur des Wassers auf 28° stieg?

b) In 5 kg Wasser wurde Wasserdampf von 100° geleitet und dadurch Wasser von 67° hergestellt. Bei einem zweiten Versuche wurden in 9 kg Wasser von derselben Temperatur 0,5 kg Wasserdampf mehr als vorher gelassen. Wie hoch war die Temperatur des benutzten Wassers und wie viel kg Wasserdampf wurden beim ersten Versuche in dasselbe geleitet, wenn beim zweiten Versuche die Mischung 72,7° zeigte?

c) Jemand ließ Wasserdampf von 100° auf Schnee von 0° strömen und erhielt dabei Wasser von $79\frac{1}{3}$°. Bei einem zweiten Versuche, zu dem er 0,2 kg Wasserdampf weniger und 0,5 kg Schnee mehr als vorher genommen hatte, zeigte das entstandene Wasser $39\frac{1}{2}$°. Wie viel kg Wasserdampf und Schnee wurden zu dem ersten Versuche benutzt?

31. a) Gießt man 3,5 kg Wasser und 2,5 kg Quecksilber mit der **spezifischen Wärme** 0,028 zusammen, so erhält man eine Mischungstemperatur von 18°. Nimmt man jedoch von demselben Wasser 1,96 kg und von demselben Quecksilber $9\frac{1}{5}$ kg, so entsteht eine Mischungstemperatur von 38°. Welche Temperatur besitzen das Wasser und das Quecksilber?

b) 18 kg Bronce mit der spezif. Wärme 0,075 wurden in 27 kg Wasser geworfen und dadurch die Temperatur desselben auf 18° erhöht. Bei einem zweiten Versuche wurden 12 kg derselben Bronce von gleicher Temperatur in $13\frac{1}{2}$ kg Wasser, das 12° Wärme mehr als das erste besaß, geworfen und dadurch das Wasser auf 33° gebracht. Welche Temperatur besaßen die Bronce und das zu dem ersten Versuche benutzte Wasser?

c) Ein Plättbolzen aus Eisen mit der spezif. Wärme 0,114, der eine Temperatur von 218° angenommen hatte, fiel in ein Gefäß mit Wasser von 9° und erhöhte dessen Temperatur auf 18°. Hätte der Bolzen eine Temperatur von 262° gehabt und wären in dem Gefäß 10,45 kg Wasser mehr als vorher gewesen, so wäre dessen Temperatur auf 12° gestiegen. Wie schwer ist der Plättbolzen und wie viel kg Wasser befinden sich in dem Gefäß?

d) Gießt man Spiritus von 60° und Wasser von 5° zusammen, so erhält die Mischung eine Temperatur von 30°. Hätte man den Spiritus vorher auf 75° erwärmt und 1 kg Wasser weniger genommen, so wäre eine Mischung von 40° entstanden. Wie viel kg Spiritus und Wasser sind in der ersten Mischung enthalten, wenn der benutzte Spiritus die spezif. Wärme 0,625 besitzt?

e) Gießt man 2,5 kg Quecksilber mit der spezif. Wärme 0,028 in Alkohol von 10° mit der spezif. Wärme 0,602, so nimmt die Mischung eine Temperatur von 15° an. Gießt man ein zweites Mal 3,75 kg

Quecksilber von derselben Temperatur in eine gleiche Menge Alkohol von 52°, so erhält man eine Mischung von 58°. Welche Temperatur besitzt das Quecksilber und wie viel kg Alkohol werden bei dem ersten Versuch benutzt?

32. a) Gießt man 25 Liter Spiritus mit 35 l einer zweiten Sorte zusammen*), so erhält die Mischung das **spezifische Gewicht** 0,875. Nimmt man jedoch von beiden Sorten gleich viel l, so erhält die Mischung das spezif. Gewicht 0,87. Wie groß ist das spezif. Gewicht der beiden Sorten?

b) Gießt man in Schwefelsäure mit dem spezif. Gewicht 1,6 von einer anderen Sorte 15 l, so erhält man eine Mischung mit dem spezif. Gewicht 1,75. Nimmt man aber von der ersten Sorte 5 l mehr als vorher und gießt 10 l der zweiten Sorte hinzu, so erhält die Mischung das spezif. Gewicht 1,7. Wie viel l der ersten Sorte sind in der ersten Mischung enthalten und wie groß ist das spezif. Gewicht der zweiten Sorte?

c) Aus zwei Flüssigkeiten mit den spezif. Gewichten 1,3 und 0,95 wurde eine Mischung mit dem spezif. Gewicht 1 hergestellt. Gießt man zu der Mischung 15 l der ersten und 30 l der zweiten Flüssigkeit hinzu, so erhält die Mischung das spezif. Gewicht 1,02. Wie viel l von jeder Flüssigkeit wurden zu der ersten Mischung genommen?

33. a) Jemand hatte aus Wasser und Alkohol (spez. Gew. = 0,8) Spiritus mit dem spezifischen Gewicht 0,9 hergestellt. Gießt er 8 kg Alkohol zu der Mischung hinzu, so sinkt ihr spezif. Gewicht auf 0,85. Wie viel kg Wasser und Alkohol enthielt die erste Mischung?

b) Um aus Messing mit dem spezif. Gewicht 8 Messing mit dem spezif. Gewicht 8,2 herzustellen, muß man zu der Legierung 33 kg Kupfer (spez. Gew. = 8,8) und 9 kg Zink (spez. Gew. = 7,2) hinzufügen. Wie viel kg Kupfer und Zink enthält das vorhandene Messing?

c) Aus Bronce mit dem spezif. Gewicht 8,2 soll eine Figur gegossen werden. Da aber nur Bronce mit dem spezif. Gewicht 8,05 vorhanden ist, so müssen mit dieser 35,2 kg Kupfer (spez. Gew. = 8,8) und 7,3 kg Zinn (spez. Gew. = 7,3) legiert werden, um die verlangte Bronce herzustellen. Wie viel kg Kupfer und Zinn befinden sich in der vorrätigen Bronce?

d) Aus wieviel-karätigem Gold ist ein goldener Becher gemacht, der 130 g wiegt und in Wasser von 4° 10 g von seinem Gewicht verliert? (Spez. Gew. des Goldes = 19,3 und des Kupfers = 8,8.)

e) Eine silberne Schale ist 193 g schwer und verliert in Wasser von 0° 20 g von seinem Gewicht. Wie groß ist der Feingehalt des benutzten Silbers? (Spez. Gew. des Silbers = 10,5 und des Kupfers = 8,8.)

34. a) Eine Legierung aus 70 g Gold und 38 g Silber hat in

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 100 bei Nr. 103.

Wasser von 4° ein Gewicht von 100 g. Hätte man jedoch 105 g Gold mit 76 g Silber legiert, so wäre in dem Wasser ein Gewichtsverlust von 14 g eingetreten. Wie groß ist das spezif. Gewicht des benutzten Goldes und Silbers?

b) Eine Mischung aus 3,4 kg Spiritus mit 5,7 kg einer zweiten Sorte hat das spezif. Gewicht 0,91. Gießt man zu der Mischung 6,8 kg der ersten und 1,9 kg der zweiten Sorte hinzu, so erhält sie das spezif. Gewicht 0,89. Wie groß ist das spezif. Gewicht der beiden Sorten?

c) In einer Gießerei wurden 50,4 kg Messing mit 31,2 kg einer zweiten Sorte legiert und dadurch eine Legierung mit dem spezif. Gewicht 8,16 hergestellt. Wären von der ersten Sorte 5,6 kg mehr und von der zweiten 5,2 kg weniger genommen worden, so hätte die Legierung das spezif. Gewicht 8,2 erhalten. Wie groß ist das spezif. Gewicht der beiden Sorten?

d) Werden 25,2 kg Bronce mit 16,2 kg einer zweiten Sorte legiert, so erhält die Legierung das spezif. Gewicht 8,28. Werden jedoch von der ersten Sorte 19,6 kg und von der zweiten 8,1 kg genommen, so wird das spezif. Gewicht der Legierung gleich 8,31. Wie groß ist das spezif. Gewicht der beiden Sorten?

e. Aufgaben aus der Planimetrie.

35. a) In einem **Dreieck** mit dem Umfang $u = 39$ cm ist die größte Seite um 7 cm kleiner als die Summe der beiden anderen und die zweitgrößte doppelt so groß wie die Differenz der beiden anderen. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

b) In einem Dreieck mit dem Umfang $u = 50$ cm ist der eingeschriebene Kreis gezeichnet. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks, wenn die größte von ihnen durch den Berührungspunkt in zwei Abschnitte von der Länge 8 cm, bez. 12 cm zerlegt wird?

c) Bei einem Dreieck mit dem Umfang $u = 56$ cm ist ein äußerer Berührungskreis gezeichnet, dessen Berührungspunkt die zugehörige Dreiecksseite in zwei Abschnitte von der Länge 14 cm, bez. 9 cm zerlegt. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

d) Verlängert man in einem Dreieck eine Seite um 7 cm und die zu ihr gehörige Höhe um 2 cm, so wächst sein Inhalt um 117 qcm. Verlängert man dagegen die Seite um 1 cm und die Höhe um 4 cm, so wächst der Inhalt nur um 53 qcm. Wie groß ist die Seite und die zu ihr gehörige Höhe?

36. a) In zwei **rechtwinkligen** Dreiecken über derselben Hypotenuse sind die Katheten des ersten um 4 cm größer, bez. um 6 cm kleiner als die entsprechenden Katheten des zweiten. Wie groß sind die Katheten des ersten Dreiecks, wenn sein Inhalt um 20 qcm kleiner ist als der Inhalt des zweiten?

b) In zwei rechtw. Dreiecken über derselben Hypotenuse sind die Katheten des ersten um 4 cm kleiner, bez. um 2 cm größer als die entsprechenden Katheten des zweiten. Wie groß sind die Katheten des ersten Dreiecks, wenn die Summen aus den Quadraten über den nichtentsprechenden Katheten sich um 96 qcm unterscheiden?

c) Wenn man in einem rechtw. Dreieck die eine Kathete um 3 cm verlängert und die andere um 5 cm verkürzt, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Inhalt um 2,5 qcm kleiner ist als der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks. Wie groß sind dessen Katheten?

d) Verlängert man in einem rechtw. Dreieck die Hypotenuse um 8 cm und die eine Kathete um 5 cm, so nimmt das Quadrat über der anderen Kathete um 197 qcm zu. Die Zunahme beträgt jedoch nur 87 qcm, wenn die Hypotenuse allein um 3 cm verlängert wird. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

37. a) Verlängert man in einem **Rechteck** die kleinere Seite um 4 cm und verkürzt die größere um 2 cm, so bleibt zwar die Diagonale unverändert, aber der Inhalt nimmt um 60 qcm zu. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

b) Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 5 cm und verkürzt die größere um 4 cm, so nimmt das Quadrat über der Diagonale um 33 cm und der Inhalt um 12 qcm zu. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

c) Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 4 cm und verkürzt die größere um 3 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Inhalt um 21 qcm größer ist als der Inhalt des Rechtecks. Wie groß sind dessen Seiten?

d) Verlängert man in einem Rechteck die kleinere Seite um 5 cm und die größere um 4 cm, so wächst sein Inhalt um 185 qcm. Verlängert man aber die kleinere Seite um 4 cm und die größere um 5 cm, so wächst der Inhalt nur um 179 qcm. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

e) Zwei Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie 9 : 11. Ihre Umfänge, die sich wie 20 : 23 verhalten, sind zusammen 172 cm lang. Wie groß sind die Seiten des ersten Rechtecks?

38. a) Der Inhalt eines **Rhombus** wächst um 21 qcm, wenn man beide Diagonalen um 2 cm verlängert; er wächst aber nur um 3 qcm, wenn man die kleinere Diagonale um 3 cm verlängert und die größere um 3 cm verkürzt. Wie groß sind die beiden Diagonalen?

b) Verlängert man die größere Diagonale eines Rhombus um 4 cm und verkürzt die kleinere um 8 cm, so bleibt zwar die Seite ungeändert, aber der Inhalt nimmt um 48 qcm ab. Wie groß sind die beiden Diagonalen?

Fünftes Kapitel.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.

Nr. 24. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

a. Übungen zum Begriff der Potenz.

1. Bestimme den Wert der Potenzen

a) 2^4; 3^3; 5^3; 4^4; 2^8; 3^6; 10^5; 10^{10}.

b) $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-5)^2$; $(-3)^5$; $-(-6)^3$; $-(-1)^9$.

c) $(-a)^4$; $(-a)^7$; $-(-a)^5$; $-(-a)^8$; $-(-a)^{2n}$; $(-a)^{2n-1}$; $-(-a)^{2n+1}$.

2. Berechne den Wert der Summe

a) 5^3+6^2. b) $5^3+(-6)^2$. c) $2^5-(-3)^3$.

d) $3\cdot4^3-4\cdot(-5)^3$. e) $6\cdot7^3-8\,(-5)^3$. f) $5\cdot(3^3-2^4)$.

g) $2^4\cdot3^2+3^3\cdot(-2)^5$. h) $7^2\cdot(-5)^2-2^3\cdot(-3)^4$. i) $2^6\cdot(-3)^5+3^2\cdot(-4)^4$.

3. Bestimme den Wert der Summe

a) $5\cdot2^3+7\cdot2^3-9\cdot2^3+13\cdot2^3-11\cdot2^3$.

b) $3\cdot4^3-9\cdot4^3-7\cdot4^3+15\cdot4^3+8\cdot4^3$.

c) $8\cdot5^3+13\cdot5^3-17\cdot5^3+21\cdot5^3-25\cdot5^3$.

d) $13\cdot7^2-19\cdot7^2+23\cdot7^2+17\cdot7^2-11\cdot7^2$.

e) $4\cdot6^3-5\,(-6)^3-7\,(-6)^3+9\,(-6)^3+13\cdot6^3$.

f) $7\cdot2^5-9\cdot2^5-13\,(-2)^5-18\,(-2)^5-17\cdot2^5$.

g) $9\cdot4^3-6\,(-4)^3-8\cdot4^3+5\,(-4)^3+3\cdot4^3$.

h) $\frac{3}{4}\cdot8^2-\frac{7}{12}\,(-8)^2-\frac{2}{3}\,(-8)^2+\frac{5}{6}\cdot8^2$.

i) $0{,}5\,(-3)^5+0{,}7\,(-3)^5+0{,}9\cdot3^5-0{,}8\,(-3)^5$.

k) $\frac{3}{5}a^3-\frac{4}{15}a^3-\frac{2}{3}a^3+\frac{9}{10}a^3$.

l) $0{,}9b^5-0{,}3b^5+\frac{3}{4}b^5-\frac{2}{5}b^5+0{,}5b^5$.

m) $1{,}3a^4b^2-2{,}7a^4b^2+3{,}1a^4b^2-0{,}8a^4b^2$.

n) $\frac{7}{8}x^3y^4-\frac{4}{5}x^3y^4+0{,}72x^3y^4-0{,}43x^3y^4$.

o) $\frac{2a^n}{3y^4}-\frac{5a^n}{6y^4}-\frac{5a^n}{4y^4}+\frac{7a^n}{12y^4}+\frac{7a^n}{18y^4}$.

p) $\frac{5x^{n-1}}{8a^n}-\frac{3x^{n-1}}{4a^n}+\frac{7x^{n-1}}{9a^n}+\frac{11x^{n-1}}{18a^n}-\frac{23x^{n-1}}{24a^n}$.

4. Welchen Wert hat die Summe

a) $6\cdot8^2+7\cdot5^2-9\cdot5^2-3\cdot8^2+11\cdot5^2-2\cdot8^2$?

b) $3\cdot4^3+5\cdot3^3-8\cdot3^3-11\cdot4^3+13\cdot3^3+7\cdot4^3$?

c) $5\cdot2^4-3\cdot2^5-7\cdot2^5+8\cdot2^4+11\cdot2^5$?

d) $17\cdot3^2-19\cdot3^3-13\cdot3^2-11\cdot3^3+25\cdot3^3+15\cdot3^2$?

e) $3a^5 - 4b^5 - 9b^5 + 17a^5 - 14a^5 + 7b^5$ für $a = 2$ u. $6 = 1$?
f) $9x^4 - 11y^4 - 4x^4 + 15y^4 - 2x^4 + 2y^4$ für $x = 3$ u. $y = 2$?
g) $0{,}7a^5 - 0{,}5a^4 - 0{,}9a^5 + 0{,}7a^4 + 0{,}8a^5 - 1{,}2a^4$ für $a = 5$?
h) $0{,}9x^8 + 1{,}3x^3 - 0{,}5x^8 + 0{,}4x^3 - 1{,}6x^8 + 0{,}3x^3$ für $x = 2$?

5. Wie groß ist die Summe
a) $(x - y)^2 + (y - x)^2$? b) $(x - y)^2 - (y - x)^2$?
c) $(x - y)^3 + (y - x)^3$? d) $(x - y)^3 - (y - x)^3$?
e) $3(a - b)^3 + 5(b - a)^3 - 7(b - a)^3 - 6(a - b)^3$?
f) $7(x^2 - 1)^3 - 3(1 - x^2)^3 - 9(x^2 - 1)^3 - 5(1 - x^2)^3 + 4(1 - x^2)^3$?

b. Multiplikation von Potenzen.

6. a) $x^4 \cdot x^3 \cdot x^7 \cdot x^2$. b) $a^5 \cdot a^9 \cdot a^4 \cdot a^6$.
c) $(p+q)^3 \cdot (p+q)^5 \cdot (p+q)^7$. d) $(r - s)^4 \cdot (r - s)^3 \cdot (r - s)^2$.
e) $5a^5 \cdot 6a^6$. f) $4x^4 \cdot 5x^5 \cdot 3x^3$.
g) $9a^4 \cdot 3a^4 \cdot 4a^4$. h) $\frac{2}{3}x^7 \cdot \frac{3}{4}x^4 \cdot \frac{5}{6}x^5 \cdot \frac{9}{10}x^3$.
i) $0{,}3y^4 \cdot 0{,}4y^5 \cdot 2{,}4y^6$. k) $\frac{5}{12}r^5 \cdot \frac{6}{25}r^4 \cdot \frac{4}{3}r^3 \cdot \frac{9}{2}r^2$.
l) $a^{n+1} \cdot a^{n-3} \cdot a^{n+4}$. m) $x^{2m-3} \cdot x^{7-4m} \cdot x^{3m-4}$.
n) $r^{3a-3b} \cdot r^{5a+6b} \cdot r^{3b-2a}$. o) $a^{4x-5y} \cdot a^{5x-4y} \cdot a^{2x-3y}$.
p) $2x^{2a-3b} \cdot 3x^{5b-a} \cdot 5x^{4a+2b}$. q) $7a^{3r+7s} \cdot 9a^{5s-6r} \cdot 2a^{3r-13s}$.
r) $5a^{3p-8q} \cdot 8a^{7q-p} \cdot 4a^{p-q}$. s) $6b^{7r-5t} 5b^{7t-5r} \cdot 3b^{2r+3t}$.
t) $\frac{4}{9}(a+b)^{3x-5y} \cdot \frac{3}{8}(a+b)^{2x+4y} \cdot \frac{6}{5}(a+b)^{3y-4x} \cdot 5(a+b)^{4x+5y}$
u) $1\frac{7}{8}(p - q)^{5a-7b} \cdot 5\frac{1}{3}(p - q)^{4a+5b} \cdot \frac{2}{5}(p - q)^{2a-3b} \cdot (p - q)^4$.

7. a) $a^5b^3 \cdot a^2b^4$. b) $x^4y^5 \cdot x^5y^4$.
c) $r^3s^4t^7 \cdot r^4st^5$. d) $u^2v^5w^3 \cdot u^7v^4w^6$.
e) $2a^4b^3 \cdot 5a^7b^4 \cdot 7a^2b^8$.
f) $24r^3s^4t^2 \cdot 0{,}125r^2s^2t^3 \cdot 0{,}5rs^4t^6$.
g) $2{,}8a^2b^5c^4 \cdot 3{,}5a^3b^2c^4 \cdot 2{,}5a^5bc^3$.
h) $7{,}2x^3y^2z^4 \cdot (-4{,}5x^2x^4z^3) \cdot (-0{,}125x^4y^3z^2)$.
i) $3\frac{3}{4}p^5q^2r^4 \cdot (-4\frac{1}{5}p^4q^5r^2) \cdot (-5\frac{1}{8}p^2q^4r^5)$.
k) $0{,}5a^{2p-5}b^{3q-2} \cdot 1{,}2a^{6-3p}b^{3-2q} \cdot 0{,}25a^pb^{2-q}$.
l) $0{,}3r^{2a-3b}t^{4x-5y} \cdot 0{,}8r^{3a+5b}t^{2x-3y} \cdot 0{,}5r^{11b-6a}t^{3x+4y}$.
m) $0{,}2a^2b^{3n-4}c^n \cdot 0{,}9a^{2n}b^3c^5 \cdot 0{,}7a^{n-2}b^{7-2n}c^{3n-2}$.
n) $\frac{2}{3}a^n(a-b)^{5-n}b^3 \cdot \frac{9}{8}a^4(a-b)^{3n-2}b^{2n-1} \cdot \frac{4}{15}a^{n-4}(a-b)^{6-n}b^{9-2n}$.
o) $0{,}8(x+y)^{a+b}(x-y)^{a-b}x^{2a}y^{3b} \cdot 1{,}5(x-y)^{2ab} \cdot 0{,}4(x+y)^{2ab} \cdot 0{,}1x^{3b}y^{2a}$.

8. a) $(7x^3y^2 - 9x^2z^3 + 5y^2z^4) \cdot 5x^2y^3z^4$.
b) $23a^5bc(2b^3c^4 - 3a^2b^4 - 4a^4c^3)$.
c) $(6{,}48r^3 - 4{,}32r^2s - 5{,}56rst + 2{,}64st^2) \cdot 0{,}25rst$.
d) $(11\frac{1}{3}a^2b^3c^4 - 8\frac{1}{2}a^3b^2c^4 - 6\frac{3}{8}a^2b^2c^2) \cdot \frac{12}{17}abc$.
e) $6\frac{2}{15}x^2y^2(7\frac{4}{5}x^3y^2 - 4\frac{7}{8}x^2y^3 - 3\frac{1}{4}xy^2 + 1\frac{19}{20}x^2y)$.

f) $4\frac{4}{11}a^2x^2(2\frac{1}{16}ax - 6\frac{7}{8}ax^2 + 6\frac{5}{12}a^2x^3 - 5\frac{1}{24}a^3x)$.

g) $(3\frac{3}{7}m^5n^3 - 7\frac{1}{5}m^4n^4 - 13\frac{1}{3}m^3n^5 + 1\frac{13}{35}m^2n^6) \cdot 26\frac{1}{4}mn$.

h) $(\frac{3}{4}a^{x-3} - \frac{7}{8}a^{2x-5} + \frac{5}{12}a^{7-x}) \cdot 24a^{2x-3}$.

i) $(\frac{5}{12}a^{3p-3q} - \frac{15}{16}a^{3p+2q} + \frac{20}{9}a^{4p-3q} + \frac{25}{24}a^{p}) \cdot \frac{144}{25}a^{p+q}$.

k) $(3\frac{1}{8}x^{3n-4} - 8\frac{3}{4}x^{5n-3} + 4\frac{1}{16}x^{2n+4} - 2\frac{1}{2}x^{n+5}) \cdot 3\frac{1}{5}x^{5-3n}$.

l) $(6\frac{3}{4}y^{3x+7} - 7\frac{1}{5}y^{2x+5} + 6\frac{3}{10}y^{x+3} - \frac{9}{20}y^{3-x}) \cdot 2\frac{2}{9}y^{3-x}$.

9. a) $(a^{2x-6} - a^{x-3}b^{y+2} + b^{2y+4}) \cdot (a^{x-3} + b^{y+2})$.

b) $(x^{4a-8} + x^{3a-4}y^{a-2} + b^{2a-4}) \cdot (x^{3a-4} - y^{a-2})$.

c) $(4r^{2x+2} - 2r^{x+1}s^{y-1} + s^{2y-2}) \cdot (2r^{x+1} + s^{y-1})$.

d) $(4a^{2x-8} + 6a^{x-4}b^{y+3} + 9b^{2y+6}) \cdot (2a^{x-4} - 3b^{y+3})$.

e) $(9a^{4-2x} - 15a^{2-x}b^{y-2} + 25b^{2y-4}) \cdot (3a^{2-x} + 5b^{y-2})$.

f) $(16p^{8-6r} + 20p^{4-3r}q^{3r-1} + 25q^{6r-2}) \cdot (4p^{4-3r} - 5q^{3r-1})$.

g) $(\frac{4}{9}x^{3a+4} + x^{4a+2}y^{3-2a} + \frac{9}{4}y^{6-4a}) \cdot (\frac{2}{3}x^{4a+2} - \frac{3}{2}y^{3-2a})$.

h) $(\frac{4}{25}a^{4r+6} - a^{2r+3}b^{2r-3} + \frac{25}{4}b^{4r-6}) \cdot (\frac{2}{5}a^{2r+3} + \frac{5}{2}b^{2r-3})$.

i) $(\frac{9}{16}a^{2-6x} - \frac{1}{2}a^{1-3x}b^{2x+3} + \frac{4}{9}b^{4x+6}) \cdot (\frac{3}{4}a^{1-3x} + \frac{3}{8}b^{2x+3})$.

10. a) $(a^{4x-4} - 2a^{3x-3} - 4a^{2x-2} + 8a^{x-1}) \cdot (a^{3x-2} - 2a^{2x-1} - 4a^{x})$.

b) $(a^{2x+3y} - a^{x+4y} + a^{5y}) \cdot (a^{3x} - a^{2x+y} + a^{x+2y})$.

c) $(x^{4a} - 2x^{2a+2b} + 4x^{2b} - 8x^{4b-2a}) \cdot (x^{2a} - 2x^{a+b} + 4x^{2b})$.

d) $(x^{5a} - x^{4a+1} + x^{3a+2} - x^{2a+3}) \cdot (x^{a-1} - x^{2a} + x^{3a+1} - x^{4a+2})$.

e) $(\frac{4}{9}a^{2x-4} - 2a^{2x-2}b^{y+1} + 9b^{2y+2}) \cdot (\frac{4}{9}a^{2x-4} + 2a^{2x-2}b^{y+1} + 9b^{2y+2})$.

11. In ein Produkt den Ausdruck zu verwandeln

a) $a^{2n} - a^{3n+1} + a^{4n-1}$. b) $x^{5r} - 3x^{3r+s} + 5x^{2r+3s}$.

c) $a^{2a-3b} + a^{3a-2b} + a^{4a-b}$. d) $p^{4x-3y} - p^{3x-4y} + p^{2x-5y}$.

e) $a^{n+1} + 2a^nb + a^{n-1}b^2$. f) $a^{n+1} - 4a^nb^2 + 4a^{n-1}b^4$.

g) $4x^{3n-3} - 12x^{2n-4}y + 9x^{2n-5}y^2$. h) $9a^{3x+4} + 24a^{2x+3}b^2 + 16a^xb^4$.

c. Division von Potenzen.

12. a) $36a^5b^7 : 12a^3b^4$. b) $48x^9y^7z^{11} : 8x^4y^5z^6$.

c) $\frac{4}{5}p^4q^9r^7 : \frac{8}{15}p^3q^8r^5$. d) $3\frac{1}{5}x^6y^5z^8 : 5\frac{1}{8}xy^2z^4$.

e) $6\frac{3}{7}a^{2x-3} : 3\frac{3}{4}a^{x-5}$. f) $6\frac{2}{3}a^{2x-3} : 2\frac{1}{7}a^{9-5x}$.

g) $8\frac{1}{8}x^{5m-3n} : 8\frac{2}{3}x^{2m+3n}$. h) $0{,}75r^{7p-3q+2} : 0{,}25r^{3p+q-2}$.

i) $4\frac{1}{12}(a+b)^{3p-4q} : 4\frac{1}{5}(a+b)^{p-q}$. k) $1{,}85(x-y)^{3a-4b-2} : 3{,}7(x-y)^{a-2b-4}$.

l) $3\frac{1}{7}(p+q)^{2a-3b} : 4\frac{2}{5}(p+q)^{3a-4b}$. m) $1{,}68(a-1)^{4x+5} : 0{,}42(a-1)^{2x+3}$.

n) $5\frac{3}{5}(x-y)^{2a+2b-4} : 6\frac{2}{9}(x-y)^{3a-3b+5}$.

o) $0{,}68\,(r-s)^{3y-4} : 34\,(r-s)^{3x-4}$.

p) $69a^{3m+5n}b^{4n-3m} : 23a^{2n-3m}b^{2m+3n}$.

q) $111x^{2a-7b}y^{3n+7}z^{2m+3} : 37x^{4a+3b}y^{5-2n}z^{m-3}$.

r) $15{,}9a^{m+3}b^{n+3}c^{r+3} : 5{,}3a^{n+3}b^{r+3}c^{m+3}$.

s) $28{,}4a^{3x-4}b^{4y-5}c^{5z-6} : 0{,}71a^{4y-4}b^{5z-5}c^{3x-6}$.

13. a) $\frac{a^{3x-4y}}{b^{5n-1}} : \frac{b^{2n-3}}{a^{2x-5y}}$. b) $\frac{a^{7n-4}b^{5m-3}}{c^{4x-1}} : \frac{c^{2x+5}}{a^{5-4n}b^{2m-3}}$:

c) $\frac{a^{3x-4y}}{b^{5n-1}} : \frac{a^{2x-5y}}{b^{2n-3}}$. d) $\frac{a^{7n-4}b^{5m-3}}{c^{4x-1}} : \frac{a^{5-4n}b^{2m-3}}{c^{2x+5}}$.

e) $\frac{a^{3n-5}c^{6-5n}}{b^{2n-3}d^{3n-4}} : \frac{c^{9+7n}d^{n+5}}{a^{3+2n}b^{5n-4}}$. f) $\frac{x^{3n+7}y^{2n-3}}{a^5z^9} : \frac{a^{4n}y^{3+2n}}{x^{2n-3}z^{4n-3}}$.

g) $\left(\frac{a^{3n+4}b^{4x-1}}{c^{2r-5}} : \frac{a^{2n-5}b^{3x-4}}{c^{4r+3}}\right) : \frac{a^{7-4n}b^{x-8}}{c^{r-5}}$.

14. a) $(105x^5y^2z^3 - 84x^3y^4z^2 - 147x^3y^2z^4 + 189x^4y^2z^2) : 21x^2y^2z^2$.

b) $(87r^2s^3t^4 - 145r^3s^3t^4 + 203r^3s^4t^4 - 261r^3s^3t^5) : 29r^3s^3t^4$.

c) $(0{,}54a^4b^4 - 0{,}47a^3b^5 - 0{,}82a^2b^6 + 0{,}29a^3b^4) : 0{,}04a^2b^4$.

d) $(36{,}9x^7y^5 + 21{,}3x^6y^6 - 8{,}7x^5y^8 - 52{,}5x^6y^8) : 1{,}5x^5y^5$.

e) $(4\frac{4}{9}x^5y^8 - 8\frac{4}{7}x^4y^6 - 3\frac{17}{21}x^3y^5 + 6\frac{2}{3}x^3y^3) : 2\frac{34}{63}x^3y^3$.

f) $(11\frac{1}{15}m^6n^{10} - 3\frac{9}{25}m^5n^8 - 4\frac{2}{3}m^3n^7 + 7\frac{7}{15}m^5n^6) : 1\frac{3}{25}m^3n^4$.

g) $(x^{5m-3} - x^{4m-4} - x^{3m-5} + x^{2m-7}) : x^{1-m}$.

h) $(0{,}84x^{5a+4b} - 0{,}7x^{6a-2b} + 0{,}56x^{3a+2b} - 0{,}98x^{a+b}) : 1{,}4x^{2a-3b}$.

i) $(0{,}75a^{4n-7} - 0{,}45a^{5n-9} - 0{,}15a^{6n-5} + 1{,}05a^{3n+6}) : 1{,}5a^{2n+3}$.

k) $(1{,}15b^{2x+5} - 1{,}38b^{3x-2} - 0{,}92b^{4x-7} + 0{,}69b^{x+8}) : 0{,}23b^{x-4}$.

l) $(\frac{3}{4}a^{2x-5y} - \frac{5}{8}a^{3x-4y} - \frac{5}{12}a^{4x-3y} + \frac{1}{24}a^{5x-2y}) : 4\frac{4}{5}a^{3y-x}$.

15. a) $(a^{2x} - b^{2y}) : (a^x - b^y)$. b) $(x^{3m} - y^{3n}) : (x^m - y^n)$.

c) $(a^{3p} + b^{6q}) : (a^p + b^{2q})$. d) $(x^{3m} - y^{3n}) : (x^{2m} + x^my^n + y^{2n})$.

e) $(a^{4n} - b^{4m}) : (a^n - b^m)$. f) $(a^{3m} + b^{3m}) : (a^{2m} - a^mb^m + b^{2m})$.

g) $(a^{4n} - b^{4m}) : (a^n + b^m)$. h) $(a^{5r-10s} + b^{15p-20q}) : (a^{r-2s} + b^{3p-4q})$.

16. a) $\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^7} + \frac{1}{x^9}$. b) $\frac{4}{a^{12}} - \frac{12}{a^6b^4} + \frac{9}{b^8}$.

c) $\frac{9}{x^{2n}} - \frac{12}{x^{2n-1}} + \frac{4}{x^{2n-2}}$. d) $\frac{25}{a^{2n-4}} + \frac{30}{a^{n-2}b^{n-3}} + \frac{9}{b^{2n-6}}$.

e) $\frac{1}{x^{n-3}} - \frac{x^2-1}{x^{n-1}} - \frac{x^2-1}{x^{n+1}}$. f) $\frac{1}{x^{2n-3}} - \frac{x^2+1}{x^{2n-1}} - \frac{x^2-1}{x^{2n+1}}$.

d. Potenzen von Produkten und Quotienten.

17. a) $(ab)^6$; $(ab)^n$; $(2ab)^4$; $(3ab)^m$.

b) $(2x \cdot 3y \cdot 4z)^n$; $(3ab \cdot 5cd \cdot 8ef)^x$; $(7x(x+y)y)^a$.

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n$; $\left(\frac{x}{2y}\right)^5$; $\left(\frac{ab}{cd}\right)^n$; $\left(\frac{3xyz}{5abc}\right)^n$.

d) $a^5 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$; $(5ab)^3 \cdot \frac{1}{(5ab)^4}$; $\left(\frac{3xyz}{4ab}\right)^5 \cdot \left(\frac{4ab}{3xyz}\right)^4$.

e) $\frac{8^3}{12^2}$; $\frac{9^4}{12^3}$; $\frac{15^4}{20^5}$; $\frac{6^4}{12^5}$; $\frac{6^5}{8^4}$.

f) $\frac{8^3 \cdot 9^4}{12^5}$; $\frac{20^2 \cdot 18^2}{15^4}$; $\frac{24^4 \cdot 25^5}{30^5 \cdot 20^3}$.

18. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

a) $2^4 \cdot 5^4$; $2^6 \cdot 5^6$; $4^3 \cdot 25^3$; $(\frac{3}{2})^4 \cdot (\frac{2}{3})^4$.

b) $(5\frac{1}{3})^3 \cdot (3\frac{3}{4})^3$; $(7\frac{1}{2})^4 \cdot (1\frac{3}{5})^4$; $(2\frac{1}{7})^2 \cdot (3\frac{1}{9})^2$.

c) $2^2 \cdot 4^4 \cdot 125^2$; $5^3 \cdot 8^3 \cdot 25^3$; $3^4 \cdot 8^4 \cdot (\frac{5}{6})^4$.

d) $(\frac{7}{12})^3 \cdot (1\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{2}{7})^3$; $(3\frac{3}{4})^2 \cdot (7\frac{1}{2})^2 \cdot (1\frac{1}{15})^2$.

e) $(a+b)^3 \cdot (a-b)^3$. f) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^n \cdot \left(\frac{x+y}{a-b}\right)^n$.

g) $\left(\frac{a^3+b^3}{x^2+xy+y^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3-y^3}{a^2-ab+b^2}\right)^2$. h) $\left(\frac{4x^2-9y^2}{2a^2-3ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{4a^2-9b^2}{2xy+3y^2}\right)^3$.

i) $(a+b)^3 \cdot (a^2+b^2)^3 \cdot (a-b)^3$.

k) $(2x-3y)^2 \cdot (4x^2+9y^2)^2 \cdot (2x+3y)^2$.

l) $\left(\frac{2a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{3c}\right)^x \cdot \left(\frac{3c}{2a}\right)^x$. m) $\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^x \cdot \left(\frac{x-y}{a+b}\right)^x \cdot \left(\frac{x+y}{a-b}\right)^x$.

19. $a^m : b^m = (a:b)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

a) $6^4 : 3^4$; $10^5 : 5^5$; $24^6 : 12^6$; $40^4 : 4^4$; $92^3 : 23^3$; $141^4 : 47^4$; $215^3 : 43^3$; $546^3 : 91^3$.

b) $(2\frac{1}{3})^3 : (3\frac{1}{2})^3$; $(6\frac{1}{4})^2 : (1\frac{7}{8})^2$; $(5\frac{2}{5})^3 : (3\frac{3}{9})^3$; $0{,}51^3 : 0{,}17^3$; $0{,}57^3 : 0{,}76^3$; $1{,}21^2 : 1{,}87^2$.

c) $\frac{(\frac{7}{12})^3 \cdot (1\frac{1}{2})^3}{(1\frac{3}{4})^3}$; $\frac{(1\frac{11}{25})^4 \cdot (6\frac{2}{3})^4}{(12\frac{4}{5})^4}$; $\frac{(6\frac{2}{13})^5 \cdot (8\frac{2}{3})^5}{(4\frac{4}{9})^5 \cdot (5\frac{2}{5})^5}$.

d) $(a^2-b^2)^3 : (a-b)^3$; $(a^2-b^2)^3 : (a+b)^3$.

e) $(a^3-b^3)^2 : (a-b)^2$; $(a^3+b^3)^n : (a+b)^n$.

f) $(4x^2-9y^2)^3 : (2x-3y)^3$; $(6a^2+ab-12b^2)^2 : (3a-4b)^2$.

e. Potenzen von Potenzen.

20. a) $(a^2)^3$; $(a^3)^4$; $(a^5)^6$; $(a^{12})^3$; $(a^x)^3$; $(a^4)^y$.

b) $(-a^3)^2$; $(-a^4)^5$; $(-a^x)^4$; $(-a^y)^3$.

c) $(a^{x+2})^3$; $(a^4)^{y-2}$; $(-a^{x-1})^5$; $(-a^{y+2})^4$.

d) $(a^{x-y})^{x-y} \cdot (a^{x+y})^{x-y}$; $(a^{x+y})^{x+y}$.

e) $(a^{2x-3y})^{4x-3y}$; $(a^{3p+5q})^{3p-4q}$; $(a^{4n-7})^{3n+4}$.

f) $(x^{3a-2b})^{2a+4b} \cdot (x^{7b-4a})^{a+3b}$. g) $(a^{4n-5})^{3n+7} \cdot (a^{2n+3})^{4n-5}$.

h) $(a^{2x-3y})^{2x-3y} \cdot (a^{2x+3y})^{2x+3y}$. i) $(a^{3x-5})^{3x-5} \cdot (a^{5x+3})^{5x+3}$.

k) $(a^{2x-3y})^{4x+5y} : (a^{4x+3y})^{2x-5y}$. l) $(x^{3y-7})^{4y-3} : (x^{2y+7})^{6y-5}$.

m) $(r^{4m-3n})^{3m-2n} : (r^{5m-2n})^{3m-3n}$. n) $(m^{5a-3b})^{4a-7b} : (m^{6a+b})^{3a-4b}$.

21. a) $\left((x^3)^5\right)^7$; $\left((a^2)^6\right)^5$; $\left((-a^4)^3\right)^5$; $\left((-a^2)^5\right)^8$.

b) $\left((a^{x+y})^{x+y}\right)^{x+y}$; $\left((a^{x-y})^{x-y}\right)^{x-y} \cdot \left((a^{x+y})^{x-y}\right)^{x+y}$.

c) $\left((a^{2x-3y})^{4x^2+9y^2}\right)^{2x+3y}$. d) $\left((x^{3a+4b})^{9a^2+16b^2}\right)^{3a-4b}$.

22. a) $(x^3y^4)^2$; $(x^3y^2z^4)^4$; $\left(\frac{a^2b^3}{c^5}\right)^3$.

b) $(-a^2b^5)^3$; $(-x^4y^3)^4$; $(-a^3b^5c^6)^5$.

c) $(a^{n-1}b^{n+1})^{n-1}$; $(x^{a+b}y^{a-b})^{a-b}$; $(x^{a+1}y^{b-1}z^{a-b})^{a+b}$.

d) $\left(\frac{a^{x-y}}{b^{x+y}}\right)^{x+y}$; $\left(\frac{x^{2a-3b}}{y^{2a+3b}}\right)^{2a-3b}$; $\left(\frac{a^{3n-1}b^4}{c^3d^{3n+1}}\right)^{3n-1}$.

e) $\frac{(2^3\cdot 3^2)^3}{(2^2\cdot 3^4)^2}$; $\frac{(3^2\cdot 7^3)^2}{(2^2\cdot 7^2)^6}$; $\frac{(81\cdot 25)^3}{(27\cdot 125)^2}$; $\frac{(16\cdot 27)^3}{(4\cdot 9)^5}$.

f) $\frac{72^3}{36^4}$; $\frac{225^3}{100^4}$; $\frac{144^3}{400^2}$; $\frac{147^3}{196^2}$.

g) $\frac{180^4}{360^3}$; $\frac{900^3}{360^4}$; $\frac{252^5}{1176^3}$; $\frac{3528^3}{252^7}$.

h) $\frac{(4x^3y^2)^3}{(9a^2b^3)^2}\cdot\frac{(12a^3b)^2}{(8x^2y^2)^3}\cdot\frac{(2x^4b^5)^4}{(3ay^2)^2}$.

i) $\frac{(15a^4b^3)^4}{(16x^3y^4)^3}\cdot\left(\frac{4x^2y}{9ab^2}\right)^5\cdot\frac{(12xy^3)^4}{(5a^3b^2)^3}$.

k) $\left(\frac{21p^3q^4}{25r^2s^3}\right)^4\cdot\frac{(15rs^2)^6}{(49p^2q)3}\cdot\left(\frac{7r^2s^4}{9pq^2}\right)^3$.

l) $\left(\frac{6a^5x^3}{5b^7y^4}\right)^{11}\cdot\left(\frac{27b^4z^3}{16a^6y^5}\right)^{10}\cdot\left(\frac{40b^5y^{11}}{81x^3z^{13}}\right)^9$.

f. Potenzen mehrgliedriger Ausdrücke. (Vergl. Nr. 8 Aufg. 27 ff.)

23. a) $(5x^2y^3 - 3x^4y^5)^2$. b) $(0{,}3a^4b^2 + 0{,}7a^3b^3)^2$.

c) $(\frac{2}{3}a^4r^2s^5 - \frac{3}{8}a^2r^4s^3)^2$. d) $(\frac{4}{5}u^4v^3w^2 + \frac{3}{4}u^2v^3w^4)^2$.

e) $\left(\frac{3a^2b^3}{4r^4s} - \frac{2r^3s^2}{3a^3b}\right)^2$. f) $\left(\frac{4x^3y^2z^4}{5a^2b^3c^4} - \frac{15a^3b^2c}{16x^3yz^3}\right)^2$.

g) $\left(\frac{5u^2v^4w^5}{6r^4s^3t^2} + \frac{9r^3s^3t^3}{25u^2v^3w^6}\right)^2$. h) $\left(\frac{4a^5bc^6}{7x^3y^2z} - \frac{14x^4y^2z^3}{3a^4b^2c^2}\right)^2$.

i) $(3a^{2n-1} - 5a^{3n+2})^2$. k) $(8x^{a+3} + 5x^{4-a})^2$.

24. a) $(2a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3)^2$. b) $(3x^4y + 2x^2y^3 - 5xy^4)^2$.

c) $(0{,}8p^3q^4 - 0{,}5p^2q^3 + 0{,}3pq^4)^2$. d) $(\frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{3}{4}a^5b^2 - \frac{5}{6}ab^4)^2$.

e) $(x^m - x^{m+1} + x^{m+2})^2$. f) $(1 + 2a^n + 4a^{2n})^2$.

g) $(4x^{2n-4} - 2x^{n-2} + 1)^2$. h) $(3a^{4x-2} - 6a^{3x-3} - 9a^{2x-4})^2$.

i) $(6\cdot 100 + 5\cdot 10 + 3)^2$. k) 517^2. l) 382^2.

m) $0{,}915^2$. n) $0{,}789^2$. o) $0{,}426^2$. p) $0{,}0981^2$.

25. a) $(a + b + c + d)^2$. b) $(2a - 3b + 4c - 5d)^2$.

c) $(3a^2b^3 - 6a^2b^2 + 9ab^3 - 3b^4)^2$. d) $(0{,}2x^3y^2 - 0{,}3x^2y^3 - 0{,}4xy^4 + 0{,}5y^5)^2$.

e) $(3a^{p+3} - 4a^{p+1} - 4a^{p-1} - 3a^{p-3})^2$.

f) $\left(\frac{4x^n}{y^{n-1}} - \frac{3x^{n-4}}{y^{n+3}} + \frac{y^{n-8}}{6x^{n-8}} - \frac{y^{n-12}}{3x^{n-12}}\right)^2$.

g) $(5{\cdot}1000+8{\cdot}100+3{\cdot}10+4)^2$. h) $(5 \cdot 1000 - 2 \cdot 100 - 3 \cdot 10 + 3)^2$.

i) 6245^2. k) 8446^2. l) 2919^2. m) 8899^2.

n) $0{,}7413^2$. o) $0{,}9225^2$. p) $0{,}4938^2$. q) $0{,}6909$.

26. a) $(2ab + 3b^2)^3$; $(5x^2 + 3x)^3$; $(4a^4 - 1)^3$; $(7a^3b - 5c^2)^3$.

b) $(a^{n+1} - a^{n-1})^3$; $a^{n+1} + a^{1-n})^3$; $(a^{2n} - a^{n+2})^3$.

c) $\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}\right)^3$; $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$; $\left(\frac{a^2b^3}{c^4} - \frac{c^3}{a^2b^2}\right)^3$.

d) $\left(\frac{a^{n+2}b^{5-n}}{c^{n-2}} + \frac{c^{n+2}}{a^{n-2}b^n}\right)^3$; $\left(\frac{8x^{2n-4}y^{3n+4}}{9z^{n+1}u^{n-1}} - \frac{3z^{n-1}u^{n+1}}{4x^{2-n}y^{2-2n}}\right)^3$.

e) $(8 \cdot 10 + 5)^3$; $(9 \cdot 10 - 1)^3$.

f) 54^3; 86^3; 59^3; 78^3.

g) $0{,}72^3$; $0{,}65^3$; $0{,}89^3$; $0{,}98^3$.

Nr. 25. Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

a. Übungen zum Begriff der Wurzel.

27. a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$; $\left(\sqrt{5}\right)^2$; $\left(\sqrt[7]{16}\right)^7$; $\left(\sqrt[5]{5}\right)^5$.

b) $\sqrt[n]{a^n}$; $\sqrt[4]{a^4}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{81}$.

c) $\sqrt[6]{a}\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[6]{a}\right)^3$; $\sqrt[9]{a} \cdot \left(\sqrt[9]{a}\right)^2 \cdot \sqrt[9]{a} \cdot \left(\sqrt[9]{a}\right)^5$.

d) $\left(\sqrt[9]{a+b}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[9]{a+b}\right)^3 \cdot \sqrt[9]{(a+b)^2}$; $\left(\sqrt[10]{a-b}\right)^2 \left(\sqrt[10]{a-b}\right)^5 \left(\sqrt[10]{a-b}\right)^3$.

e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n-4} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{3n+2} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{2-4n}$.

f) $\left(\sqrt[r]{a-b}\right)^{7-2r} \cdot \left(\sqrt[r]{a-b}\right)^{4r+5} \cdot \left(\sqrt[r]{a-b}\right)^{2r-13} : \left(\sqrt[r]{a-b}\right)^{3r-1}$.

g) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+5} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n-3} : \left(\sqrt[n]{a}\right)^{2n+2}$.

h) $\left(\sqrt[x]{x}\right)^{2x+7} : \left[\left(\sqrt[x]{x}\right)^{3x-2} \cdot \left(\sqrt[x]{x}\right)^{9-2x}\right]$.

i) $\left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{4n+5} : \left[\left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{n+9} : \left(\sqrt[n]{a+b}\right)^{4-2n}\right]$.

k) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})$. l) $(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})$.

m) $\left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{b}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2\right]$.

n) $\left[\left(\sqrt[4]{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{a-b}\right)^2\right] \cdot \left[\left(\sqrt[4]{a+b}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{a-b}\right)^2\right]$.

28. Wie groß ist

a) $\sqrt{3^2}$? $\sqrt[3]{7^3}$? $\sqrt[n]{a^n}$? $\sqrt[a-1]{x^{a-1}}$?

b) $\sqrt{9}$? $\sqrt{25}$? $\sqrt{144}$? $\sqrt{625}$?

c) $\sqrt[3]{8}$? $\sqrt[3]{27}$? $\sqrt[3]{125}$? $\sqrt[3]{1000}$?

d) $\sqrt[4]{16}$? $\sqrt[4]{81}$? $\sqrt[4]{625}$? $\sqrt[4]{256}$?

e) $\sqrt[3]{-27}$? $\sqrt[3]{-216}$? $\sqrt[3]{-343}$? $\sqrt[3]{-512}$?

f) $\sqrt[5]{-a^5}$? $\sqrt[5]{-32r^5}$? $\sqrt[7]{-128x^7}$? $\sqrt[3]{-729a^3}$?

29. Wie groß ist

a) $5\sqrt{36} - 3\sqrt{49} + 7\sqrt{25} - 3\sqrt{81}$?

b) $8\sqrt{169} - 5\sqrt{196} + 6\sqrt{121} - 7\sqrt{144}$?

c) $4\sqrt[3]{27} + 5\sqrt[4]{16} + 3\sqrt[3]{-64} - 4\sqrt[5]{-32} + 2\sqrt[4]{81}$?

d) $7\sqrt{64} - 9\sqrt[3]{64} + 5\sqrt[3]{-64} - 8\sqrt[5]{-243} + 3\sqrt[4]{625}$?

e) $5\sqrt[3]{125} - 4\sqrt[5]{-32} + 6\sqrt[3]{-27} + 3\sqrt[4]{81} - 2\sqrt[3]{-125}$?

f) $8\sqrt[6]{64} - 3\sqrt[3]{-64} + 5\sqrt[3]{64} - 4\sqrt[5]{243} + 9\sqrt{196}$?

g) $4\sqrt[5]{-32} + 5\sqrt[4]{256} - 6\sqrt[3]{-125} + 7\sqrt{81} - 8\sqrt[3]{-27}$?

h) $6\sqrt[7]{128} + 4\sqrt[5]{-243} - 5\sqrt[3]{-343} + 3\sqrt[3]{-512} + 2\sqrt[4]{625}$?

i) $a\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} + b\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$?

k) $2a\sqrt{9a^2 - 12ab + 4b^2} - 3b\sqrt{4a^2 + 12ab + 9b^2}$?

l) $(a-b)\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} - (a+b)\sqrt[3]{a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3}$?

m) $(5x - 3y)\sqrt{16x^2 + 24xy - 9y^2} - (2x - y)\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3}$?

n) $(a^2 - b^2)\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} + (a^2 + b^2)\sqrt[3]{a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6}$?

o) $(a^3 + b^3) : \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} - (a^3 - b^3) : \sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$?

30. Wie groß ist

a) $\sqrt{a^4}$? $\sqrt[3]{a^6}$? $\sqrt[3]{a^9}$? $\sqrt[5]{a^{25}}$?

$\sqrt[n]{a^{2n}}$? $\sqrt[n]{a^{n^2}}$? $\sqrt[2n+1]{a^{4n^2-1}}$? $\sqrt[3n-1]{a^{9n^2-6n+1}}$?

b) $\sqrt{5^4}$? $\sqrt[3]{4^6}$? $\sqrt[5]{9^{10}}$? $\sqrt[11]{8^{22}}$?

c) $\sqrt{9^3}$? $\sqrt[3]{64^2}$? $\sqrt[3]{125^4}$? $\sqrt[5]{32^3}$?

d) $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)^3}$? $\sqrt{(a^2 + 4ab + 4b^2)^3}$? $\sqrt{(4a^2 - 20ab + 25b^2)^3}$?

e) $\sqrt[3]{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)^2}$? $\sqrt[3]{(8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3)^2}$?

31. Zu bestimmen, welche von den Wurzeln

a) $\sqrt{49}$, $\sqrt{51}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[4]{32}$,
$\sqrt[4]{49}$, $\sqrt[4]{(a-b)^3}$, $\sqrt[5]{(a+b)^6}$ rational sind;

b) $\sqrt{71}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt[3]{-147}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[4]{-27}$, $\sqrt[5]{-27}$,
$\sqrt[8]{-4}$, $\sqrt[8]{64}$, $\sqrt[4]{-9^6}$, $\sqrt[2n]{-a^{3n}}$, $\sqrt[2n+1]{-a^{3n}}$ reell sind.

32. Darzustellen

a) 3 als 2te Wurzel; 5 als 3te Wurzel;
6 „ 3te „ ; 7 „ 3te „ ;
3 „ 4te „ ; 2 „ 5te „ .

b) a als n^{te} Wurzel; x als $(n+1)^{te}$ Wurzel;
$a+b$ „ 3te „ ; $a-b$ „ 3te „ ;
$2a-3b$ „ 2te „ ; $3a+4b$ „ 2te „ ;
$2a+b$ „ 3te „ ; $a-2b$ „ 3te „ .

c) -3 als 3te Wurzel; -5 als 3te Wurzel;
-2 „ 5te „ ; -3 „ 5te „ ;
-2 „ 7te „ ; -3 „ 7te „ ;
$-a$ „ $(2n-1)^{te}$ „ ; $-b$ „ $(2n+1)^{te}$ „ .

d) 4 als 3te Wurzel; -9 als 3te Wurzel;
$-a^3$ „ 5te „ ; $-a^3$ „ 3te „ ;
$-x^4$ „ 7te „ ; $-y^6$ „ 5te „ .

33. $a : \sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n : \sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$.

a) $7 : \sqrt{7}$; $11 : \sqrt{11}$; $(a+b) : \sqrt{a+b}$; $(a-1) : \sqrt{a-1}$.

b) $6 : \sqrt[3]{6}$; $5 : \sqrt[4]{5}$; $8 : \sqrt[5]{8}$; $(a-b) : \sqrt[6]{a-b}$.

c) $5 : \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$; $9 : \left(\sqrt[4]{9}\right)^3$; $6 : \left(\sqrt[5]{6}\right)^3$; $15 : \left(\sqrt[7]{15}\right)^4$;
$(a-b) : \left(\sqrt[3]{a-b}\right)^4$; $(x+y) : \left(\sqrt[4]{x+y}\right)^7$; $(2p-3q) : \left(\sqrt[5]{2p-3q}\right)^4$.

d) $\frac{5}{12} : \sqrt[3]{\frac{5}{12}}$; $\frac{r}{s} : \left(\sqrt[6]{\frac{r}{s}}\right)^5$; $\frac{p}{q} : \left(\sqrt[5]{\frac{p}{q}}\right)^7$.

e) $\frac{14}{\sqrt{14}}$; $\frac{19}{\sqrt[4]{19}}$; $\frac{23}{\sqrt[5]{23}}$; $\frac{117}{\sqrt[6]{117}}$.

f) $\frac{12}{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}$; $\frac{45}{\left(\sqrt[4]{45}\right)^3}$; $\frac{a-b}{\left(\sqrt[5]{a-b}\right)^3}$; $\frac{2x-5y}{\left(\sqrt[5]{2x-3y}\right)^2}$.

g) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{8}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}$; $\frac{25}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3}$; $\frac{8}{\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}$;
$\frac{a^2+2ab+b^2}{\left(\sqrt[5]{a+b}\right)^2}$; $\frac{a^2-2ab+b^2}{\left(\sqrt[4]{a-b}\right)^3}$; $\frac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}\right)^2}$.

b. Multiplikation von gleichnamigen Wurzeln.

34. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$. b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$. c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{216}$.
d) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$. e) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$. f) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$.
g) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{18a}$. h) $\sqrt{20a^3b} \cdot \sqrt{5ab^3}$. i) $\sqrt{28pq^5} \cdot \sqrt{7p^3q}$.
k) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{21}$. l) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{54} \cdot \sqrt{10}$. m) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{7}$.

n) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{24}$. o) $\sqrt{42}\cdot\sqrt{35}\cdot\sqrt{30}$. p) $\sqrt{37}\cdot\sqrt{90}\cdot\sqrt{11}$.

q) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{22}\cdot\sqrt{11}$. r) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}$.

s) $\sqrt{39}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{65}\cdot\sqrt{24}$. t) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{750}\cdot\sqrt{140}$.

u) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{15b}\cdot\sqrt{27ab}$. v) $\sqrt{12x^5}\cdot\sqrt{15x^2y}\cdot\sqrt{20xy^5}$.

w) $\sqrt{ax^3}\cdot\sqrt{a^3x^4}\cdot\sqrt{a^2x^3}$. x) $\sqrt{6a^3b}\cdot\sqrt{14b^2}\cdot\sqrt{21ab^3}$.

y) $\sqrt{15p^3q^2}\cdot\sqrt{21pq}\cdot\sqrt{35p^2q^3}$. z) $\sqrt{27x^2y^3}\cdot\sqrt{45xy^2}\cdot\sqrt{60x^3y}$.

35. a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$. b) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$. c) $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{7}$.

d) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}$. e) $\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{216}$. f) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$.

g) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$. h) $\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{45}$. i) $\sqrt[3]{63}\cdot\sqrt[3]{147}$.

k) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{54}$. l) $\sqrt[5]{48}\cdot\sqrt[5]{162}$. m) $\sqrt[6]{324}\cdot\sqrt[6]{144}$.

n) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}$. o) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{75}$. p) $\sqrt[3]{147}\cdot\sqrt[3]{75}\cdot\sqrt[3]{105}$.

q) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{48}$. r) $\sqrt[4]{108}\cdot\sqrt[4]{75}\cdot\sqrt[4]{100}$. s) $\sqrt[4]{448}\cdot\sqrt[4]{588}\cdot\sqrt[4]{189}$.

t) $\sqrt[3]{9a^2}\cdot\sqrt[3]{12ab}\cdot\sqrt[3]{16b^2}$. u) $\sqrt[3]{15a^2x}\cdot\sqrt[3]{36ab^2x}\cdot\sqrt[3]{50bx^4}$.

v) $\sqrt[3]{75abc}\cdot\sqrt[3]{60a^2bc^3}\cdot\sqrt[3]{48a^3bc^3}$. w) $\sqrt[4]{75a^2bc}\cdot\sqrt[4]{60ab^2c}\cdot\sqrt[4]{180abc^2}$.

36. a) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}$. b) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$. c) $\sqrt[4]{3a^3x^2}\cdot\sqrt[4]{\frac{16x^3}{3a^3}}$.

d) $\sqrt{\frac{3a^5x^3}{2y^2}}\cdot\sqrt{24axy^2}$. e) $\sqrt{\frac{32ax^3}{45b^3}}\cdot\sqrt{\frac{10x}{a^3b}}$. f) $\sqrt{\frac{27r^3s}{32ab^3}}\cdot\sqrt{\frac{3ab}{2rs}}$.

g) $\sqrt{\frac{15ab}{14xy}}\cdot\sqrt{\frac{25ac}{21xz}}\cdot\sqrt{\frac{bc}{10yz}}$. h) $\sqrt{\frac{40a^3}{147b^2}}\cdot\sqrt{\frac{24c}{25b}}\cdot\sqrt{\frac{36ac}{125b^3}}$.

i) $\sqrt[3]{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4x^2}{9y^2}}$. k) $\sqrt[3]{\frac{18a^4}{5b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{12a^2}{25b^2}}$. l) $\sqrt[3]{\frac{56r^2s}{45xy}}\cdot\sqrt[3]{\frac{49rs^2}{75x^2y^2}}$.

m) $\sqrt[3]{\frac{12ab^2}{5cd}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2bc}{75ad^2}}$. n) $\sqrt[3]{\frac{144x^2y^5}{25a^2b^4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{75a^5b}{128x^5y^2}}$.

o) $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{b^2c}\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2a}{b^3}}$. p) $\sqrt[5]{a^4b^2}\cdot\sqrt[5]{a^3b^4}\cdot\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$.

q) $\sqrt[3]{\frac{xy^5}{z^4}}\cdot\sqrt[3]{x^4y^2z^5}\cdot\sqrt[3]{\frac{z^2}{x^2y^4}}$. r) $\sqrt[7]{\frac{a^4b^3}{c^5}}\cdot\sqrt[7]{\frac{a^4b^5}{c^3}}\cdot\sqrt[7]{\frac{c}{ab}}$.

37. a) $\sqrt[n]{a^{n-2}b^3}\cdot\sqrt[n]{b^{n-3}c^2}\cdot\sqrt[n]{a^2c^{n-2}}$.

b) $\sqrt[x]{a^{3x-4y}}\cdot\sqrt[x]{a^{2x-5y}}\cdot\sqrt[x]{a^{3y+x}}\cdot\sqrt[x]{a^{6y}}$.

c) $\sqrt[m]{(a+b)^{m+3}}\cdot\sqrt[m]{(a+b)^{m-4}}\cdot\sqrt[m]{(a+b)^{m+1}}$.

d) $\sqrt[a]{x^{2a-3}y^{3a+2}}\cdot\sqrt[a]{x^{3a-4}y^{5-2a}}\cdot\sqrt[a]{x^{7+a}y^{a-7}}$.

e) $\sqrt[n]{a^{2n+3}b^{8n-5}}\cdot\sqrt[n]{a^{7-6n}b^{16-9n}}\cdot\sqrt[n]{a^{5n-10}b^{2n-11}}$.

f) $\sqrt[r]{x^{3r-4}y^{2r-3}}\cdot\sqrt[r]{x^{4r-1}y^{3r+2}}\cdot\sqrt[r]{x^{5-6r}y^{r+1}}$.

38. a) $\sqrt[6]{a^3+b^3}\cdot\sqrt[6]{a^3-b^3}$! b) $\sqrt[8]{x^4-y^4}\cdot\sqrt[8]{x^4+y^4}$!

39. $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$.

a) $\sqrt{12}$. b) $\sqrt{18}$. c) $\sqrt{45}$. d) $\sqrt{75}$.
e) $\sqrt{63}$. f) $\sqrt{80}$. g) $\sqrt{147}$. h) $\sqrt{252}$.
i) $\sqrt{a^3 b}$. k) $\sqrt{a^5 b^3}$. l) $\sqrt{(a+b)^5}$. m) $\sqrt{(a-b)^7}$.
n) $\sqrt[3]{24}$. o) $\sqrt[3]{108}$. p) $\sqrt[3]{135}$. q) $\sqrt[3]{375}$.
r) $\sqrt[3]{a^5 b^3}$. s) $\sqrt[3]{16 r^4 s^5}$. t) $\sqrt[3]{9 x^7 y^5}$. u) $\sqrt[3]{32 a^8 b^{10}}$.
v) $\sqrt[n]{a^{n+3}}$. w) $\sqrt[n]{a^{m+n}}$. x) $\sqrt[x]{a^{3x+1} b^{2x+3}}$. y) $\sqrt[x-y]{a^{3x+y}}$.

40. a) $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$.
b) $\sqrt{12} - \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{108}$.
c) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150} + \sqrt{294} - \sqrt{384}$.
d) $3\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 4\sqrt{80} - 3\sqrt{500} + 6\sqrt{605}$.
e) $5\sqrt{28} + 2\sqrt{175} - 4\sqrt{63} - 3\sqrt{700} + 8\sqrt{567}$.
f) $2\sqrt{8} + 9\sqrt{18} - 5\sqrt{72} - 11\sqrt{98} + 15\sqrt{162}$.
g) $5\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 7\sqrt{180} - 9\sqrt{320} + 13\sqrt{405}$.
h) $3\sqrt{27} - 4\sqrt{48} + 5\sqrt{75} - 6\sqrt{108} + 7\sqrt{147}$.
i) $8\sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 4\sqrt{150} + 5\sqrt{486} + \sqrt{864}$.
k) $11\sqrt{60} - 13\sqrt{135} + 9\sqrt{240} - 7\sqrt{735} + 5\sqrt{1215}$.
l) $2\frac{1}{2}\sqrt{52} - 3\frac{2}{3}\sqrt{117} + 4\frac{1}{5}\sqrt{325} - 1\frac{1}{7}\sqrt{637}$.
m) $5\frac{1}{5}\sqrt{153} - 2\frac{1}{8}\sqrt{1088} - 1\frac{3}{5}\sqrt{425} + 2\frac{1}{2}\sqrt{1700}$.

41. a) $\sqrt{18} + \sqrt{12} + \sqrt{32} + \sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{98}$.
b) $3\sqrt{27} - 4\sqrt{32} + 6\sqrt{72} - 5\sqrt{75} + 8\sqrt{147} - 9\sqrt{50}$.
c) $2\sqrt{45} + 7\sqrt{27} - 3\sqrt{80} - 4\sqrt{245} + 9\sqrt{300} - 2\sqrt{363}$.
d) $5\sqrt{28} - 3\sqrt{180} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{80} + 7\sqrt{320} - 3\sqrt{343}$.
e) $6\sqrt{175} - 4\sqrt{44} - 3\sqrt{99} + 5\sqrt{112} + 8\sqrt{567} - 7\sqrt{176}$.
f) $4\sqrt{52} - 5\sqrt{153} - 6\sqrt{272} + 7\sqrt{117} + 11\sqrt{325} - 5\sqrt{425}$.

42. a) $5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 6\sqrt[3]{128} - 5\sqrt[3]{250} + 2\sqrt[3]{432}$.
b) $3\sqrt[3]{32} + 2\frac{1}{5}\sqrt[3]{108} - 1\frac{2}{5}\sqrt[3]{500} + 2\sqrt[3]{2048}$.
c) $7\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{192} + 8\sqrt[3]{375}$.
d) $2\sqrt[3]{40} + 5\frac{1}{2}\sqrt[3]{320} - 2\frac{2}{3}\sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{1080}$.
e) $7\sqrt[3]{162} - 8\sqrt[3]{48} + 9\sqrt[3]{750} - 5\sqrt[3]{384}$.
f) $5\sqrt[3]{56} + 1\frac{2}{5}\sqrt[3]{189} - 2\frac{1}{4}\sqrt[3]{448} + 1\frac{3}{5}\sqrt[3]{875}$.
g) $6\sqrt[3]{96} - 3\frac{1}{5}\sqrt[3]{324} - 3\frac{3}{4}\sqrt[3]{768} + 4\frac{4}{5}\sqrt[3]{1500}$.
h) $5\sqrt[3]{88} + 1\frac{2}{5}\sqrt[3]{297} - 1\frac{1}{4}\sqrt[3]{704} - \frac{5}{6}\sqrt[3]{2376}$.

43. a) $2\sqrt{45} - 4\sqrt[3]{40} + 7\sqrt[3]{135} - 6\sqrt{80} + 2\sqrt[3]{320}$.
b) $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{128} + 4\sqrt[3]{192} - 3\sqrt[3]{375}$.
c) $5\sqrt{72} + 6\sqrt[3]{250} - 5\sqrt{98} + 3\sqrt[3]{432} - 4\sqrt{450}$.
d) $4\sqrt[3]{81} + 6\sqrt{48} - 5\sqrt{147} - 7\sqrt[3]{192} + 5\sqrt[3]{1536}$.
e) $\sqrt[3]{16a^4b} - \sqrt{8a^3b} + \sqrt[3]{54a^7b^4} - \sqrt{98ab^3}$.
f) $\sqrt[4]{162x^4y} - \sqrt[3]{54x^3y} - \sqrt[4]{32x^8y^5} + \sqrt[3]{16x^6y^4}$.
g) $\sqrt[3]{a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3} - \sqrt{a^3 - 2a^2b + ab^2}$.
h) $\sqrt{a^3 - a^2b - ab^2 + b^3} + \sqrt[3]{a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4}$.

44. a) $(\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{3}$.
b) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} + \sqrt{125}) \cdot \sqrt{5}$.
c) $(3\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 7\sqrt{96} - 4\sqrt{150}) \cdot 2\sqrt{6}$.
d) $(8\sqrt{63} - 2\sqrt{175} + 5\sqrt{112} - \sqrt{343}) \cdot 3\sqrt{7}$.
e) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{500}) \cdot \sqrt[3]{2}$.
f) $(6\sqrt[3]{72} - 3\sqrt[3]{243} + 7\sqrt[3]{576} - 2\sqrt[3]{1125}) \cdot 3\sqrt[3]{3}$.
g) $(5\sqrt[3]{36} - 7\sqrt[3]{288} + 9\sqrt[3]{972} - 2\sqrt[3]{4500}) \cdot 2\sqrt[3]{6}$.
h) $(7\sqrt[3]{18} - 5\sqrt[3]{144} - 3\sqrt[3]{2250} + 4\sqrt[3]{3888}) \cdot 5\sqrt[3]{12}$.

45. a) $(5\sqrt{12} - 7\sqrt{27} + 8\sqrt{32} - 3\sqrt{42}) \cdot 3\sqrt{6}$.
b) $(2\sqrt{35} - 3\sqrt{21} + 5\sqrt{105} - 4\sqrt{120}) \cdot 2\sqrt{15}$.
c) $(7\sqrt{35} + 8\sqrt{27} - 6\sqrt{48} + 3\sqrt{80}) \cdot 4\sqrt{21}$.
d) $(4\sqrt{45} + 6\sqrt{42} - 7\sqrt{30} + 4\sqrt{10}) \cdot 2\sqrt{35}$.
e) $(3\sqrt{15} - 6\sqrt{33} + 5\sqrt{88} - 2\sqrt{45}) \cdot 4\sqrt{55}$.
f) $(5\sqrt{63} + 8\sqrt{44} - 2\sqrt{66} + 7\sqrt{70}) \cdot 2\sqrt{77}$.

46. a) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$. b) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \cdot (4\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$.
c) $(6\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$. d) $(5\sqrt{6} - 6\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{6} + 4\sqrt{5})$.
e) $(2\sqrt{10} - 5\sqrt{6}) \cdot (3\sqrt{10} + 4\sqrt{6})$. f) $(4\sqrt{15} - 7\sqrt{10}) \cdot (3\sqrt{10} + 2\sqrt{15})$.
g) $(5\sqrt{15} + 3\sqrt{21}) \cdot (7\sqrt{21} - 8\sqrt{15})$. h) $(2\sqrt{21} + 5\sqrt{22}) \cdot (4\sqrt{33} - 3\sqrt{14})$.
i) $(6\sqrt{15} + 3\sqrt{14}) \cdot (4\sqrt{10} - 2\sqrt{21})$. k) $(8\sqrt{6} - 3\sqrt{33}) \cdot (6\sqrt{22} - 5\sqrt{66})$.
l) $(2\sqrt{24} + 5\sqrt{18}) \cdot (3\sqrt{120} - 7\sqrt{45})$. m) $(7\sqrt{28} - 3\sqrt{98}) \cdot (5\sqrt{42} - 2\sqrt{56})$.
n) $(5\sqrt{48} - 3\sqrt{27}) \cdot (6\sqrt{24} - 7\sqrt{18})$. o) $(4\sqrt{80} - 3\sqrt{75}) \cdot (2\sqrt{60} + 3\sqrt{90})$.
p) $(a\sqrt{a^3x} - b\sqrt{ax^3}) \cdot (b\sqrt{a^3x^3} + a\sqrt{ax^3})$.
q) $(x\sqrt{x^3x^5} - y\sqrt{xy^5}) \cdot (x\sqrt{xy^3} - y\sqrt{x^3y})$.

47. a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

c) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$. d) $(4\sqrt{7}+3\sqrt{5})^2$.
e) $(\sqrt{6}+\sqrt{10})^2$. f) $(\sqrt{10}-\sqrt{14})^2$.
g) $(\sqrt{21}-\sqrt{15})^2$. h) $(\sqrt{35}+\sqrt{21})^2$.
i) $(3\sqrt{15}-2\sqrt{6})^2$. k) $(5\sqrt{21}-3\sqrt{35})^2$.
l) $(4\sqrt{33}-5\sqrt{22})^2$. m) $(2\sqrt{55}-3\sqrt{33})^2$.
n) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-2)^2$. o) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2$.
p) $(2\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2-(\sqrt{21}-2\sqrt{7})^2$.
q) $(5\sqrt{33}-4\sqrt{11})^2-(3\sqrt{39}-4\sqrt{13})^2$.
r) $(\sqrt{xz}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{yz}-\sqrt{x})^2$.
s) $(\sqrt{6ac}-\sqrt{3b})^2-(\sqrt{10bc}+\sqrt{5a})^2$.
t) $(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})^2-(5\sqrt{6}-4\sqrt{15})^2$.
u) $(5\sqrt{15}-3\sqrt{10})^2+(2\sqrt{21}-4\sqrt{15})^2$.

48. a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{6})$.
b) $(3\sqrt{18}-5\sqrt{3}-4\sqrt{8})\cdot(3\sqrt{2}-5\sqrt{6}+4\sqrt{12})$.
c) $(7\sqrt{6}-5\sqrt{8}+3\sqrt{12})\cdot(\sqrt{4\sqrt{3}}+8\sqrt{6}-5\sqrt{12})$.
d) $(8\sqrt{6}-3\sqrt{12}+5\sqrt{15})\cdot(7\sqrt{3}-4\sqrt{6}+2\sqrt{15})$.
e) $(8\sqrt{5}+3\sqrt{10}-7\sqrt{15})\cdot(3\sqrt{2}-6\sqrt{5}+2\sqrt{10})$.
f) $(5\sqrt{30}-7\sqrt{5}+3\sqrt{15})\cdot(2\sqrt{25}-6\sqrt{15}+8\sqrt{10})$.
g) $(6\sqrt{21}-2\sqrt{14}-\sqrt{7})\cdot(5\sqrt{35}-8\sqrt{21}+3\sqrt{14})$.
h) $(3\sqrt{55}-5\sqrt{33}+6\sqrt{22})\cdot(2\sqrt{66}-4\sqrt{30}+3\sqrt{44})$.

49. a) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{5})\cdot(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}+2\sqrt{5})$.
b) $(4\sqrt{18}-3\sqrt{6}+2\sqrt{12})\cdot(4\sqrt{18}+3\sqrt{6}-2\sqrt{12})$.
c) $(3\sqrt{15}+5\sqrt{10}-6\sqrt{5})\cdot(3\sqrt{15}-5\sqrt{10}+6\sqrt{5})$.
d) $(5\sqrt{21}-6\sqrt{14}-2\sqrt{7})\cdot(5\sqrt{21}+6\sqrt{14}+2\sqrt{7})$.
e) $(3\sqrt{18}+2\sqrt{15}-4\sqrt{7})\cdot(3\sqrt{18}+2\sqrt{15}+4\sqrt{7})$.
f) $(9\sqrt{25}-5\sqrt{15}+3\sqrt{6})\cdot(9\sqrt{25}+5\sqrt{15}-3\sqrt{6})$.
g) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. h) $(\sqrt{12}-\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$.
i) $(\sqrt{18}-\sqrt{15}+\sqrt{12})^2$. k) $(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{2})^2$.
l) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{6})^2$. m) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{5}+3\sqrt{10})^2$.

50. a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}$. b) $\sqrt{8+\sqrt{60}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{60}}$.
c) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{10}}$. d) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$.
e) $\sqrt{11+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. f) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.
g) $\sqrt{10-5\sqrt{3}}\cdot\sqrt{10+5\sqrt{3}}$. h) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{13+4\sqrt{3}}$.

i) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$. k) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} \cdot \sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}$.

l) $\sqrt{a-b+2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{a-b-2\sqrt{ab}}$. m) $\sqrt{2ab+\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sqrt{2ab-\sqrt{a^2+b^2}}$.

n) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+y^3}} \cdot \sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+y^3}}$. o) $\sqrt[3]{1-\sqrt{1-a^6}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{1-a^6}}$.

c. Division von gleichnamigen Wurzeln.

51. a) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$. b) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$. c) $\sqrt{45} : \sqrt{5}$.

d) $\sqrt{72} : \sqrt{8}$. e) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$. f) $\sqrt{147} : \sqrt{3}$.

g) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}$. h) $\sqrt[3]{320} : \sqrt[3]{5}$. i) $\sqrt[3]{500} : \sqrt[3]{4}$.

k) $\sqrt[4]{64} : \sqrt[4]{4}$. l) $\sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$. m) $\sqrt[4]{2500} : \sqrt[4]{4}$.

n) $\sqrt{24} : \sqrt{\frac{2}{3}}$. o) $\sqrt{87\frac{1}{2}} : \sqrt{3\frac{1}{2}}$. p) $\sqrt{36\frac{3}{4}} : \sqrt{\frac{3}{4}}$.

q) $\sqrt{(a+b)^3} : \sqrt{a+b}$. r) $\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a+b}$. s) $\sqrt{a^3+b^3} : \sqrt{a+b}$.

t) $\sqrt{a^3-ab^2+a^2b-b^3} : \sqrt{a-b}$. u) $\sqrt[3]{a^3-b^3} : \sqrt[3]{a-b}$.

v) $\sqrt[3]{a^3+b^3} : \sqrt{a^2-ab+b^2}$. w) $\sqrt[3]{a^3-b^3} : \sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$.

52. $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{b})^{n-1}}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}.$$

a) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. b) $\sqrt{5} : \sqrt{2}$. c) $\sqrt{ab} : \sqrt{ac}$.

d) $\sqrt{6} : \sqrt{15}$. e) $\sqrt{11} : \sqrt{33}$ f) $\sqrt{a^3b} : \sqrt{ab^2}$.

g) $3\sqrt{10} : 2\sqrt{6}$. h) $5\sqrt{12} : 2\sqrt{18}$. i) $a\sqrt{ab^2} : \sqrt{a^3b}$.

k) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{4}$. l) $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{12}$. m) $\sqrt[3]{a^4b^2} : \sqrt[3]{ab^4}$.

n) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{36}$. o) $\sqrt[3]{28} : \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. p) $\sqrt[3]{75} : \sqrt[3]{1\frac{4}{5}}$.

q) $\sqrt[3]{36\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{4\frac{4}{7}}$. r) $\sqrt[3]{16\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{2\frac{2}{5}}$. s) $\sqrt[3]{16\frac{1}{5}} : \sqrt{1\frac{3}{5}}$.

53. a) $\sqrt{1\frac{1}{8}} + 5\sqrt{5\frac{1}{8}} - 3\sqrt{8\frac{1}{8}} + 4\sqrt{16\frac{1}{8}}$.

b) $3\sqrt{3\frac{1}{5}} - 5\sqrt{9\frac{4}{5}} - 7\sqrt{125} + 8\sqrt{16\frac{1}{5}}$.

c) $6\sqrt{4\frac{1}{2}} - 9\sqrt{12\frac{1}{2}} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{18} + 11\sqrt{24\frac{1}{2}}$.

d) $5\sqrt{3\frac{4}{7}} - 6\sqrt{5\frac{1}{7}} + 3\sqrt{11\frac{4}{7}} + 2\sqrt{28} - 4\sqrt{14\frac{2}{7}}$.

e) $3\sqrt{4\frac{1}{6}} + 5\sqrt{8\frac{1}{6}} - 7\sqrt{13\frac{1}{2}} - 4\sqrt{10\frac{2}{3}} + 8\sqrt{20\frac{1}{6}}$.

f) $3\sqrt{4\frac{9}{10}} - 4\sqrt{6\frac{2}{5}} + 7\sqrt{40} - 5\sqrt{2\frac{1}{2}} + 6\sqrt{8\frac{1}{10}}$.

g) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{1\frac{7}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{14\frac{2}{9}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{6} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{27\frac{7}{9}}$.

h) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{1\frac{1}{7}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{3\frac{6}{7}} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{9\frac{1}{7}} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{17\frac{6}{7}}$.

i) $3\frac{1}{2}\sqrt[3]{12\frac{4}{5}} - 2\frac{1}{8}\sqrt[3]{5\frac{2}{5}} + 1\frac{5}{6}\sqrt[3]{43\frac{1}{5}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{675}$.

k) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{1\frac{11}{16}} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{7\frac{15}{16}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{2}} + \frac{5}{7}\sqrt[3]{21\frac{7}{16}}$.

l) $1\frac{1}{8}\sqrt[3]{1\frac{7}{20}} + 3\sqrt[3]{6\frac{1}{4}} - \frac{5}{8}\sqrt[3]{25\frac{3}{5}} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{10\frac{4}{5}}$.

m) $2\frac{1}{5}\sqrt[3]{3\frac{17}{36}} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{1\frac{7}{9}} + \frac{4}{9}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}} - \frac{7}{8}\sqrt[3]{14\frac{2}{9}}$.

54. a) $(\sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{8} - \sqrt{10}) : \sqrt{7}$.

b) $(3\sqrt{10} - 5\sqrt{15} + 2\sqrt{21} - 4\sqrt{14}) : \sqrt{6}$.

c) $(7\sqrt{35} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{45} + 8\sqrt{8}) : \sqrt{10}$.

d) $(5\sqrt{20} + 7\sqrt{18} - 3\sqrt{21} + 2\sqrt{35}) : \sqrt{15}$.

e) $(4\sqrt{3\frac{1}{7}} + 5\sqrt{6\frac{7}{8}} - 7\sqrt{13\frac{1}{5}} + 2\sqrt{8\frac{1}{4}}) : \sqrt{4\frac{5}{7}}$.

f) $\frac{2}{3}\sqrt{7\frac{4}{5}} - \frac{3}{4}\sqrt{10\frac{2}{5}} + \frac{4}{5}\sqrt{17\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}\sqrt{5\frac{1}{5}}) : \sqrt{4\frac{1}{5}}$.

g) $(\frac{3}{4}\sqrt{43\frac{1}{5}} - \frac{2}{3}\sqrt{16\frac{2}{3}} + 1\frac{1}{2}\sqrt{12\frac{4}{3}} - \frac{5}{6}\sqrt{38\frac{2}{5}}) : 2\sqrt{7\frac{1}{2}}$.

h) $(\frac{1}{2}\sqrt{13\frac{3}{5}} + \frac{2}{3}\sqrt{38\frac{1}{4}} - \frac{3}{4}\sqrt{11\frac{1}{3}} + \frac{1}{6}\sqrt{14\frac{1}{6}}) : 3\sqrt{3\frac{2}{5}}$.

55. a) $(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{21} + \sqrt{35}) : (\sqrt{2} + \sqrt{7})$.

b) $(\sqrt{10} - \sqrt{15} - \sqrt{14} + \sqrt{21}) : (\sqrt{5} - \sqrt{7})$.

c) $(\sqrt{15} - \sqrt{60}) : (\sqrt{1} + \sqrt{10})$.

d) $(\sqrt{30} + 2\sqrt{15} - 5\sqrt{3} - 5\sqrt{6}) : (\sqrt{6} - \sqrt{15})$.

e) $(4\sqrt{5} - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{30}) : (\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

f) $(32\sqrt{3} - 12\sqrt{30} - 12\sqrt{2} + 9\sqrt{5}) : (4\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

g) $(6\sqrt{15} - 9\sqrt{10} - 10\sqrt{6} + 30) : (3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$.

h) $(14\sqrt{30} - 6\sqrt{70} - 35\sqrt{21} + 105) : (2\sqrt{10} - 5\sqrt{7})$.

i) $(a - 6\sqrt{ab} + 5b) : (\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

k) $(4a - 4\sqrt{ab} - 3b) : (2\sqrt{a} - 3\sqrt{b})$.

l) $(a^2b - (a^2 - b^2)\sqrt{ab} - ab^2) : (b\sqrt{a} - a\sqrt{b})$.

m) $(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}) : (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.

n) $(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{6}) : (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})$.

o) $(12\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{36}) : (2\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{18})$.

p) $(30\sqrt[3]{9} + 12\sqrt[3]{25} - 9\sqrt[3]{450} - 18\sqrt[3]{10}) : (3\sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{45})$.

q) $(a + b) : (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$.

r) $(a - b) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$.

s) $(a + b) : (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

t) $(a - b) : (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$.

u) $(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{y^4}) : (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$.

v) $(\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}) : (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$.

56.*) $\sqrt{a}:(\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$.

a) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. b) $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$. c) $\frac{5}{4+\sqrt{3}}$.

d) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$. e) $\frac{19}{5-\sqrt{6}}$. f) $\frac{11}{4+\sqrt{5}}$.

g) $\frac{11}{7-3\sqrt{3}}$. h) $\frac{38}{8-3\sqrt{5}}$. i) $\frac{50}{7+2\sqrt{6}}$.

k) $\frac{89}{13+4\sqrt{5}}$. l) $\frac{57}{12-5\sqrt{5}}$. m) $\frac{59}{4+5\sqrt{3}}$.

n) $\frac{\sqrt{6}}{4-2\sqrt{3}}$. o) $\frac{9\sqrt{10}}{4+2\sqrt{5}}$. p) $\frac{5\sqrt{6}}{7-3\sqrt{2}}$.

q) $\frac{3\sqrt{7}}{9+2\sqrt{21}}$. r) $\frac{11\sqrt{15}}{10-3\sqrt{5}}$. s) $\frac{5\sqrt{33}}{12-3\sqrt{11}}$.

t) $\frac{10}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}$. u) $\frac{6}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$. v) $\frac{15}{5\sqrt{2}-3\sqrt{5}}$.

w) $\frac{11\sqrt{21}}{\sqrt{14}+\sqrt{3}}$. x) $\frac{12\sqrt{15}}{3\sqrt{5}+4\sqrt{3}}$. y) $\frac{31\sqrt{14}}{4\sqrt{7}-5\sqrt{2}}$.

z) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. α) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. β) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$.

γ) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{42}}{\sqrt{15}-\sqrt{14}}$. δ) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{70}}{\sqrt{10}+\sqrt{21}}$. ε) $\frac{\sqrt{42}-\sqrt{15}}{\sqrt{30}+\sqrt{10}}$.

ζ) $\frac{4\sqrt{6}-3\sqrt{10}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$. η) $\frac{3\sqrt{14}-2\sqrt{15}}{5\sqrt{6}-2\sqrt{35}}$. ϑ) $\frac{2\sqrt{21}+5\sqrt{10}}{4\sqrt{15}-3\sqrt{14}}$.

ι) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$. κ) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}$. λ) $\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}$.

57. a) $\frac{5}{4-3\sqrt{\frac{2}{3}}}$. b) $\frac{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{6}}}{1-\sqrt{\frac{2}{5}}}$. c) $\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{8}}}{3-2\sqrt{\frac{2}{5}}}$.

d) $\frac{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{2}{3}-2\sqrt{\frac{2}{3}}}$. e) $\frac{2\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{1}{3}}}{3-3\sqrt{\frac{3}{7}}}$. f) $\frac{2\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}}{5-3\sqrt{1\frac{2}{3}}}$.

g) $\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{2}{3}}}$. h) $\frac{\sqrt{\frac{6}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}{\sqrt{\frac{14}{3}}-\sqrt{\frac{14}{5}}}$. i) $\frac{\sqrt{1\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{7}{11}}}{\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{5}{11}}}$.

k) $\frac{3\sqrt{2\frac{2}{5}}-2\sqrt{3\frac{1}{5}}}{5\sqrt{2\frac{1}{2}}+3\sqrt{2\frac{2}{5}}}$. l) $\frac{2\sqrt{3\frac{4}{7}}+3\sqrt{7\frac{1}{5}}}{5\sqrt{7\frac{1}{2}}-2\sqrt{3\frac{3}{5}}}$. m) $\frac{6\sqrt{8\frac{1}{3}}-5\sqrt{3\frac{1}{5}}}{5\sqrt{9\frac{4}{5}}-4\sqrt{6\frac{1}{4}}}$.

n) $\frac{\sqrt{0{,}5}-\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{0{,}2}}$. o) $\frac{3\sqrt{1{,}4}-2\sqrt{1{,}5}}{5\sqrt{0{,}7}-3\sqrt{0{,}6}}$. p) $\frac{0{,}6\sqrt{0{,}6}+0{,}5\sqrt{0{,}5}}{3\sqrt{0{,}18}-2\sqrt{0{,}1}}$.

---

*) In den Aufg. 56—59 ist die Division nicht ausführbar; es sollen bei den Brüchen die **Nenner rational** gemacht werden.

58. a) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$. b) $\frac{24}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

c) $\frac{20}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$. d) $\frac{21}{\sqrt{13}+\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

e) $\frac{30}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$. f) $\frac{70}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$.

g) $\frac{30}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}$. h) $\frac{120}{4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+2\sqrt{17}}$.

i) $\frac{3\sqrt{154}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$. k) $\frac{4\sqrt{182}}{\sqrt{14}+\sqrt{13}-3\sqrt{3}}$.

l) $\frac{5\sqrt{21}}{6+4\sqrt{3}-2\sqrt{21}}$. m) $\frac{5\sqrt{6}}{7-5\sqrt{3}+2\sqrt{31}}$.

n) $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$. o) $\frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$.

p) $\frac{6\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{5}}$. q) $\frac{5\sqrt{30}}{7\sqrt{2}+2\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$.

r) $\frac{5-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}}$. s) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$.

t) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$. u) $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.

v) $\frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{5}-6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}+4\sqrt{3}}$. w) $\frac{5\sqrt{7}-3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{14}-3\sqrt{15}+3\sqrt{21}}$.

x) $\frac{8\sqrt{2}-3\sqrt{6}+5\sqrt{15}}{5\sqrt{5}+2\sqrt{3}-2\sqrt{34}}$. y) $\frac{8-3\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{7\sqrt{7}+5\sqrt{14}+2\sqrt{161}}$.

z) $\frac{5-3\sqrt{\frac{1}{3}}+4\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}}}$. α) $\frac{3+7\sqrt{\frac{1}{14}}-3\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{14}}-\sqrt{\frac{1}{24}}}$.

β) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. γ) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

δ) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. ε) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}-\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt{2a}}$.

59. a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{2}}$. b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{8}}$.

c) $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{26}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. d) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{6}}{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+2\sqrt{14}}$.

e) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{7+8\sqrt{5}-7\sqrt{6}+5\sqrt{3}}$. f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{6}}{9\sqrt{2}+4\sqrt{3}-5\sqrt{6}-2\sqrt{15}}$.

d. Multiplikation und Division von ungleichnamigen Wurzeln.

60. $\sqrt[m]{a^\nu} = \sqrt[mn]{a^{\nu n}}$.

a) $\sqrt[3]{4}$ in eine Wurzel mit dem Exponenten 6 umzuwandeln.

b) $\sqrt{3}$ " " " " " " 6 "

c) $\sqrt[4]{8}$ " " " " " " 12 "

d) $\sqrt[5]{4}$ " " " " " " 15 "

e) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{8}$ und $\sqrt[12]{16}$ in Wurzeln mit dem Exponenten 24 umzuwandeln.

f) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{8}$ und $\sqrt[12]{32}$ gleichnamig zu machen.

g) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[10]{7}$ und $\sqrt[20]{18}$ " " "

h) $\sqrt[a]{x}$, $\sqrt[ab]{x}$, $\sqrt[b]{x}$, $\sqrt[bc]{x}$ und $\sqrt[ac]{x}$ " " "

i) $\sqrt[a+b]{m}$, $\sqrt[a-b]{m}$ und $\sqrt[a^2-b^2]{m}$ " " "

61. $\sqrt[ab]{x^{bc}} = \sqrt[a]{x^c}$.

Den kleinsten ganzen Wurzelexponenten herzustellen für die Wurzel

a) $\sqrt[8]{a^6}$. b) $\sqrt[18]{a^{12}}$. c) $\sqrt[18]{a^{24}}$. d) $\sqrt[36]{a^{45}}$.

e) $\sqrt[6]{a^{15}}$. f) $\sqrt[38]{a^{57}}$. g) $\sqrt[21]{a^{49}}$. h) $\sqrt[46]{a^{69}}$.

62. Auf die bequemste Weise zu berechnen

a) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2$. b) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^8$. c) $\left(\sqrt[9]{8}\right)^3$. d) $\left(\sqrt[12]{36}\right)^6$.

e) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^{10}$. f) $\left(\sqrt[5]{243}\right)^3$. g) $\left(\sqrt[4]{252}\right)^3$ h) $\left(\sqrt[3]{125}\right)^4$.

i) $\left(\sqrt[8]{100}\right)^4$. k) $\left(\sqrt[12]{(a-b)^3}\right)^4$. l) $\left(\sqrt[12]{(a+b)^4}\right)^6$. m) $\left(\sqrt[15]{(x^2-y^2)^5}\right)^6$.

63. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$. b) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}$. c) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$.

d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$. e) $\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^5}$. f) $\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[9]{a^7}$.

g) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2}$. h) $\sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[18]{a^5}$. i) $\sqrt[26]{x^{17}} \cdot \sqrt[39]{x^{22}}$.

k) $\sqrt[6]{a^{5x}} \cdot \sqrt[5]{a^{4x}}$. l) $\sqrt[8]{x^{2a+b}} : \sqrt[12]{x^{2b-a}}$. m) $\sqrt[10]{a^{4n-3}} \cdot \sqrt[25]{a^{7-2n}}$.

n) $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{ab^2}$. o) $\sqrt[9]{a^x b^y} \cdot \sqrt[12]{a^{3x} b^{2y}}$. p) $\sqrt[15]{a^2 b^x c^3} \cdot \sqrt[20]{a^x b^2 c^{2x}}$.

q) $\sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{bc^4}{a^2}}$. r) $\sqrt[21]{\frac{x^2 y^5}{z^4 u^7}} \cdot \sqrt[28]{\frac{z^5 u^6}{xy^3}}$. s) $\sqrt[18]{\frac{a^{x+y} b^z}{c^{n-1}}} \cdot \sqrt[27]{\frac{c^{2n+1}}{a^{x-y} b^{z+3}}}$.

t) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32}$. u) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{512}$. v) $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[9]{243}$.

w) $\sqrt[8]{32} \cdot \sqrt[12]{128}$. x) $\sqrt[9]{64} \cdot \sqrt[12]{128}$. y) $\sqrt[12]{243} \cdot \sqrt[16]{27}$.

64. a) $\left(\sqrt{6} + \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt[3]{9}\right)$. b) $\left(\sqrt{10} - \sqrt[3]{25}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{10}\right)$.

c) $\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{18}-\sqrt{2}\right)$. d) $\left(\sqrt[3]{12}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)$.

e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{25}\right)^2$. f) $\left(2\sqrt{6}-\sqrt[3]{18}\right)^2$. g) $\left(4\sqrt[3]{25}-\sqrt{10}\right)^2$.

h) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3$. i) $\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt{3}\right)^3$. k) $\left(2\sqrt[3]{25}+3\sqrt{5}\right)^3$.

65. a) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[6]{x}$. b) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[8]{a^5}$.

c) $\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[10]{n^3}\cdot\sqrt[15]{n^7}$. d) $\sqrt[12]{a^7}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[18]{a^{11}}$.

e) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[8]{8}$. f) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[6]{243}$.

g) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[9]{25}\cdot\sqrt[18]{5}$. h) $\sqrt[6]{4^5}\cdot\sqrt[8]{8^3}\cdot\sqrt[12]{32}\cdot\sqrt[24]{32^5}$.

66. a) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}$. b) $\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[4]{x^3}$. c) $\sqrt[8]{a^7}:\sqrt[12]{a^5}$.

d) $\sqrt[10]{a^7}:\sqrt[15]{a^4}$. e) $\sqrt[8]{x^7}:\sqrt[12]{x^5}$. f) $\sqrt[15]{x^{17}}:\sqrt[25]{x^{19}}$.

g) $\sqrt[6]{a^{5x}}:\sqrt[9]{a^{4x}}$. h) $\sqrt[12]{a^{3n+3}}:\sqrt[15]{a^{4n-5}}$. i) $\sqrt[15]{a^{2x+3y}}:\sqrt[18]{a^{2y-3x}}$.

k) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}:\sqrt[4]{\frac{4}{27}}$. l) $\sqrt[6]{\frac{27}{16}}:\sqrt[9]{\frac{81}{64}}$. m) $\sqrt[12]{\frac{25}{81}}:\sqrt[18]{\frac{125}{243}}$.

n) $\sqrt[4]{\frac{a^2-b^2}{(x+y)^2}}\ \sqrt[6]{\frac{(a-b)^3}{x^2-y^2}}$. o) $\sqrt[9]{\frac{(x-y)^7}{(a^2-b^2)^4}}:\sqrt[12]{\frac{(a+b)^8}{(x^2-y^2)^5}}$.

p) $\sqrt[9]{\frac{(ab+b^2)^6}{(a^2-ab)^4}}:\sqrt[6]{\frac{(ab-b^2)^4}{(a^2+ab)^3}}$.

67. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}:\sqrt[6]{a}$. b) $\sqrt[4]{a^3}:\left(\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}\right)$.

c) $\sqrt[4]{x^3}:\left(\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[9]{x^4}\right)$. d) $\sqrt[9]{a^5}:\left(\sqrt[12]{a^7}:\sqrt[15]{a^4}\right)$.

e) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{32}:\sqrt[8]{128}$. f) $\sqrt[6]{243}:\left(\sqrt[8]{27}\cdot\sqrt[12]{3}\right)$.

g) $\sqrt[5]{16}:\left(\sqrt[10]{128}:\sqrt[15]{64}\right)$. h) $\sqrt[9]{243}:\left(\sqrt[8]{27}:\sqrt[12]{3}\right)$.

i) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{32}}$. k) $\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[15]{4}\cdot\sqrt[10]{2}}$.

l) $\frac{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{27}}{\sqrt[10]{3}\cdot\sqrt[12]{243}\cdot\sqrt[15]{9}}$. m) $\frac{\sqrt[8]{125}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[8]{25}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[12]{3125}}$.

n) $\frac{\sqrt[a+b]{x^a}\cdot\sqrt[a-b]{x^b}}{\sqrt[a^2-b^2]{x^2}}$. o) $\frac{\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\cdot\sqrt[x-1]{a^{x+1}}}{\sqrt[x^2-1]{a^{2x^2-2x-1}}}$.

p) $\frac{\sqrt[p]{a^2}\cdot\sqrt[q]{a^3}\cdot\sqrt[pq]{a^{p+q}}}{\sqrt[2p]{a}\cdot\sqrt[2q]{a^2}\cdot\sqrt[pq]{a^{p-q}}}$. q) $\frac{\sqrt[p]{a^q}\cdot\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[p+q]{a^{p-q}}}{\sqrt[p^2]{a}\cdot\sqrt[q^2]{a}\cdot\sqrt[p^2q^2]{a^{p-q}}}$.

e. Wurzeln aus Wurzeln.

68. a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$. b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$. c) $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$.

d) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$. e) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^4}}$. f) $\sqrt[6]{\sqrt[7]{y^{12}}}$.

g) $\sqrt[9]{\sqrt[5]{a^6}}$. h) $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}$. i) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^{10}}}$.

k) $\sqrt[8]{\sqrt[7]{a^{24}b^{32}}}$. l) $\sqrt{\sqrt[5]{a^4b^6c^8}}$. m) $\sqrt[6]{\sqrt[7]{a^3b^4c^6}}$.

n) $\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}}$. o) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^7}}}$. p) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^7}}}$.

69. a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} + \sqrt[8]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} + \sqrt[12]{\sqrt{\sqrt{a}}}$.

b) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{30}}}} + \sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{35}}}} - \sqrt[5]{\sqrt[11]{\sqrt[3]{a^{55}}}}$.

c) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{a^{15}}}} + \sqrt[3]{\sqrt[7]{\sqrt{a^{21}}}} - \sqrt[5]{\sqrt[6]{\sqrt{a^{30}}}} - \sqrt[6]{\sqrt[11]{\sqrt{a^{66}}}}$.

d) $\sqrt[6]{\sqrt{a^5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

e) $\sqrt[10]{\sqrt[4]{a^7}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[5]{a^{11}}}$. f) $\sqrt[8]{\sqrt[9]{x^{15}}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[12]{x^7}}$.

g) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^7}}$. h) $\sqrt[14]{\sqrt[3]{r^{11}}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt[4]{a^5}}$.

i) $\sqrt[9]{\sqrt[3]{a^{14}}} : \sqrt[3]{\sqrt[6]{a^5}}$. k) $\sqrt[12]{\sqrt[6]{a^{31}}} : \sqrt[8]{\sqrt[12]{a^{19}}}$.

l) $\sqrt[8]{\sqrt[15]{a^{97}}} : \sqrt[9]{\sqrt[16]{a^{101}}}$. m) $\sqrt{\sqrt[36]{r^{55}}} : \sqrt[3]{\sqrt[20]{r^{43}}}$.

70. $\sqrt{a\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a^2b}}$!

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$. b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$. c) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$.

d) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}$. e) $\sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}}$. f) $\sqrt[11]{x^4\sqrt[5]{x^2}}$.

g) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$. h) $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$. i) $\sqrt[6]{a^3\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}}$.

k) $\sqrt[7]{a^3\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^4}}}$. l) $\sqrt[7]{a^2\sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{a}}}$. m) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a^2\sqrt[9]{a^7}}}$.

71. a) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}$. b) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{b}{a}}}$. c) $\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}\sqrt[7]{\frac{a^6}{b^4}}}$.

d) $\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^2}\sqrt[4]{\frac{y^5}{x^2}}}$. e) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[3]{a}}}$. f) $\sqrt[5]{\frac{a^2}{\sqrt[3]{a}}}$.

g) $\sqrt[7]{\frac{a^2b^6}{\sqrt[4]{ab^3}}}$. h) $\sqrt[5]{\frac{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}{b\cdot\sqrt[4]{b}}}$. i) $\sqrt[7]{\frac{x^3\sqrt{x}}{y^2\sqrt[3]{y}}}$.

72. a) $\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}$. b) $\sqrt[5]{9\sqrt[3]{81}}$. c) $\sqrt[7]{8\sqrt{2}}$.

d) $\sqrt[4]{125\sqrt[5]{5}}$. e) $\sqrt[9]{625\sqrt{5}}$. f) $\sqrt[9]{32\sqrt[5]{4}}$.

g) $\sqrt[8]{\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}$. h) $\sqrt[6]{\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{27}{8}}}$. i) $\sqrt[5]{\frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{625}{2}}}$.

k) $\sqrt[9]{\frac{32}{25}\sqrt[4]{\frac{125^3}{4}}}$. l) $\sqrt[3]{\frac{81}{64}\sqrt[5]{\frac{89}{243}}}$. m) $\sqrt[5]{\frac{27}{625}\cdot\sqrt[7]{\frac{125^6}{9^3}}}$.

73. a) $5\sqrt[3]{4\sqrt{2}}+3\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$.

b) $3\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt[7]{4\sqrt{8}}$.

c) $8\sqrt{10\sqrt{28}}+5\sqrt{20\sqrt{7}}-3\sqrt{4\sqrt{175}}$.

d) $5\sqrt{40\sqrt{20}}-7\sqrt{5\sqrt{80}}+6\sqrt{25\sqrt{125}}$.

e) $7\sqrt{6\sqrt{20}}-4\sqrt{12\sqrt{5}}+3\sqrt{4\sqrt{45}}$.

f) $8\sqrt{24\sqrt{12}}+3\sqrt{3\sqrt{48}}-2\sqrt{9\sqrt{27}}$.

g) $5\sqrt{15\sqrt{27}}+9\sqrt{20\sqrt{48}}-6\sqrt{45\sqrt{243}}$.

h) $6\sqrt[3]{4\sqrt{48}}-7\sqrt[3]{9\sqrt{27}}+2\sqrt[3]{25\sqrt{75}}$.

i) $7\sqrt[3]{12\sqrt{32}}+9\sqrt[3]{81\sqrt{128}}-7\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

k) $8\sqrt[3]{16\sqrt[3]{128}}-5\sqrt[3]{6\sqrt[3]{432}}+3\sqrt[3]{5\sqrt[3]{250}}$.

l) $9\sqrt[3]{18\sqrt[3]{54}}+8\sqrt[3]{32\sqrt[3]{128}}-11\sqrt[3]{98\sqrt[3]{686}}$.

f. Ausziehung der Quadratwurzel.

74. a) $\sqrt{441}$. b) $\sqrt{784}$. c) $\sqrt{841}$.

d) $\sqrt{1024}$. e) $\sqrt{1369}$. f) $\sqrt{1936}$.

g) $\sqrt{4761}$. h) $\sqrt{6724}$. i) $\sqrt{8649}$.

k) $\sqrt{8836}$. l) $\sqrt{9604}$. m) $\sqrt{9801}$.

n) $\sqrt{4a^2+12ab+9b^2}$. o) $\sqrt{9r^4-24r^2s+16s^2}$.

p) $\sqrt{\frac{4}{9}a^2b^4+ab^2c+\frac{9}{16}c^2}$. q) $\sqrt{\frac{4}{25}x^4-x^2+\frac{25}{16}}$.

r) $\sqrt{\frac{4a^2}{9b^2}+2+\frac{9b^2}{4a^2}}$. s) $\sqrt{\frac{x^4}{25y^2}-1+\frac{25y^2}{4x^4}}$.

75. a) $\sqrt{15129}$. b) $\sqrt{27889}$. c) $\sqrt{57121}$.

d) $\sqrt{75076}$. e) $\sqrt{772{,}84}$. f) $\sqrt{8{,}2369}$.

g) $\sqrt{328329}$. h) $\sqrt{390625}$. i) $\sqrt{524176}$.

k) $\sqrt{6037{,}29}$. l) $\sqrt{74{,}1321}$. m) $\sqrt{0{,}857476}$.

n) $\sqrt{(4a^2 + 12ab - 20ac + 9b^2 - 30bc + 25c^2)}$.
o) $\sqrt{(9a^2 - 12ab + 30ac + 4b^2 - 20bc + 25c^2)}$.
p) $\sqrt{(49a^2 - 70ab - 28ac + 25b^2 + 20bc + 4c^2)}$.
q) $\sqrt{(16a^4 - 24a^3 + 25a^2 - 12a + 4)}$.
r) $\sqrt{(25a^8 - 30a^6 - 11a^4 + 24a^2 + 16)}$.
s) $\sqrt{(36a^6 - 48a^4 + 60a^3b + 16a^2 - 40ab + 25b^2)}$.
t) $\sqrt{(25a^4 - 30a^3b + 29a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)}$.
u) $\sqrt{(25r^4 - 70r^3s + 109r^2s^2 - 84rs^3 + 36s^4)}$.
v) $\sqrt{(9x^4 - 15x^3y^2 - 17x^2y^4 + 70xy^6 + 49y^8)}$.

76. a) $\sqrt{3294225.}$ b) $\sqrt{61157{,}29.}$ c) $\sqrt{548{,}0281.}$
d) $\sqrt{10227204.}$ e) $\sqrt{10336225.}$ f) $\sqrt{10745284.}$
g) $\sqrt{17850625}$ h) $\sqrt{33800969.}$ i) $\sqrt{39526369.}$
k) $\sqrt{61591104.}$ l) $\sqrt{77951241.}$ m) $\sqrt{89359209.}$
n) $\sqrt{(4a^6 - 12a^5 + 25a^4 - 44a^3 + 46a^2 - 40a + 25)}$.
o) $\sqrt{(9a^6 - 6a^5 - 23a^4 + 38a^3 + 6a^2 - 40a + 25)}$.
p) $\sqrt{(16a^6 + 40a^5 + 9a^4 - 44a^3 - 26a^2 + 12a + 9)}$.
q) $\sqrt{(16a^6 + 8a^5 - 39a^4 - 34a^3 + 19a^2 + 30a + 9)}$.
r) $\sqrt{(25x^6 - 20x^5 + 34x^4 - 52x^3 + 25x^2 - 24x + 16)}$.
s) $\sqrt{(25x^6 - 30x^5 - 11x^4 + 52x^3 - 20x^2 - 16x + 16)}$.
t) $\sqrt{(9a^6 - 12a^5b + 16a^4b^2 - 26a^3b^3 + 16a^2b^4 - 12ab^5 + 9b^6)}$.
u) $\sqrt{(25x^6 - 40x^5y + 46x^4y^2 - 44x^3y^3 + 25x^2y^4 - 12xy^5 + 4y^6)}$.

77. a) $\sqrt{553002256.}$ b) $\sqrt{735440161.}$ c) $\sqrt{987530625.}$
d) $\sqrt{1753599376.}$ e) $\sqrt{2758875625.}$ f) $\sqrt{3199825489.}$
g) $\sqrt{4130889984.}$ h) $\sqrt{5142754369.}$ i) $\sqrt{7093850625.}$
k) $\sqrt{7562483849.}$ l) $\sqrt{8104500625.}$ m) $\sqrt{9828239569.}$

78. a) $\sqrt{5}$ (ht).*) b) $\sqrt{3}$ (zt). c) $\sqrt{2}$ (zt).
d) $\sqrt{6}$ (t). e) $\sqrt{19}$ (zt). f) $\sqrt{27}$ (ht).
g) $\sqrt{0{,}9}$ (ht). h) $\sqrt{1{,}6}$ (zt). i) $\sqrt{14{,}4}$ (zt).
k) $\sqrt{0{,}169}$ (m). l) $\sqrt{0{,}00225}$ (m). m) $\sqrt{0{,}00676}$ (m).
n) $\sqrt{0{,}84253}$ (ht). o) $\sqrt{5{,}72351}$ (ht). p) $\sqrt{3286{,}543}$ (zt).
q) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (zt). r) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ (ht). s) $\sqrt{\frac{19}{40}}$ (zt).

*) Durch diese Zeichen wird die (Dezimal-) Stelle angegeben, bis zu der die Wurzel berechnet werden soll.

t) $\sqrt{5\frac{18}{50}}$ (zt). u) $\sqrt{27\frac{5}{8}}$ (zt). v) $\sqrt{142\frac{11}{80}}$ (ht).
w) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ht). x) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ (ht). y) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ (ht).

79. a) $\sqrt{17-2\sqrt{5}}$ (zt). b) $\sqrt{0{,}8+\sqrt{0{,}5}}$ (zt).
c) $\sqrt{0{,}15+\sqrt{0{,}043}}$ (ht). d) $\sqrt{10+2\sqrt{9}}$ (ht).
e) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}$ (ht). f) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (ht).

80.*) a) $\sqrt[4]{279841}$. b) $\sqrt[4]{456976}$. c) $\sqrt[4]{614656}$.
d) $\sqrt[4]{1874161}$. e) $\sqrt[4]{47458321}$. f) $\sqrt[4]{74805201}$.
g) $\sqrt[4]{0{,}56}$ (zt). h) $\sqrt[4]{2{,}79}$ (zt). i) $\sqrt[4]{24{,}25}$ (zt).
k) $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$ (t). l) $\sqrt[4]{\frac{27}{44}}$ (t). m) $\sqrt[4]{\frac{153}{112}}$ (t).

81.)** Ein rechtwinkliges Dreieck habe die
a) Katheten $a = 25{,}45$ cm und $b = 37{,}25$ cm. Wie groß ist seine Hypotenuse (h)?
b) Hypotenuse $c = 215{,}45$ cm und die Kathete $a = 182{,}75$ cm. Wie groß ist die andere Kathete (h)?

82. Wie groß ist
a) die Diagonale eines Quadrates mit der Seite $a = 24$ cm (h)?
b) " " " Rechtecks mit den Seiten $a = 25{,}4$ cm und $b = 19{,}2$ cm (h)?
c) die Seite eines Rhombus mit den Diagonalen $e = 42{,}46$ cm und $f = 37{,}18$ cm (h)?
d) der Halbmesser eines Kreises mit dem Inhalt $J = 486{,}28$ qcm (h)? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

g. Ausziehung der Kubikwurzel.

83. a) $\sqrt[3]{2197}$. b) $\sqrt[3]{32{,}768}$. c) $\sqrt[3]{103823}$.
d) $\sqrt[3]{175616}$. e) $\sqrt[3]{274{,}625}$. f) $\sqrt[3]{438{,}976}$.
g) $\sqrt[3]{830{,}584}$. h) $\sqrt[3]{551368}$. i) $\sqrt[3]{778688}$.
k) $\sqrt[3]{531{,}441}$. l) $\sqrt[3]{636{,}056}$. m) $\sqrt[3]{0{,}704969}$.
n) $\sqrt[3]{(8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3)}$.
o) $\sqrt[3]{(64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3)}$.
p) $\sqrt[3]{(216a^6 - 756a^4b + 882a^2b^2 - 343b^3)}$.

---

*) Es ist $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$!
**) Weitere Aufgaben dieser Art stehen in Nr. 29 e—g.

q) $\sqrt[3]{(27a^3b^3 + 108a^2b^2 + 144ab + 64)}$.

r) $\sqrt[2]{(\frac{8}{27}a^3 - a^2b + \frac{9}{8}ab^2 - \frac{27}{64}b^3)}$.

s) $\sqrt[3]{(\frac{8}{125}a^6 - \frac{8}{25}a^4b^3 + \frac{8}{15}a^2b^6 - \frac{8}{27}b^9)}$.

t) $\sqrt[3]{8x^{3p+3} + 36x^{2p+2}y^{q-1} + 54x^{p+1}y^{2q-2} + 27y^{3q-3}}$.

u) $\sqrt[3]{(216a^{3x+3y-6} - 756a^{3x+y-1} + 882a^{3x-y+4} - 343a^{3x-3y+9})}$.

84. a) $\sqrt[3]{1404928}$. b) $\sqrt[3]{4741632}$. c) $\sqrt[3]{5892232}$.

d) $\sqrt[3]{6644672}$. e) $\sqrt[3]{4410944}$. f) $\sqrt[3]{29503629}$.

g) $\sqrt[3]{84604519}$. h) $\sqrt[3]{191102976}$. i) $\sqrt[3]{418508992}$.

k) $\sqrt[3]{470910952}$. l) $\sqrt[3]{758550528}$. m) $\sqrt[3]{952763904}$.

n) $\sqrt[3]{(a^6 + 2a^5 + 3a^4 + 4a^3 + 3a^2 + 2a + 1)}$.

o) $\sqrt[3]{(a^6 - 2a^5 + 3a^4 - 4a^3 + 3a^2 - 2a + 1)}$.

p) $\sqrt[3]{(8a^6 - 36a^5 + 66a^4 - 63a^3 + 33a^2 - 9a + 1)}$.

q) $\sqrt[3]{(8x^6 - 12x^5 + 30x^4 - 25x^3 + 30x^2 - 12x + 8)}$.

r) $\sqrt[3]{(8a^6 - 60a^5 + 114a^4 + 55a^3 - 171a^2 - 135a - 27)}$.

s) $\sqrt[3]{(27p^6 - 54p^5 - 99p^4 + 172p^3 + 165p^2 - 150p - 125)}$.

85. a) $\sqrt[3]{3}$ (t). b) $\sqrt[3]{9}$ (t). c) $\sqrt[3]{12}$ (t).

d) $\sqrt[3]{0{,}5}$ (zt). e) $\sqrt[3]{0{,}072}$. f) $\sqrt[3]{0{,}961}$.

86. Wie groß ist

a) die Kante eines Würfels mit dem Inhalt $V = 6824$ ccm (h)?

b) die Höhe eines Cylinders mit dem Inhalt $V = 52729$ ccm, wenn sie gleich dem Durchmesser seiner Grundfläche ist (h)? $\pi = \frac{22}{7}$.

c) der Halbmesser einer Kugel mit dem Inhalt $V = 42585$ ccm (h)? $\pi = \frac{22}{7}$.

Nr. 26. Potenzen und Wurzeln mit ganzen negativen Exponenten.

87. Welchen Wert hat a^0? $(a+b)^0$? ax^0? $(ax)^0$? a^0x^0? $\frac{(a+b)^0}{(ab)^0}$? 10^0 $(-1)^0$?

88. Die negativen Exponenten zu beseitigen aus den Ausdrücken:

a) a^{-1}; 7^{-1}; $(a+b)^{-1}$; $3a^{-1}$; $(3a)^{-1}$.

b) 2^{-3}; 5^{-2}; $(x-y)^{-5}$; ax^{-5}; $(ax)^{-3}$.

c) $3^{-4} \cdot 2^{-3}$; $a^{-m} \cdot b^{-n}$; $a^{1-p} \cdot b^{2-q}$ $\left(\frac{p}{q} > 2\right)$.

d) $\frac{1}{a^{-4}}$; $\frac{1}{x^{-n}}$; $\frac{1}{a^{-2}b}$; $\frac{1}{a^2b^{-3}}$; $\frac{1}{a^{-2}b^{-3}}$.

e) $\frac{a^{-3}}{b^{-4}}$; $\frac{5x^{-3}}{y^{-5}}$; $\frac{3(a-b)^{-5}}{5(a+b)^{-3}}$; $\frac{ax^{-3-2n}}{by^{1-4n}}$.

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$; $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}$; $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

89. Wie groß ist

a) $32 \cdot 4^{-3}$? b) $24 \cdot 6^{-2}$? c) $10 \cdot 5^{-3}$?

d) $81 \cdot 3^{-5}$? e) $(0{,}1)^{-2}$? f) $(0{,}2)^{-2}$?

g) $\frac{2^{-5}}{4^{-3}}$? h) $\frac{3^{-6}}{9^{-5}}$? i) $\frac{10^{-3}}{5^{-4}}$?

k) $(-2)^{-3}$? l) $(-1)^{-6}$? m) $(-3)^{-4}$?

n) $(-3a)^{-2}$? o) $(-10x^2)^{-3}$? p) $(-xy)^{1-3n}$?

q) $25 \cdot (-5)^{-2}$? r) $54 \cdot (-3)^{-4}$? s) $125 \cdot (-10)^{-2}$?

t) $\frac{25}{(-2)^{-3}}$? u) $\frac{125}{(-4)^{-2}}$? v) $\frac{32}{(-5)^{-3}}$?

w) $\frac{(-5)^2}{(-4)^3}$? x) $\frac{(-6)^{-3}}{(-9)^{-1}}$? y) $\frac{(-10)^{-4}}{(-15)^{-5}}$?

90. a) $a^{-5} \cdot a^{-8}$; $a^7 \cdot a^{-5}$; $a^{-10} \cdot a^3$.

b) $a^{3x} \cdot a^{-5x}$; $a^{2-3n} \cdot a^{n-4}$; $a^{5-3p} \cdot a^{2-4p}$.

c) $4a^{-5}b^2 \cdot 5a^3b^{-7}$ d) $11a^{-2}b^{-3} \cdot 7a^5b^{-4}$.

e) $0{,}5a^{-6}b^9 \cdot 0{,}3a^8b^{-11}$. f) $1{,}3x^{-4}y^{-5} \cdot 1{,}2x^{-3}y^{-4}$.

g) $\frac{3}{4}(x-y)^{-7} \cdot \frac{4}{5}(x-y)^4$. h) $2\frac{1}{2}(a+b)^{2n} \cdot 2\frac{2}{5}(a+b)^{-5n}$.

i) $\frac{15a^{-3}b^{-5}}{16c^2d^{-4}} \cdot \frac{24c^{-4}d^2}{25a^{-7}b^{-8}}$. k) $\frac{14x^{2-3n}y^{3-5m}}{9z^{2-4p}} \cdot \frac{12y^{m-3}z^{-5}}{35x^{3-5n}}$.

91. a) $x^{-7} : x^3$; $x^4 : x^{-9}$; $x^{-5} : x^{-7}$.

b) $a^{-3x} : a^{5x}$; $a^{3x} : a^{-2x}$; $a^{-3x} : a^{-2x}$.

c) $35a^{-3}b^{-4} : 7a^{-5}b^2$. d) $52x^3y^{-5} : 13x^{-2}y^3$.

e) $0{,}15r^7s^{-5} : 0{,}3r^{-2}s^7$. f) $0{,}2a^5b^{-3} : 0{,}5a^{-3}b^3$.

g) $13\frac{1}{8}p^{-3}q^{-7} : 7\frac{7}{9}p^{-5}q^2$. h) $7\frac{3}{7}x^4y^{-5} : 9\frac{3}{4}x^{-3}y^3$.

i) $\frac{a^7b^{-5}c^6}{x^{-3}y^{-4}z^5} : \frac{a^{-9}b^{-3}c^{-4}}{x^5y^{-2}z^{-3}}$. k) $\frac{x^{a-b}y^{c-d}}{a^{x-y}b^{y-z}} : \frac{x^{2b-3a}y^{2c-5d}}{a^{-3x}b^{2z-5y}}$.

l) $\frac{27a^{3-4n}b^{5n-4}}{25c^{2-3n}d^{-5n}} : \frac{18a^7b^{3n}}{35c^{-11}d^{-14}}$. m) $\frac{57x^{2a-3b}y^{4m-9n}}{52z^{-5q}} : \frac{76x^{3b-2a}y^{-7m}}{39z^{2q-5p}}$.

92. a) $x^{-n} \cdot y^{-n}$; $a^{-2x} \cdot b^{-2x} \cdot c^{-2x}$; $a^{-2x} \cdot b^{-2x} \cdot c^{2x}$.

b) $2^{-3} \cdot 5^{-3}$; $8^{-2} \cdot 125^{-2}$; $\frac{1}{4^{-2} \cdot 25^{-2}}$.

c) $(-2)^{-4} \cdot (5)^{-4}$; $(-8)^{-2} \cdot (-5)^{-2}$; $\frac{1}{(-4)^{-3} \cdot (-5)^{-3}}$.

d) $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2n} \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-2n}$. e) $\left(\frac{ab+b^2}{a^2-ab}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{ab-b^2}{a^2+ab}\right)^{-2}$.

f) $\frac{4^{-3} \cdot 15^{-3}}{6^{-3}}$. g) $\frac{9^{-4} \cdot 12^{-4}}{6^{-4} \cdot 4^{-4}}$.

h) $\frac{9^{-3} \cdot (-10)^{-3}}{(15)^{-3}}$. i) $\frac{(-15)^{-4} \cdot (-12)^{-4}}{(-20)^{-4}}$.

k) $\frac{(-24)^{-3} \cdot (-6)^3}{8^{-3}}$. l) $\frac{(-32)^{-5} \cdot (-4)^5}{(-16)^{-5}}$.

93. a) $(x^3)^{-2}$; $(x^{-3})^2$; $(x^{-3})^{-2}$.

b) $(a^{-1})^4$; $(a^{-2})^5$; $(a^3)^{-4}$; $(a^{-5})^{-7}$.

c) $\left(\frac{a^{-3}b^4c^{-5}}{d^2e^{-7}}\right)^{-2}$. d) $\left(\frac{3a^{-5}b^{-7}c^4}{4x^2y^{-3}z^{-2}}\right)^{-3}$.

e) $\left(\frac{a^{-3}b^{-4}}{c^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^2b^{-3}}{c^{-4}}\right)^{-3}$. f) $\left(\frac{x^3y^{-2}}{z^{-5}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{x^{-2}y^{-3}}{z^{-4}}\right)^{-4}$.

94. a) $(5x^{-3}y^2 - 7x^{-1}y^{-1} + 9x^2y^{-3}) \cdot 10x^{-2}y^{-2}$.

b) $(3a^{2-3p}b^{3-4q} - 5a^{4-2p}b^{1-5q} + 7a^{6-p}b^{-2-6q}) \cdot 2a^{1-p}b^{2-3q}$.

c) $(\frac{8}{5}x^{3-m}y^{2-n} - \frac{8}{15}x^{1-2m}y^{-2n} - \frac{16}{25}x^{-2-3m}y^{-2-3n}) \cdot \frac{35}{8}x^{-m}y^{-n-1}$.

d) $(\frac{5}{12}x^{-2a}y^{-2b} + \frac{5}{8}x^{-a-b}y^{a-b} - \frac{15}{4}x^{-2b}y^{2a}) \cdot \frac{8}{5}x^{-a-b}y^{-2a+b}$.

95. a) $(49x^{-5} - 35x^{-4} - 28x^{-3} + 21x^{-2}) : 7x^{-7}$.

b) $(65a^{5-7n} - 52a^{3-8n} + 39a^{1-9n} - 26a^{-1-10n}) : 13a^{2-4n}$.

96. a) $(3a^{-5} - 4a^{-4} + 5a^{-3}) \cdot (2a^{-2} - a^{-1})$.

b) $(4a^{-6} - 6a^{-5} + 9a^{-4}) \cdot (2a^{-3} + 3a^{-2})$.

c) $(9x^{-6} + 12x^{-4} + 16x^{-2}) \cdot (3x^{-3} - 4x^{-1})$.

d) $(5x^{-4} - 4x^{-3} - 3x^{-2} + 2x^{-1} - 1) \cdot (4x^{-2} - 2x^{-1} + 1)$.

e) $(3a^2 - 5a^{-1} + 6a^{-4} - 4a^{-7}) \cdot (3a^{-2} + 5a - 6a^4 + 4a^{-7})$.

f) $(ax^{-2n+1} - bx^{-3n-1} + cx^{-4n-3}) \cdot (ax^{1-n} + bx^{2-3n} - cx^{3-5n})$.

g) $\left(\frac{a^{-3}}{b^{-6}} - \frac{2a^{-4}}{b^{-5}} + \frac{a^{-5}}{b^{-4}}\right) \cdot \left(\frac{b^{-2}}{a^{-3}} - \frac{2b^{-3}}{a^{-2}} + \frac{b^{-4}}{a^{-1}}\right)$.

h) $\left(\frac{3x^{-4}}{5y^{-3}} + \frac{6x^{-3}}{5y^{-4}} - \frac{8x^{-2}}{15y^{-5}}\right) \cdot \left(\frac{15x^{-7}}{4y^2} - \frac{5x^{-5}}{8y^{-2}} + \frac{3x^{-3}}{4y^{-6}}\right)$.

97. a) $(x^{-2m} - y^{-2n}) : (x^{-m} + y^{-n})$.

b) $(a^{-6y} + b^{-9z}) : (a^{-4y} - a^{-2y}b^{-3z} + b^{-6z})$.

c) $(a^{-9m} - b^{-6n}) : (a^{-6m} + a^{-4m}b^{-2n} + b^{-4n})$.

d) $(a^{-8n+5} + a^{-6n+3} + a^{-4n+1}) : (a^{-5n-1} + a^{-4n-2} + a^{-3n-3})$

e) $(a^{-12n-9} + a^{-8n-1} - a^{-4n+7} - a^{15}) : (a^{-4n-3} - a^{-2n+1} + a^5 - a^{2n+9})$.

---

98. Die negativen Exponenten zu beseitigen aus den Ausdrücken

a) $\sqrt[-2]{a}$; $\sqrt[-5]{a}$; $\sqrt[-n]{a}$; $\frac{1}{\sqrt[-n]{a}}$; $\sqrt[-n]{\frac{a}{b}}$.

b) $\sqrt[-3]{a^6}$; $\sqrt[-9]{a^{15}}$; $\sqrt[-8]{a^6}$; $\sqrt[-n]{a^{2n}}$.

c) $\sqrt[-10]{a^{-15}}$; $\sqrt[-12]{a^{-8}}$; $\sqrt[-12]{a^{-16}}$; $\sqrt[-n]{a^{-2n}}$.

99. Wie groß ist

a) $\sqrt[-3]{8}$? b) $\sqrt[-4]{81}$? c) $\sqrt[-5]{32}$?

d) $\sqrt[-3]{-27}$? e) $\sqrt[-5]{-243}$? f) $\sqrt[-3]{-125}$?

g) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[-3]{3}$? h) $\sqrt[-4]{4} \cdot \sqrt[4]{64}$? i) $\sqrt[-5]{2} \cdot \sqrt[5]{64}$?

k) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[-3]{9}$? l) $\sqrt[5]{-9} : \sqrt[-5]{-81}$? m) $\sqrt[6]{25} : \sqrt[-6]{625}$?

n) $\sqrt[4]{-\frac{a^2}{b}} : \sqrt[-4]{-\frac{a^2}{b^3}}$? o) $\sqrt[-3]{\frac{(a-b)^3}{2ab}} : \sqrt[3]{\frac{a-b}{4a^2b^2}}$?

p) $\sqrt[-4]{\frac{(a+b)^3}{(x-y)^2}} : \sqrt[4]{\frac{a+b}{(x-y)^2}}$?

100. Wie groß ist

a) $\sqrt[-3]{4} \cdot \sqrt[-2]{2}$? b) $\sqrt[-3]{9} \cdot \sqrt[-4]{27}$? c) $\sqrt[-2]{8} \cdot \sqrt[-5]{4}$?

d) $\sqrt[-3]{9} \cdot \sqrt{3}$? e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[-4]{8}$? f) $\sqrt[-4]{27} \cdot \sqrt[5]{81}$?

g) $\sqrt[-4]{27} : \sqrt[-3]{9}$? h) $\sqrt[-2]{24} : \sqrt[-3]{18}$? i) $\sqrt[-4]{8} : \sqrt[-5]{64}$?

k) $\sqrt[6]{8a^4} : \sqrt[-3]{4a}$? l) $\sqrt[-4]{\frac{8a^2}{27b^3}} : \sqrt[3]{\frac{4a}{9b}}$? m) $\sqrt[-3]{\frac{4x^{2p-1}}{5y^{3-2p}}} : \sqrt[4]{\frac{4x^p}{5y^{-3p}}}$?

n) $\sqrt[-4]{\sqrt[-3]{a}} \cdot \sqrt[-3]{\sqrt[-6]{a}}$? o) $\sqrt[-4]{\sqrt[5]{a}} : \sqrt[3]{\sqrt[-5]{a}}$? p) $\sqrt[-p]{\sqrt[-q]{a}} : \sqrt[-q]{\sqrt[r]{a}}$?

Nr. 27. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

101. Als Potenz die Wurzel darzustellen

a) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{a^4}$; $\sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[x]{a^y}$.

b) $\sqrt[3]{a^{-5}}$; $\sqrt[5]{a^{-3}}$; $\sqrt[4]{a^{-3}}$; $\sqrt[6]{a^{-5}}$.

c) $\sqrt[-5]{a^4}$; $\sqrt[-x]{a^y}$; $\sqrt[-6]{a^{-5}}$; $\sqrt[-a]{x^{-b}}$.

d) $\sqrt[3]{-a^4}$; $\sqrt[3]{a^{-5}}$; $\sqrt[-3]{-a^2}$; $\sqrt[-5]{-a^{-3}}$.

102. Als Wurzel die Potenz darzustellen

a) $a^{\frac{7}{5}}$; $b^{\frac{4}{5}}$; $c^{\frac{2}{5}}$; $d^{\frac{3}{5}}$;

b) $a^{-\frac{3}{4}}$; $b^{-\frac{4}{7}}$; $c^{-\frac{5}{2}}$; $d^{-\frac{3}{5}}$;

c) $-a^{\frac{3}{4}}$; $-a^{\frac{3}{5}}$; $-a^{\frac{5}{6}}$; $-a^{\frac{7}{3}}$.

d) $-a^{-\frac{3}{4}}$; $-a^{-\frac{3}{5}}$; $-a^{-\frac{5}{6}}$; $-a^{-\frac{5}{3}}$.

103. Wie groß ist

a) $8^{\frac{2}{3}}$? b) $9^{\frac{3}{2}}$? c) $27^{\frac{4}{3}}$? d) $16^{\frac{3}{4}}$?

e) $64^{\frac{1}{6}}$? f) $81^{1\frac{1}{4}}$? g) $125^{1\frac{1}{3}}$? h) $32^{1\frac{2}{5}}$?

i) $(8a^3)^{\frac{2}{3}}$? k) $(54)^{\frac{2}{3}}$? l) $(48)^{\frac{3}{4}}$? m) $(96)^{\frac{4}{5}}$?

n) $(-8)^{\frac{5}{3}}$? o) $(-32)^{\frac{4}{5}}$? p) $-27^{\frac{2}{3}}$? q) $-243^{\frac{4}{5}}$?

r) $25^{-\frac{1}{2}}$? s) $64^{-\frac{2}{3}}$? t) $125^{-\frac{5}{3}}$? u) $81^{-\frac{3}{4}}$?

v) $(-8)^{-\frac{2}{3}}$? w) $(-32)^{-\frac{3}{5}}$? x) $-27^{-\frac{4}{3}}$? y) $-16^{-\frac{3}{4}}$?

104. a) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$. b) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}}$. c) $a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{3}{8}}$.

d) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{5}{6}}$. e) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}}$. f) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{1\frac{5}{12}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}$.

g) $x^{0,8} \cdot x^{1,4} \cdot x^{-0,2}$. h) $x^{1,3} \cdot x^{-0,7} \cdot x^{0,4}$. i) $x^{2,3} \cdot x^{3,5} \cdot x^{-2,8}$.

k) $a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{r}}$. l) $x^{\frac{1}{a-b}} \cdot x^{\frac{1}{a-b}} \cdot x^{\frac{-2a}{a^2-b^2}}$. m) $x^{\frac{a}{b}} \cdot x^{\frac{b}{a}} \cdot x^{\frac{b^2-a^2}{ab}}$.

n) $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{2}{3}}$. o) $a^{\frac{4}{5}} b^{\frac{2}{6}} \cdot a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$. p) $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{m}} \cdot a^{-\frac{1}{n}} b^{\frac{2}{m}}$.

105. a) $x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}}$. b) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{5}}$. c) $x^{-\frac{5}{6}} : x^{-\frac{2}{3}}$.

d) $a^{-\frac{3}{5}} : a^{\frac{1}{2}}$. e) $a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$. f) $a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{n}{m}}$.

g) $a^{1,5} : a^{-0,8}$. h) $a^{-1,4} : a^{1,2}$. i) $a^{-0,7} : a^{-0,3}$.

k) $(0,5)^{1,4} : (0,5)^{-0,6}$. l) $(0,4)^{-0,6} : (0,4)^{0,4}$. m) $(0,6)^{-1,3} : (0,6)^{-0,3}$.

n) $25^{\frac{5}{6}} : 25^{\frac{1}{3}}$. o) $16^{\frac{5}{6}} : 16^{\frac{7}{12}}$. p) $(\frac{2}{3})^{-\frac{4}{3}} : (\frac{2}{3})^{-\frac{1}{2}}$.

106. a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$. b) $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$. c) $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{3}{4}}$.

d) $8^{\frac{4}{5}} \cdot 4^{\frac{4}{5}}$. e) $27^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$. f) $2^{\frac{5}{6}} \cdot 32^{\frac{5}{6}}$.

g) $64^{\frac{2}{3}} : 8^{\frac{2}{3}}$ h) $128^{\frac{4}{5}} : 4^{\frac{4}{5}}$. i) $1024^{\frac{6}{7}} : 8^{\frac{6}{7}}$.

k) $(13\frac{1}{3})^{\frac{4}{5}} \cdot (5\frac{2}{5})^{\frac{4}{5}} \cdot (2\frac{2}{9})^{\frac{4}{5}}$. l) $(16\frac{1}{5})^{\frac{5}{6}} \cdot (2\frac{2}{7})^{\frac{5}{6}} \cdot (19\frac{11}{16})^{\frac{5}{6}}$.

m) $(2\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} \cdot (9\frac{3}{5})^{\frac{3}{4}} \cdot (36\frac{1}{24})^{\frac{3}{4}}$. n) $(6\frac{2}{3})^{\frac{5}{6}} \cdot (5\frac{2}{5})^{\frac{5}{6}} \cdot (14\frac{2}{9})^{\frac{5}{6}}$.

o) $(7\frac{2}{7})^{\frac{3}{8}} \cdot (1\frac{2}{5})^{\frac{3}{8}} : (10\frac{1}{5})^{\frac{3}{8}}$. p) $(4\frac{7}{9})^{\frac{4}{6}} \cdot (2\frac{1}{4})^{\frac{4}{6}} : (10\frac{3}{4})^{\frac{4}{6}}$.

107. a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$. b) $x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{7}{10}}$. c) $r^{\frac{5}{6}} : s^{\frac{7}{12}}$.

d) $4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$. e) $27^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{5}{6}}$. f) $16^{\frac{4}{5}} : 32^{\frac{4}{5}}$.

108. a) $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$. b) $(x^{\frac{4}{5}})^{\frac{5}{6}}$. c) $(p^{\frac{3}{4}})^{\frac{6}{7}}$.

d) $(a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$. e) $(a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}$. f) $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{5}}$.

g) $(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}})^{\frac{12}{5}}$. h) $\left(x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{nq}{mp}}$. i) $\left(a^{-\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{q}}\right)^{-\frac{nq}{mp}}$.

109. a) $\sqrt[2]{a}$. b) $\sqrt[2]{16}$. c) $\sqrt[3]{-8}$.

d) $\sqrt[-1\frac{1}{2}]{8}$. e) $\sqrt[-\frac{5}{6}]{27^{2\frac{1}{2}}}$ f) $\sqrt[-\frac{4}{6}]{125^{-1\frac{1}{3}}}$.

g) $\sqrt[-2\frac{1}{2}]{4^{-6\frac{1}{4}}}$. h) $\sqrt[-2\frac{1}{3}]{64^{-2\frac{1}{4}}}$. i) $\sqrt[-4\frac{1}{3}]{16^{-5\frac{1}{4}}}$.

110. a) $\sqrt[-2\frac{1}{2}]{\sqrt[\frac{3}{4}]{4^{1\frac{7}{8}}}}$. b) $\sqrt[1\frac{1}{3}]{\sqrt[-\frac{3}{8}]{100^{-\frac{1}{2}}}}$. c) $\sqrt[-1\frac{2}{5}]{\sqrt[\frac{3}{7}]{12^{-\frac{3}{8}}}}$.

d) $\sqrt[1\frac{5}{6}]{\sqrt[-1\frac{1}{5}]{3^{2\frac{1}{5}}}}$. e) $\sqrt[-1\frac{5}{7}]{\sqrt[-\frac{7}{10}]{3^{4\frac{1}{5}}}}$. f) $\sqrt[-1\frac{3}{5}]{\sqrt[-3\frac{3}{4}]{81^{-1\frac{1}{2}}}}$.

Nr. 28. Gleichungen, in denen die Unbekannten unter Wurzeln auftreten.

a. Mit einer Unbekannten.

111. a) $\sqrt{x} = 5$. b) $\sqrt{x} = 7$. c) $\sqrt{x} = 1$.

d) $\sqrt{2x} = 4$. e) $\sqrt{3x} = 6$. f) $\sqrt{6x} = 9$.

g) $\sqrt{5x} = 4$. h) $\sqrt{3x} = 7$. i) $\sqrt{4x} = 3$.

k) $2\sqrt{x} = 3$. l) $3\sqrt{x} = 5$. m) $5\sqrt{x} = 4$.

n) $4\sqrt{3x} = 2{,}7$. o) $5\sqrt{2x} = 0{,}8$. p) $3\sqrt{4x} = 3{,}2$.

q) $\sqrt{x-3} = 4$. r) $\sqrt{x-7} = 5$. s) $\sqrt{x+5} = 6$.

t) $\sqrt{2x-3} = 7$. u) $\sqrt{5x-4} = 6$. v) $\sqrt{9x+1} = 8$.

w) $3\sqrt{5x-3} = 0{,}2$. x) $8\sqrt{3x+5} = 1{,}2$. y) $18\sqrt{2x-7} = 2{,}4$.

α) $\sqrt{5x-17} = \sqrt{3x+11}$. β) $\sqrt{9x-25} = \sqrt{23-3x}$.

γ) $\sqrt{3x-17} = \sqrt{133-12x}$. δ) $\sqrt{17x+35} = \sqrt{90-5x}$.

ε) $\sqrt{13x-69} = \sqrt{6-12x}$. ζ) $\sqrt{86-3x} = \sqrt{126-18x}$.

η) $4\sqrt{3x+4} = 5\sqrt{3x-5}$. ϑ) $3\sqrt{5x+9} = 4\sqrt{4x-8}$.

ι) $7\sqrt{2x-5} = 3\sqrt{6x+7}$. κ) $5\sqrt{5x-9} = 6\sqrt{3x-2}$.

λ) $8\sqrt{4x-7} = 5\sqrt{7x+8}$ μ) $9\sqrt{3x+4} = 7\sqrt{5x+6}$.

ν) $a\sqrt{bx} = b$. ο) $b\sqrt{x-a} = a$.

π) $\sqrt{\frac{b-ax}{a+b}} = a-b$. ρ) $a\sqrt{\frac{ax-b}{a+b}} = b\sqrt{\frac{ax+b}{a-b}}$.

112. a) $\sqrt{x}+5 = 12$. b) $\sqrt{x}-9 = 2$. c) $\sqrt{x}+3 = 7$.

d) $13-\sqrt{x} = 8$. e) $27-\sqrt{x} = 19$. f) $23-\sqrt{x} = 17$.

g) $17+3\sqrt{x} = 68$. h) $24-5\sqrt{x} = 9$. i) $38-4\sqrt{x} = 10$.

k) $6{,}4+7\sqrt{x} = 8{,}5$. l) $3{,}7-3\sqrt{x} = 1{,}3$. m) $4{,}9-5\sqrt{x} = 2{,}4$.

n) $\frac{1}{4}+5\sqrt{x} = 1\frac{1}{19}$. o) $\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\sqrt{x} = \frac{2}{3}$. p) $\frac{8}{15}-\frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{5}$.

q) $\sqrt{12x}-7 = 5$. r) $\sqrt{18x}+4 = 13$. s) $8-\sqrt{6x} = 2$.

t) $5+3\sqrt{2x} = 13$. u) $21-2\sqrt{3x} = 6$. v) $32-5\sqrt{6x} = 8$.

w) $3{,}5+6\sqrt{0{,}4x} = 4{,}3$. x) $5{,}3-4\sqrt{0{,}5x} = 2{,}8$.

y) $7{,}1 - 5\sqrt{0{,}8x} = 1{,}5$. z) $27 - 5\sqrt{\frac{5}{8}x} = 9$.

α) $34 - 8\sqrt{1\frac{3}{4}x} = 13$. β) $4\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\sqrt{2\frac{2}{3}x} = 8\frac{5}{6}$.

γ) $8\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{5}x} = 1\frac{13}{15}$. δ) $6\frac{5}{6} - \sqrt{2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}x} = 5\frac{1}{12}$.

ε) $13\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3}\sqrt{7\frac{1}{4} - \frac{4}{5}x} = 6\frac{7}{12}$. ζ) $3\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}} = 5\frac{1}{10}$.

η) $7\frac{5}{8} - 1\frac{2}{3}\sqrt{5\frac{3}{5} - 2\frac{2}{3}x} = 4\frac{7}{24}$.

113. a) $\sqrt{7 + \sqrt{5x + 1}} = 4$. b) $\sqrt{19 + \sqrt{3x + 15}} = 5$.

c) $\sqrt{23 - \sqrt{4x - 1}} = 2\sqrt{2}$. d) $\sqrt{41 - \sqrt{9x + 7}} = 3\sqrt{3}$.

e) $\sqrt{52 - 3\sqrt{5x + 6}} = 2\sqrt{10}$. f) $\sqrt{85 - 4\sqrt{19x + 5}} = 3\sqrt{5}$.

g) $\sqrt{16 + 3\sqrt{7x - 5}} = 2\sqrt{7}$. h) $\sqrt{25 + 5\sqrt{2x + 1}} = 5\sqrt{2}$.

i) $\sqrt{a - \sqrt{(a+b)x - 4ab}} = \sqrt{b}$. k) $\sqrt{a^2 - \sqrt{(a^2+b^2)x - 2ab}} = b$.

l) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3x - 2ab}} = a - b$.

m) $\sqrt{a^4 - b^4 - b^2\sqrt{2x + 4(a^4 + b^4)}} = a^2 + b^2$.

114. a) $\sqrt[3]{19 + 5\sqrt{7x + 18}} = 4$. b) $\sqrt[3]{17 - 3\sqrt{5x - 6}} = 2$.

c) $\sqrt{43 + 2\sqrt[3]{5x + 2}} = 7$. d) $\sqrt{56 - 5\sqrt[3]{7x - 6}} = 6$.

e) $\sqrt[4]{47 + 2\sqrt{8x + 49}} = 3$. f) $\sqrt[4]{19 - 3\sqrt[3]{5x - 9}} = 2$.

g) $\sqrt{51 - 5\sqrt[4]{13x + 3}} = 6$. h) $\sqrt[3]{97 + 4\sqrt[4]{12x + 1}} = 5$.

115. a) $134 - 15\sqrt{x} - 27 = 36\sqrt{x} + 116 - 52\sqrt{x}$.

b) $28 + 11\sqrt{x} - 19\sqrt{x} = 27 - 15\sqrt{x} + 22$.

c) $38 + 17\sqrt{x} - 19\sqrt{x} = 43 - 4\sqrt{x} + 7$.

d) $27\sqrt{x} - 15 - 14\sqrt{x} + 37 = 19\sqrt{x} - 38 + 6\sqrt{x} - 12$.

e) $13\sqrt{x} - 19 + 15\sqrt{x} = 25 - 5\sqrt{x} + 46 - 13\sqrt{x}$.

f) $26 - 4\sqrt{x} - 18 = 3\sqrt{x} + 7 - 5\sqrt{x}$.

g) $49 - 3\sqrt{3x} + 29 - 5\sqrt{3x} = 6\sqrt{3x} - 48 - 4\sqrt{3x} + 8\sqrt{3x}$.

h) $27 - 13\sqrt{2x} - 8 + 11\sqrt{2x} = 5 - 8\sqrt{2x} + 23 - 3\sqrt{2x}$.

i) $41 - 3\sqrt{5x} + 7 - 8\sqrt{5x} = 9\sqrt{5x} - 19 + 4\sqrt{5x} - 53$.

k) $16 + 7\sqrt{6x} - 19 + 3\sqrt{6x} = 5\sqrt{6x} - 8 + 4\sqrt{6x} + 11$.

l) $\frac{4}{5}(23 - 2\sqrt{x}) + 17 = \frac{5}{9}(11\sqrt{x} + 1) + \frac{2}{9}(5\sqrt{x} - 2)$.

m) $\frac{7}{6}(5\sqrt{x} + 2) - \frac{3}{5}(7\sqrt{x} - 4) = 3\sqrt{x} + \frac{3\sqrt{x} + 4}{5}$.

n) $\frac{7}{11}(8\sqrt{x} + 9) - 8\sqrt{x} = \frac{5}{8}(3\sqrt{x} - 1) - 8$.

o) $\frac{4(3\sqrt{x} - 8)}{9} - \frac{5(4\sqrt{x} - 9)}{12} + \frac{3}{4}\sqrt{x} = \frac{2(5\sqrt{x} - 11)}{18} + \frac{7\sqrt{x} + 3}{24}$.

p) $\frac{3(4+3\sqrt{x})}{5}+\frac{2(7+4\sqrt{x})}{15}=\frac{\sqrt{x}-17}{12}-\frac{5(6\sqrt{x}-19)}{4}+11\frac{1}{2}\sqrt{x}.$

q) $\frac{5(3-2\sqrt{x})}{16}-\frac{3(9-\sqrt{x})}{8}+\frac{7(4\sqrt{x}-7)}{24}=\frac{7(8\sqrt{x}+23)}{48}-\frac{5(17\sqrt{x}-14)}{12}.$

r) $\frac{2\sqrt{2x+5}+9}{3}+\frac{4\sqrt{2x+5}-5}{11}=\frac{3\sqrt{2x+5}-9}{2}-\frac{\sqrt{2x+5}-15}{6}.$

s) $\frac{7\sqrt{4x-3}+8}{5}-\frac{11\sqrt{4x-3}+5}{2}=\frac{3-13\sqrt{4x-3}}{6}-\frac{7+3\sqrt{4x-3}}{3}.$

t) $\frac{9\sqrt{5x+1}-8}{7}-1\frac{1}{4}\sqrt{5x+1}=\frac{5\sqrt{5x+1}-2}{3}-(15-2\sqrt{5x+1}).$

u) $\frac{2\sqrt{3x}+5}{3\sqrt{3x}-5}=\frac{5}{2}.$

v) $\frac{7+5\sqrt{2x}}{4(2\sqrt{2x}+1)}=\frac{7}{10}.$

w) $\frac{8}{3\sqrt{5x-4}}=\frac{11}{2\sqrt{5x}+3}.$

x) $\frac{19}{6-5\sqrt{4x}}=\frac{-37}{2+7\sqrt{4x}}.$

y) $\frac{34}{5\sqrt{2x-3}+9}=\frac{21}{4\sqrt{2x-3}+1}.$

z) $\frac{19}{4+5\sqrt{3x-2}}=\frac{23}{8\sqrt{3x-2}-1}.$

116. a) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)=x+1.$

b) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}.$

c) $(\sqrt{x}+8)^2+(\sqrt{x}+12)^2=2(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}+16).$

d) $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}-2)^2=2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)+1.$

e) $(5\sqrt{x}-3)(4+9\sqrt{x})=(3\sqrt{x}-1)(15\sqrt{x}-2).$

f) $(6\sqrt{x}-5)(7\sqrt{x}-9)=(3\sqrt{x}-1)(14\sqrt{x}-21).$

g) $(8\sqrt{x}-5)(9\sqrt{x}+2)=(18\sqrt{x}-7)(4\sqrt{x}+3)-99.$

h) $\frac{3\sqrt{x}-5}{7-4\sqrt{x}}=\frac{6\sqrt{x}-11}{15-8\sqrt{x}}.$

i) $\frac{5+7\sqrt{x}}{11-15\sqrt{x}}=\frac{10-14\sqrt{x}}{30\sqrt{x}-54}.$

k) $\frac{3\sqrt{x}+36}{5\sqrt{x}-9}=\frac{7\sqrt{x}-12}{4\sqrt{x}+3}.$

l) $\frac{\sqrt{x}-3}{7\sqrt{x}+11}=\frac{2\sqrt{x}-5}{14\sqrt{x}-3}.$

m) $\frac{6x-8\sqrt{x}+8}{4x+3\sqrt{x}+12}=\frac{2}{3}.$

n) $\frac{8x-3\sqrt{x}+4}{12x+5\sqrt{x}-13}=\frac{2}{3}.$

o) $\frac{7x-3\sqrt{x}-15}{9x+3\sqrt{x}-25}=\frac{3}{5}.$

p) $\frac{28+6\sqrt{x}-17x}{36-10\sqrt{x}-13x}=\frac{7}{9}.$

q) $\frac{5x-9\sqrt{x}+9}{4x-4\sqrt{x}-12}=\frac{9}{4}.$

r) $\frac{3x-10\sqrt{x}+7}{4x-15\sqrt{x}+23}=\frac{2}{3}.$

s) $(3\sqrt{x}+4):(4\sqrt{x}+9)=(6\sqrt{x}-5):(8\sqrt{x}-3).$

t) $(4\sqrt{x}-9):(10\sqrt{x}+3)=(3\sqrt{x}-9):(5\sqrt{x}+17).$

u) $(3\sqrt{x}+4):(6\sqrt{x}-2)=(\sqrt{x}+4):(2\sqrt{x}+3).$

117. a) $\sqrt{x^2+3x+10}-x=2.$

b) $\sqrt{9x^2-5x-1}+1=3x.$

c) $13 - \sqrt{4x^2 + 7x - 8} = 2x$.
d) $11 - \sqrt{36x^2 - 13x + 2} = 6x$.
e) $\sqrt{(x-5)(4x+4)} + 6 = 2x$.
f) $6x - \sqrt{(3x+4)(12x-23)} = 4$.
g) $20 + \sqrt{4x+5)(9x-41)} = 6x$.
h) $12x - \sqrt{6x-5)(24x+1)} = 7$.
i) $13 - \sqrt{(3x+7)(3x-5)} = 3x - 4$.
k) $4x - \sqrt{(2x+5)(8x-7)} + 7 = 6$.

118. a) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5} = 2$.
b) $\sqrt{x-3} - 1 = \sqrt{x-10}$.
c) $\sqrt{3x+10} = 7 - \sqrt{3x-11}$.
d) $\sqrt{5x+6} + 2 = \sqrt{5x+34}$.
e) $\sqrt{7x+1} = \sqrt{7x+18} - 1$.
f) $\sqrt{9x-11} + 3 = \sqrt{9x+28}$.
g) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4x+25} = 12$.
h) $\sqrt{13x-1} = \sqrt{13x+16} - 1$.
i) $\sqrt{19x-2} + 3 = \sqrt{19x+43}$.
k) $\sqrt{23x+8} - 2 = \sqrt{23x-28}$.
l) $\sqrt{11x-7} + \sqrt{11x+12} = 19$.
m) $\sqrt{17x+2} - 2 = \sqrt{17x-38}$.
n) $\sqrt{29x+6} + \sqrt{29x-9} = 15$.
o) $\sqrt{41x+21} - \sqrt{41x-42} = 3$.
p) $\sqrt{x-2ab} = 2a - \sqrt{x+2ab}$.
q) $\sqrt{x+3a^2} + \sqrt{x-2a^2} = 5a$.
r) $\sqrt{x+b^2} - \sqrt{x-(a^2-2b^2)} = a-b$.
s) $\sqrt{x+b^2} - \sqrt{x-2ab} = b$.
t) $\sqrt{x+a^2} - a = \sqrt{x-2ab}$.
u) $\sqrt{x+b(a+b)} - 2b = \sqrt{x-b(3a-b)}$.

119. a) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$.
b) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$.
c) $\sqrt{12x-11} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{3x-6}$
d) $\sqrt{9x-2} = \sqrt{25x-11} - \sqrt{4x-3}$.
e) $\sqrt{25x-1} - \sqrt{4x+1} = \sqrt{9x-2}$.
f) $\sqrt{16x+9} + \sqrt{x-1} = \sqrt{9x+16}$.
g) $\sqrt{18x+7} + \sqrt{2x=1} = 2\sqrt{8x+1}$.
h) $\sqrt{18x-41} + 2\sqrt{2x+6} = 5\sqrt{2x-1}$.
i) $4\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x-21} = 3\sqrt{2x+27}$.
k) $3\sqrt{3x+7} - \sqrt{3x-17} = 2\sqrt{12x-104}$.
l) $\sqrt{9x-5} - 2\sqrt{4x-15} - \sqrt{x-5} = 0$.
m) $10\sqrt{3x+19} - 3\sqrt{12x+25} - \sqrt{48x+745} = 0$.
n) $\sqrt{4x-3a} - \sqrt{x+6a} = \sqrt{x-3a}$.
o) $\sqrt{9x-2b} + \sqrt{4x+b} = \sqrt{25x-b}$.
p) $\sqrt{16x+ab} - \sqrt{9x-2ab} = \sqrt{x+ab}$.
q) $\sqrt{ax-ab} + \sqrt{ax+3ab+4b^2} = 2\sqrt{ax+b(a+b)}$.
r) $5\sqrt{a^3x-a^2} + \sqrt{4a^3x+5a^2} = 3a\sqrt{ax}$.

120. a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-18} - \sqrt{x-25}$.
b) $\sqrt{x-7} - \sqrt{x-10} = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}$.
c) $\sqrt{x+11} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}$.

d) $\sqrt{x+16}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x-5}-\sqrt{x-8}$.
e) $\sqrt{x+14}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$.
f) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=\sqrt{x+42}-\sqrt{x-7}$.
g) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}$.
h) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x-22}-\sqrt{x-23}$.
i) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-6}=\sqrt{x-15}-\sqrt{x-22}$.
k) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-15}$.
l) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-26}=\sqrt{x+7}-\sqrt{x-17}$.
m) $\sqrt{x-19}-\sqrt{x+21}=\sqrt{x+44}-\sqrt{x+96}$.
n) $\sqrt{x-0{,}05}-\sqrt{x-0{,}18}=\sqrt{x+0{,}27}-\sqrt{x+0{,}1}$.
o) $\sqrt{x+0{,}6}-\sqrt{x-0{,}3}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1{,}5}$.

b. Mit zwei Unbekannten.

121. a) $3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=45$, $7\sqrt{x}-4\sqrt{y}=11$.

b) $12\sqrt{x}-35\sqrt{y}=-34$, $8\sqrt{x}+21\sqrt{y}+66$.

c) $6\sqrt{x-5}-5\sqrt{y+4}=4$, $13\sqrt{x-5}+2\sqrt{y+4}=60$.

d) $11\sqrt{x+\frac{1}{4}}-8\sqrt{y-\frac{2}{5}}=3$, $5\sqrt{x+\frac{1}{4}}+3\sqrt{y-\frac{2}{5}}=8$.

e) $5\sqrt{2x+1}+3\sqrt{5y+11}=33$, $7\sqrt{2x+1}-2\sqrt{5y+11}=9$.

f) $10\sqrt{3x-5}+21\sqrt{7y+2}=103$, $15\sqrt{3x-5}-14\sqrt{7y+2}=18$.

g) $0{,}5\sqrt{1+0{,}7x}-0{,}3\sqrt{2+0{,}5y}=0{,}1$, $0{,}6\sqrt{1+0{,}7x}+0{,}5\sqrt{2+0{,}5y}=1{,}41$.

h) $0{,}4\sqrt{0{,}1+0{,}3x}+0{,}7\sqrt{0{,}5-0{,}2y}=0{,}7$, $0{,}3\sqrt{0{,}1+0{,}3x}-0{,}2\sqrt{0{,}5-0{,}2y}=0{,}09$.

i) $b\sqrt{x-a^2}+a\sqrt{y-b^2}=2ab$, $a\sqrt{x-a^2}-b\sqrt{y-b^2}=a^2-b^2$.

k) $a\sqrt{x-b^2}+b\sqrt{a^2-y}=a^2+b^2$, $3b\sqrt{x-b^2}-2a\sqrt{a^2-y}=ab$.

122. a) $5\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}=33$, $4\sqrt{2x}+5\sqrt{3y}=22\sqrt{6}$.

b) $3\sqrt{7x}-4\sqrt{3y}=18$, $5\sqrt{2x}+2\sqrt{10\frac{1}{2}y}=16\sqrt{14}$.

c) $3\sqrt{5x}+7\sqrt{2y}=20\sqrt{5}$, $7\sqrt{2x}-2\sqrt{5y}=4\sqrt{2}$.

d) $5\sqrt{3x}+6\sqrt{y}=7\sqrt{3}$, $4\sqrt{5x}-9\sqrt{1\frac{2}{3}y}=\sqrt{5}$.

123. a) $\sqrt{x+24}=\sqrt{y+18}$, $\sqrt{x+5}=\sqrt{35-y}$.

b) $7\sqrt{3x+4y-15}=5\sqrt{7x+3y}$, $3\sqrt{2x+3y+7}=3\sqrt{8x+7y}$.

c) $\sqrt{21-3x-2y}=\sqrt{12x-24y-10}$, $\sqrt{44x-66y}=\sqrt{80+8x-16y}$.

d) $3\sqrt{7x+2(2y+1)}=7\sqrt{3x-2y}$, $\sqrt{4x+5(y-2)}=\sqrt{5x-2y+6}$.

e) $2y+3=\sqrt{5x+4y^2-2}$, $\sqrt{9x^2-21y+1}=3x-1$.

f) $\sqrt{5x+16y^2-20}=4y-1$, $5x-2=\sqrt{25x^2-8y}$.

g) $2x+3y-1=\sqrt{4x^2+9y^2+12xy+3x-2y-25}$,
$3x-y+2=\sqrt{9x^2+y^2-6xy+5x+3y-3}$.

h) $x+2y-3=\sqrt{x^2+4y^2+4xy-7x-1}$,
$2x-3y+4=\sqrt{4x^2-12xy+9y^2+11y+13}$.

124. a) $\sqrt{x+y}=2+\sqrt{x-y}$, $2+y=2\sqrt{2x}$.

b) $\sqrt{3x-y}=2+\sqrt{x-y}$, $x-4=2\sqrt{6-2y}$.

c) $\sqrt{5x+3y+4}=1+\sqrt{5x+2y-3}$,
$y+2=\sqrt{7x-5}$.

d) $\sqrt{3x+2y}+2=\sqrt{7x+2y-4}$,
$x-3\frac{1}{2}=\sqrt{11\frac{1}{4}+3y}$.

e) $\sqrt{13+2\sqrt{6xy}}=\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$,
$\sqrt{4x^2-5y-1}=2x-1$.

f) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{13-2\sqrt{xy}}$,
$\sqrt{\frac{x}{2y+1}-1}=1-\sqrt{\frac{x}{2y+1}}$.

g) $\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{3x-2}{xy}}$,
$x-y=\sqrt{2x+7}$.

h) $\sqrt{x+\sqrt{y-1}}=\sqrt{x-1}+1$,
$\sqrt{y-\sqrt{x-1}}=\sqrt{y-1}+1$.

Nr. 29. Logarithmen.

a. Übungen zum Begriff des Logarithmus.

1. Bestimme den Wert des Logarithmus

a) $\overset{2}{\log}\,4$. b) $\overset{6}{\log}\,36$. c) $\overset{13}{\log}\,169$.

d) $\overset{0,5}{\log}\,0{,}25$. e) $\overset{3}{\log}\,27$. f) $\overset{5}{\log}\,125$.

g) $\overset{2}{\log}\,16$. h) $\overset{0,2}{\log}\,0{,}008$. i) $\overset{0,5}{\log}\,0{,}0625$.

2. Bestimme den Wert des Logarithmus

a) $\overset{a}{\log} a^n$. b) $\overset{a}{\log} \sqrt[n]{a}$. c) $\overset{a}{\log} \sqrt[q]{a^p}$.

d) $\overset{3}{\log} \sqrt[4]{27}$. e) $\overset{7}{\log} \sqrt[5]{343}$. f) $\overset{2}{\log} \sqrt[7]{1024}$.

3. a) Welche Zahl hat den Logarithmus 5 für die Grundzahl 3?

b) " " " " " -2 " " " 9?

c) " " " " " 4 " " " 0,6?

d) " " " " " 3 " " " $\frac{2}{3}$?

e) " " " " " -3 " " " $\frac{2}{7}$?

f) " " " " " $\frac{p}{q}$ " " " a?

4. a) Für welche Grundzahl hat 16 den Logarithmus 2?

b) " " " " 16 " " 4?

c) " " " " 1000 " " 3?

d) " " " " $\frac{81}{625}$ " " 4?

e) " " " " 0,729 " " 3?

f) " " " " $\sqrt[q]{a^p}$ " " $\frac{p}{q}$?

g) " " " " $\sqrt[3]{64}$ " " 2?

h) " " " " $\sqrt[5]{49}$ " " $\frac{2}{5}$?

i) " " " " $\frac{1}{16}$ " " -2?

k) " " " " 125 " " -3?

b. Anwendung der Hauptsätze über Logarithmen.

5. Entwickle den Ausdruck

a) $\log(ab)$. b) $\log(pqr)$. c) $\log(3x \cdot 4y)$.

d) $\log a\,(b+c)$. e) $\log(a^2+ab)$. f) $\log(a^2-b^2)$.

g) $\overset{3}{\log}(27 \cdot 81)$. h) $\overset{4}{\log}(64 \cdot 256)$. i) $\overset{2}{\log}(32 \cdot 128)$.

6. Entwickle den Ausdruck

a) $\log \frac{4}{7} \cdot$ b) $\log \frac{ab}{c} \cdot$ c) $\log \frac{pq}{rs} \cdot$

d) $\log \frac{x(a+x)}{cd} \cdot$ e) $\log \frac{(a+b)(c-d)}{x(y-z)} \cdot$ f) $\log \frac{x^2-y^2}{a^2-b^2} \cdot$

g) $\log \frac{a^2+ab}{ab-b^2} \cdot$ h) $\log \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c+d}{c-d}\right) \cdot$

7. Entwickle den Ausdruck

a) $\log (a \cdot b)^4$. b) $\log a^4 b$. c) $\log \frac{a^m}{b^n}$.

d) $\log \frac{a^m b^n}{c^r}$. e) $\log \frac{1}{x^8}$. f) $\log \frac{a^{-5}}{b^4}$.

g) $\log \frac{a^4 b^{-5}}{c^{-6}}$. h) $\log \frac{a^2 b^{x+5} c^4}{b^{2-x} c^{3-2x}}$. i) $\log \left(\frac{a b^5}{c d^2}\right)^4$.

k) $\log \left(\frac{x^{a-b}}{y^{a+b}}\right)^{a+b}$.

8. Entwickle den Ausdruck

a) $\log \sqrt[5]{a}$. b) $\log \sqrt[7]{a^3}$. c) $\log \sqrt[r]{a^p b^q}$.

d) $\log \sqrt[r]{\frac{a^p}{b^q}}$. e) $\log \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. f) $\log \sqrt[n]{a^m \sqrt[r]{a^s}}$.

g) $\log \sqrt[x]{\frac{\sqrt[y]{p}}{q}}$.

9. Von welchem Ausdruck lautet die Entwicklung

a) $\log a + \log b + \log c$? b) $\log a + \log b - \log c$?

c) $2 \log a + 3 \log b$? d) $2 \log a - 3 \log b$?

e) $2 \log 5 + 5 \log 2 - 7 \log 8 - \log 12$?

f) $3 \log (a + b) + 3 \log (a - b) - 4 \log (x - y)$?

g) $\frac{1}{2} \log a + \frac{2}{3} \log b - \frac{3}{4} \log c$?

h) $\frac{1}{n} (5 \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{2}{5} \log c)$?

c. Logarithmische Berechnung von Zahlenausdrücken.

10. Berechne

a) $\log 23 + \log 519 + \log 6{,}752 + \log 0{,}9448$.

b) $\log 0{,}932^3 + \log 4{,}624^4 + \log 411{,}85^3$.

c) $\log 9247{,}5 + \log 72{,}49 - \log 97{,}84^3$.

d) $\log 49{,}25^3 + \log \sqrt{82\,275} + \log 0{,}0428^4$.

e) $\log \sqrt[5]{219{,}5} - \log \sqrt[3]{844{,}7} - \log \sqrt{19} + \log 29{,}25^3$.

f) $\log \sqrt[3]{0{,}4146^3} + \log (\sqrt[5]{0.7625})^3 + \log \sqrt{819^3}$.

11. Berechne das Produkt

a) $46{,}29 \cdot 9{,}534$. b) $112{,}85 \cdot 0{,}90073$. c) $2155{,}6 \cdot 0{,}524$.

d) $0{,}96583 \cdot 0{,}52564 \cdot 12{,}384$. e) $21{,}75 \cdot 0{,}82536 \cdot 0{,}925$.

12. Berechne die Summe

a) $64{,}593 \cdot 17{,}85 + 217{,}95 \cdot 4{,}771.$

b) $123{,}54 \cdot 2{,}5863 + 0{,}4567 \cdot 765{,}43 + 315 \cdot 0{,}08294.$

c) $0{,}5477 \cdot 0{,}9668 + 1{,}754 \cdot 0{,}53225 + 37{,}725 \cdot 0{,}06278.$

d) $21900 \cdot 0{,}00493 + 66{,}54 \cdot 87{,}514 - 855{,}68 \cdot 12{,}345.$

13. Berechne den Quotienten

a) $\frac{485{,}27}{99{,}55}.$ b) $\frac{0{,}95283}{0{,}07225}.$ c) $\frac{1}{0{,}5846}.$

d) $\frac{4652 \cdot 45{,}62}{387{,}6}.$ e) $\frac{0{,}5279 \cdot 0{,}9125}{0{,}06648}.$

f) $\frac{35{,}354}{8{,}592 \cdot 9{,}6425}.$ g) $\frac{13{,}727 \cdot 54{,}68}{9{,}114 \cdot 92{,}452}.$ h) $\frac{325{,}8 \cdot 0{,}5275}{0{,}428 \cdot 0{,}093}.$

14. Berechne die Potenz

a) $3{,}579^3.$ b) $27{,}255^2.$ c) $0{,}94253^4.$

d) $(4{,}643 \cdot 7{,}258)^2.$ e) $(23{,}745 \cdot 0{,}1462)^3.$

f) $\left(\frac{24}{49}\right)^3.$ g) $\left(\frac{0{,}825 \cdot 29{,}4}{1{,}1425}\right)^4.$ h) $\left(\frac{36{,}255 \cdot 413{,}79}{5216{,}4}\right)^3.$

15. Berechne den Ausdruck

a) $\frac{2{,}257^3 \cdot 51{,}29^2}{8{,}115^4}.$ b) $\frac{86{,}274^3}{15{,}285^5 \cdot 0{,}8124^7}.$

c) $\frac{43{,}84 \cdot (2{,}515 \cdot 7{,}008)^3}{(0{,}72 \cdot 19{,}43)^2}.$ d) $\frac{\left(2\frac{4}{15}\right)^4 \cdot \left(3\frac{5}{7}\right)^2}{\left(5\frac{5}{9}\right)^3}.$

16. Berechne die Wurzel

a) $\sqrt[3]{3}.$ b) $\sqrt[5]{19}.$ c) $\sqrt[7]{12}.$

d) $\sqrt[4]{0{,}2539}.$ e) $\sqrt[6]{0{,}0273}.$ f) $\sqrt[11]{0{,}00091}.$

g) $\sqrt[5]{68{,}4^2 \cdot 2{,}97^3}.$ h) $\sqrt[3]{8{,}25^2 \cdot 9{,}37^4}.$ i) $\sqrt{29{,}45^4 \cdot 0{,}8256^7}.$

k) $\sqrt[18]{\frac{832{,}3}{115{,}5}}.$ l) $\sqrt[5]{\frac{19{,}5^2 \cdot 0{,}843^3}{0{,}5268^4}}.$ m) $\left(\sqrt{\frac{51{,}75^3 \cdot 0{,}24368^4}{7{,}749^3}}\right)^3.$

n) $\sqrt[7]{\frac{17{,}79\sqrt{139{,}25}}{\sqrt[3]{53{,}4}}}.$ o) $\sqrt{\frac{94{,}7 \cdot 22{,}93^2}{\sqrt[4]{925{,}5}}}.$ p) $\sqrt[5]{\left(\frac{6\sqrt{0{,}55}\sqrt[3]{19}}{0{,}7 \cdot 2{,}95^2}\right)^2}.$

17. Berechne den Ausdruck

a) $\sqrt[3]{3{,}25\sqrt{385}} \cdot \frac{419{,}72^4}{5249{,}3^3}.$ b) $\sqrt[5]{19\frac{11}{12}\sqrt[4]{25\frac{1}{3}}} \cdot \frac{8{,}2593^2}{\sqrt[3]{0{,}49245}}.$

c) $(92{,}78)^{\frac{5}{8}} \cdot (87{,}35)^{\frac{6}{7}}$ d) $0{,}9472^{\frac{9}{11}} \cdot 0{,}04658^{\frac{8}{9}}.$

e) $(62500)^{0{,}2} \cdot (0{,}534)^{1\frac{1}{3}}.$ f) $\cdot \left(\frac{0{,}7248^{2\frac{1}{3}} \cdot 2{,}539^{3\frac{1}{4}}}{229{,}25^{0{,}3}}\right)^5.$

18. Berechne den Ausdruck

a) $\sqrt{39{,}57^2 + 19{,}56^2}$. b) $\sqrt[4]{0{,}7753^3 + 0{,}0925^2}$. c) $\sqrt[5]{(19\frac{3}{11})^3 - (23\frac{5}{7})^2}$.

d) $\frac{8{,}534^3 - 4{,}106^4}{2{,}568^6}$. e) $\frac{\sqrt[3]{419} + \sqrt[4]{2125}}{\sqrt[5]{86{,}24}}$. f) $\sqrt[7]{4\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{1{,}5}}$.

g) $\sqrt[5]{\frac{4\sqrt{0{,}03} + \sqrt[3]{0{,}15}}{0{,}12}}$. h) $\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{66} + 7\sqrt{27}}{3\sqrt{219} - 18\sqrt{0{,}273}}}$.

d. Exponentialgleichungen.

α. Ohne Benutzung der Logarithmentafel.

19. a) $3^x = 3^5$. b) $a^x = a^4$. c) $a^{x+5} = a^7$.

d) $a^{2x+3} = a^9$. e) $a^{3x-5} = a^{10}$. f) $r^{4x-7} = r^5$.

20. a) $5^{2x+5} = 5^{3x+2}$. b) $a^{8x-1} = a^{3x+14}$. c) $p^{9-2x} = p^{2x+1}$.

d) $a^{\frac{4}{3}x+3} = a^{2x-3}$ e) $13^{\frac{2}{3}x-1} = 13^{\frac{3}{4}x-2}$. f) $r^{1\frac{3}{10}x+4} = r^{1\frac{5}{12}x-3}$.

g) $a^{0{,}65x+1{,}72} = a^{3{,}27+0{,}4x}$. h) $r^{19-3{,}75x} = r^{5{,}5x-92}$.

21. a) $(a^{x+3})^{x-3} = (a^{x+4})^{x+2}$. b) $(p^{3x-5})^{4x+3} = (p^{6x-7})^{2x+5}$.

22. a) $q^{25+6x} \cdot q^{13-8x} = q^{36-4x}$. b) $a^{17x+18} \cdot a^{5x-23} = a^{29x-13} \cdot a^{127-14x}$.

c) $(3^{67-18x})^2 \cdot (3^{11x-9})^3 = (5^{x+7})^4 \cdot 3^{86-24x}$.

d) $(a^{3x-5})^{8x-2} \cdot (a^{5x+3})^{2x-1} = (a^{6x-5})^{3x+2} \cdot (a^{4x-7})^{4x-3}$.

23. a) $3^x = 81$. b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{8}{27}$. c) $4^{2x-5} = 64$.

d) $10^{5x-2} = 100\,000$. e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1} = \frac{27}{343}$. f) $0{,}4^{2x+3} = 0{,}064$.

g) $(-1)^x = 16$. h) $(-3)^x = -27$. i) $(-27)^x = 81$.

k) $2^{-x} = \frac{1}{8}$. l) $8^{-x} = \frac{1}{2}$. m) $(-8)^{-x} = -32$.

24. a) $2^{3x-4} \cdot 4^{2x-3} = 8^{x+2}$.

b) $27^{5x-6} \cdot 81^{2x+3} = 9^{4x-2} \cdot 3^{7x-2}$.

c) $\frac{64^{3x-1} \cdot 128^{2x+1}}{16^{4x-2} \cdot 256^{x-4}} = \frac{4^{7x-2} \cdot 8^{5x+3}}{512^{x+7}}$.

25. a) $\sqrt[3]{a^{5x+3}} = a^{12}$. b) $\sqrt[4]{a^{7x-5}} = \sqrt{a^{3x+4}}$.

c) $\sqrt[6]{a^{2x-3}} = \sqrt[4]{a^{3x+1}}$. d) $a^{x-1}\sqrt[3]{a^{2x+3}} = a^{x+1}\sqrt[6]{a^{3x+5}}$.

e) $\sqrt[3]{8^{7x-3}} = 2\sqrt{32^{7-2x}}$. f) $3 \cdot (9^{2x-3})^2 = \sqrt{27 \cdot 31^{x+5}}$.

26.*) a) $(a^{x+4})^{x-3} \cdot a^{6x} = (a^{2x-1})^{3x-4}$.

b) $(a^{5x+9})^{7x-3} \cdot (a^{4x-7})^{8x-5} = (a^{9x+8})^{5x+2}$.

---

*) Der Stern (*) bezeichnet die Gleichung als eine quadratische.

c) $(a^{7x-6})^{3x-5} \cdot (a^{7x-5})^{3x-3} = a^2 \cdot (a^{5x+9})^{5x-1}$.

d) $a^{(2x+1)^2} \cdot a^{(3x+1)^2} = a^{(2x+3)^2} \cdot (a^{2x+5})^{x-1}$.

27*.) a) $\sqrt[x-2]{a^{2x+1}} + \left(\sqrt[5x+2]{a^{7x-12}}\right)^3$.

b) $\sqrt[3x-11]{a^{5x-13}} = \sqrt[7]{a^{11}} \cdot \sqrt[4x+1]{a^{7x-5}}$.

c) $\sqrt[2x+7]{a^{3x+4}} \cdot \sqrt[7x-6]{a^{5x-3}} = \sqrt[5]{a^9}$

d) $\sqrt[3x-5]{a^{5x+1}} = \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4x-7]{a^{4x-1}}$.

e) $\sqrt[4x-3]{a^{5x-2}} = \sqrt[24]{a^{11}} \cdot \sqrt[5x+2]{a^{3x+10}}$.

f) $\sqrt[x+5]{2^7} = \sqrt[x+1]{8} \cdot \sqrt[x-6]{16^2}$.

g) $\sqrt[x-2]{3^3} \cdot \sqrt[x-3]{9^2} = \sqrt[7-x]{27^2}$.

h) $\sqrt[3x-4]{8^2} = \sqrt[4x-3]{32} \cdot \sqrt[2x+5]{64^3}$.

28. a) $3 \log x = 2 \log 8$. b) $2 \log x = 3 \log 9$.

c) $2 \log x^3 = 3 \log 4$. d) $\frac{1}{3} \log x^6 = \frac{1}{2} \log 81$.

29. a) $\log 16x - \log 8x^2 = 2 \log 4x^2 - \log 8x$.

b) $3 \log 4x^3 - 5 \log 8x^2 = 2 \log 16x^4 - 7 \log 2x^5 + 13 \log 2$.

c) $\log \frac{9}{4} x^2 + \log \frac{3}{8} x = \log \frac{4}{3} x^3 - \log \frac{8}{9} x^2$.

β. Mit Benutzung der Logarithmentafel.

30. a) $19^x = 65$. b) $17^{x-1} = 59$.

c) $35{,}674^{x+3} = 98\,400$. d) $2^{3x-5} = 228$.

e) $\sqrt[x]{\frac{21}{23}} = \frac{5}{13}$. f) $\sqrt[3x]{54783} = \sqrt{\frac{252}{115}}$.

31. a) $0{,}9847^{2x-1} \cdot 35{,}79^{3x-4} = 3{,}27^{x+4}$.

b) $3{,}456^{3x-2} \cdot 0{,}684^{x+5} = 282{,}14$.

c) $0{,}567^{x+3} \cdot 4{,}893^{3x-7} = 3509{,}7^{x-4}$.

d) $\frac{0{,}52514^{7x+1} \cdot 4{,}86}{0{,}74^4} = \frac{0{,}5}{6^{3x-2}}$.

e) $\frac{5{,}1798^{2x-5} \cdot 5{,}4521}{2{,}4567} = \frac{17{,}846^{3x-10}}{1{,}0326}$.

f) $\frac{7^{2x+3}}{21149} = \frac{57^{x-3} \cdot 1{,}4493^{4x-3}}{2}$.

g) $\frac{2^{5x-12} \cdot 6{,}611^x}{4591{,}7^{3x-8}} = \frac{1{,}0909^{2x-1} \cdot \sqrt[4]{6}}{19{,}212}$.

h) $\frac{18{,}41^{2x-9} \cdot 3{,}71^{x-5}}{\sqrt[3]{17}} = \frac{150^{x-6} \cdot \sqrt{0{,}57}}{2{,}34^{x-7}}$.

e. Einfache Anwendungen.

32. a) Welchen Inhalt hat ein Rechteck mit den Seiten $a = 13{,}45$ cm und $b = 9{,}27$ cm?

b) Welchen Inhalt hat ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 23{,}75$ m?

c) Welchen Inhalt hat ein Dreieck mit den Seiten $a = 49{,}25$ cm, $b = 44{,}73$ cm und $c = 62{,}28$ cm?

33. a) Welchen Inhalt hat ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $a = 44{,}29$ cm und dem Schenkel $b = 38{,}26$ cm?

b) Wie groß ist der Inhalt eines Rechtecks, in welchem eine Seite die Länge $a = 419{,}5$ m und die Diagonale die Länge $e = 528{,}8$ m besitzt?

c) Die kleinere Diagonale eines Rhombus mit der Seite $a = 212{,}25$ m habe die Länge $e = 110{,}50$ m. Wie groß ist der Inhalt des Rhombus?

34. Wie weit ist in einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 29{,}48$ m eine Sehne mit der Länge $l = 42{,}75$ m vom Mittelpunkte entfernt?

35. a) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Kathete $a = 45{,}4$ m und die Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse sei $p = 25{,}6$ m. Wie groß ist die Hypotenuse?

b) Wie groß ist in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenusenhöhe, wenn sie die Hypotenuse in die Abschnitte $p = 8{,}45$ cm und $q = 23{,}75$ cm zerlegt?

c) Wie groß sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse durch die zu ihr gehörige Höhe in die Abschnitte $p = 512{,}25$ cm und $q = 286{,}45$ cm zerlegt ist?

36. a) Wie groß sind die Höhen eines Dreiecks mit den Seiten $a = 22{,}54$, $b = 24{,}25$ und $c = 25{,}43$ cm?

b) Welchen Inhalt hat ein Trapez mit den Grundlinien $a = 14{,}75$ cm und $c = 7{,}25$ cm, wenn seine Schenkel die Länge $b = 8{,}25$ cm, bez. $d = 9{,}75$ cm besitzen?

37. Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten

a) $a = 34{,}75$ cm und $b = 46{,}35$ cm.
b) $a = 219{,}8$ m „ $b = 177{,}2$ m.
c) $a = 541{,}75$ m „ $b = 312{,}25$ m.

Wie groß ist seine Hypotenuse?

d) In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck haben die Katheten die Länge $a = 52{,}38$ m. Wie groß ist seine Hypotenuse?

e) In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck habe die Hypotenuse die Länge $c = 275{,}3$ m. Wie groß ist jede seiner Katheten?

f) Ein Quadrat habe die Seite $a = 33{,}25$ m. Wie groß ist seine Diagonale?

g) Ein Quadrat habe die Diagonale $d = 135{,}75$ m. Wie groß ist seine Seite?

h) Ein Quadrat habe den Inhalt $J = 2135{,}8$ qm. Wie groß ist seine Diagonale?

38. a) Wie groß sind die Mittellinien*) eines Dreiecks mit den Seiten $a = 43{,}4$ m, $b = 27{,}9$ m und $c = 51{,}7$ m?

b) 2tes Beispiel: $a = 13{,}75$ cm, $b = 19{,}25$ cm und $c = 11{,}15$ cm.

c) Ein Dreieck habe die Seiten $b = 37{,}5$ cm und $c = 29{,}4$ cm und die zu der Seite a gehörige Mittellinie $m = 27{,}3$ cm. Wie groß ist die Seite a?

39. Wie groß sind in einem Dreieck mit den Seiten

a) $a = 74$ cm, $b = 91$ cm und $c = 83$ cm
b) $a = 21{,}5$ cm, $b = 16{,}4$ cm „ $c = 25{,}3$ cm
c) $a = 8{,}275$ m, $b = 9{,}45$ m „ $c = 6{,}825$ m

die Winkelhalbierungslinien?**)

40. a) Wie groß sind bei einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 275{,}5$ cm die Halbmesser des um- und eingeschriebenen Kreises?

b) Wie groß sind diese Halbmesser, wenn das gleichseitige Dreieck den Inhalt $J = 450$ qcm hat?

c) Ein gleichseitiges Dreieck sei einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 59{,}25$ cm eingeschrieben. Wie groß ist seine Seite?

d) Ein gleichseitiges Dreieck sei einem Kreise mit dem Halbmesser $\varrho = 4{,}25$ cm eingeschrieben. Wie groß ist sein Inhalt?

e) Einem Kreise, der einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 47{,}75$ cm umgeschrieben ist, sei ein gleichseitiges Dreieck umgeschrieben. Wie groß ist dessen Inhalt?

f) Einem Kreise, der einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 25{,}4$ m eingeschrieben ist, sei ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben. Wie groß ist dessen Seite?

g) Wie groß sind bei einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 85{,}25$ cm die Halbmesser der äußeren Berührungskreise?

h) Wie groß sind bei einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe $h = 47{,}48$ cm die Halbmesser der äußeren Berührungskreise?

i) Wie groß ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen äußere Berührungskreise den Halbmesser $\varrho_a = 17{,}45$ cm besitzen?

---

*) Es ist $2(b^2 + c^2) = (2m_a)^2 + a^2$.

**) Es ist $w_a^2 = \dfrac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

k) Wie groß ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises bei einem gleichseitigen Dreieck, dessen äußere Berührungskreise den Halbmesser $\varrho_a = 61{,}25$ cm besitzen?

l) Wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises bei einem gleichseitigen Dreieck, dessen äußere Berührungskreise den Halbmesser $\varrho_a = 112{,}6$ cm besitzen?

41. a) Eine Tangente an einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 18{,}25$ cm hat die Länge $t = 13{,}75$ cm. Wie weit ist ihr Ausgangspunkt von dem Kreise entfernt?

b) Ein Durchmesser eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 23{,}45$ sei äußerlich in dem Verhältnis $p : q = 4 : 3$ geteilt, und von dem Teilpunkte aus sei eine Tangente an den Kreis gezogen. Welche Länge besitzt diese Tangente?

c) Wie weit kann das Auge auf offener See sehen, wenn es sich 10 m über dem Meeresspiegel befindet? (Halbmesser der Erdkugel $r = 6370$ km!)

d) In welcher Entfernung wird für dasselbe Auge ein Schiffsmast von 15 m Höhe sichtbar?

e) Wie weit kann man vom Brocken (1142 m) aus sehen? Wie weit von der Schneekoppe aus (1603 m)? Wie weit von der Zugspitze aus (2968 m)?

f) Wie weit kann man von einem Luftballon aus sehen, wenn er 3 km hoch gestiegen ist?

g) Wie hoch ist ein Berg, den man im flachen Lande 100 km weit sieht?

42. a) Welches Gewicht hat ein Klumpen Gold, der 32,25 ccm Raum einnimmt, wenn das spezifische Gewicht des Goldes gleich 19,3 ist?

b) Welchen Raum nehmen 23,875 kg eines Metalls ein, dessen spez. Gewicht gleich 8,8814 ist?

c) Ein Körper wiegt in der Luft 487,5 g und im Wasser von 4° C 403,7 g. Wie groß ist sein spez. Gewicht?

d) Ein Körper wiegt im Wasser von 4° C 86,73 g und in einer zweiten Flüssigkeit 89,25 g. Wie groß ist das spez. Gewicht derselben?

43. a) Wie groß ist die Schwingungsdauer eines (mathematischen) Pendels von der Länge $l = 125{,}5$ cm? ($t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ und $g = 9{,}801$ m!).

b) Welche Länge hat der Sekundenpendel an einem Orte, an dem die Beschleunigung der Schwere die Größe $g = 9{,}795$ m besitzt?

c) Eine Uhr, deren Pendel die (reduzierte) Länge $l = 98{,}25$ cm besitzt, geht täglich 20 Minuten vor. Um wie viel cm muß die Pendelscheibe verschoben werden?

d) Bei einer Uhr, die richtig geht, wenn ihr Pendel die reduzierte

Länge $l = 112{,}5$ cm besitzt, hat sich die Scheibe um 5 cm gesenkt. Wie viel geht die Uhr jetzt täglich nach?

44. a) In welcher Entfernung von der Erdoberfläche beträgt die Beschleunigung der Schwere nur noch 6,775 m?

b) In welcher Entfernung von der Erdoberfläche ist die Beschleunigung der Schwere um die Hälfte vermindert?

c) Wie groß ist die (mittlere) Anziehung des Mondes durch die Erde, wenn die Umlaufszeit des Mondes 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten 11,5 Sekunden und die mittlere Entfernung der beiden Himmelskörper 388 500 km beträgt?

f. Verwendung der Logarithmen bei der Berechnung der regelmäßigen Vielecke.*)

Sind a_n und b_n die Seiten regelmäßiger n-Ecke, die einem Kreise mit dem Halbmesser r ein-, bez. umgeschrieben werden können, und ist ϱ_n der Abstand der Seite a_n vom Mittelpunkte des Kreises, so hat man

I. $\varrho_n = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}a_n)^2}$. II. $b_n = a_n \cdot \frac{r}{\varrho_n}$. III. $a_{2n} = \sqrt{2r\,(r - \varrho_n)}$.

Sind ferner a_n', b_n' u. s. w. die Längen dieser Strecken für $r = 1$, so ist $a_n = r \cdot a_n'$, $b_n = r \cdot b_n'$ u. s. w.

Aufgaben über das regelmäßige 3-Eck und 4-Eck sind in dem vorhergehenden Abschnitt enthalten.

45. a) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der einem regelmäßigen **6-Eck** mit der Seite $a = 23{,}25$ cm eingeschrieben werden kann?

b) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 6-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 866{,}03$ m umgeschrieben werden kann?

c) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 6-Eck mit der Seite $a = 87{,}52$ cm?

d) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 6-Ecks mit dem Inhalt $J = 4975$ qcm?

e) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 6-Eck, das einem Kreise mit dem Halbmesser $\varrho = 48{,}45$ cm umgeschrieben werden kann?

f) Wie groß ist bei einem regelmäßigen 6-Eck mit dem Inhalt $J = 325{,}26$ qcm der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

46. a) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen **8-Ecks**, das einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 1$ eingeschrieben werden kann?

b) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 8-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 1$ umgeschrieben werden kann?

c) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 8-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser

*) Die Auflösungen werden durch die Verwendung der Winkelfunktionen einfacher.

1. $r = 417{,}5$ m eingeschrieben werden kann?
2. $r = 125{,}4$ cm umgeschrieben „ „ ?

d) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dem ein regelmäßiges 8-Eck mit der Seite

1. $a = 138{,}32$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $a = 159{,}77$ cm umgeschrieben „ „ ?

e) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 8-Eck mit der Seite $a = 8{,}775$ m?

f) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 8-Eck, das einem Kreise mit dem Halbmesser

1. $r = 17{,}64$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $r = 36{,}18$ cm umgeschrieben „ „ ?

g) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dem ein regelmäßiges 8-Eck mit dem Inhalt

1. $J = 695{,}63$ qcm eingeschrieben werden kann?
2. $J = 97{,}79$ qcm umgeschrieben „ „ ?

h) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 16-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser

1. $r = 250$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $r = 32$ m umgeschrieben „ „ ?

47. a) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen **12-Ecks**, das einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 1$ eingeschrieben werden kann?

b) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 12-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 1$ umgeschrieben werden kann?

c) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen 12-Ecks, das einem Kreise mit dem Halbmesser

1. $r = 547$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $r = 180$ cm umgeschrieben „ „ ?

d) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dem ein regelmäßiges 12-Eck mit der Seite

1. $a = 113{,}26$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $a = 361{,}73$ cm umgeschrieben „ „ ?

e) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 12-Eck mit der Seite $a = 72{,}35$ cm?

f) Welchen Inhalt hat ein regelmäßiges 12-Eck, das einem Kreise mit dem Halbmesser

1. $r = 72{,}35$ cm eingeschrieben werden kann?
2. $r = 6{,}848$ m umgeschrieben „ „ ?

g) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dem ein regelmäßiges 12-Eck mit dem Inhalt

1. $J = 628{,}12$ qcm eingeschrieben werden kann?
2. $J = 3769{,}5$ qcm umgeschrieben „ „ ?

h) Wie groß ist die Seite eines regelmäßigen **24-Ecks**, das einem Kreise mit dem Halbmesser

1. $r = 15$ m eingeschrieben werden kann?
2. $r = 25$ m umgeschrieben „ „ ?

g. Berechnungen beim Kreise.

48. Wie groß ist bei einem Kreise mit dem

a) Halbmesser $r = 17{,}25$ m der Umfang (die Peripherie)?
b) „ $r = 43{,}26$ cm „ „ „ „ ?
c) Umfang $u = 619$ m der Halbmesser?
d) „ $u = 825{,}4$ cm „ „ ?

49. Wie groß ist bei einem Kreise mit dem

a) Halbmesser $r = 9{,}245$ m der Inhalt?
b) „ $r = 22{,}25$ cm „ „ ?
c) Inhalt $J = 8130$ qcm der Halbmesser?
d) „ $J = 462{,}5$ qcm „ „ ?

50. Wie groß ist bei einem Kreise mit dem

a) Umfang $u = 87{,}25$ cm der Inhalt?
b) „ $u = 517{,}7$ cm „ „ ?
c) Inhalt $J = 784{,}9$ qcm der Umfang?
d) „ $J = 6{,}539$ qcm „ „ ?

51. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Inhalt gleich dem Inhalt eines regelmäßigen

a) 3-Ecks mit der Seite $a = 19{,}45$ cm ist?
b) 6-Ecks „ „ „ $a = 13{,}75$ cm „ ?
c) 8-Ecks „ „ „ $a = 62{,}15$ cm „ ?
d) 12-Ecks „ „ „ $a = 8{,}35$ cm „ ?

52. Ein Kreis mit dem Halbmesser

a) $r = 27{,}5$ m habe gleichen Inhalt mit einem regelmäßigen 3-Eck;
b) $r = 36{,}25$ cm „ „ „ „ „ „ 6-Eck;
c) $r = 108{,}4$ m „ „ „ „ „ „ 8-Eck;
d) $r = 56{,}35$ cm „ „ „ „ „ „ 12-Eck.

Wie groß ist dessen Seite?

53. Wie groß ist der Bogen eines Kreises mit dem Halbmesser

a) $r = 8{,}135$ m, der zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 54^\circ 17{,}5'$ gehört?
b) $r = 62{,}45$ cm, „ „ „ „ $\alpha = 137^\circ 42{,}6'$ „ ?
c) $r = 32{,}75$ cm, „ „ „ „ $\varphi = 17^\circ 48{,}2'$ „ ?
d) $r = 71{,}93$ m, „ „ „ „ $\varphi = 92^\circ 12{,}7'$ „ ?

54. Wie groß ist in einem Kreise mit dem Halbmesser

a) $r = 6{,}25$ m der zu dem Bogen $b = 13{,}58$ m gehörige Mittelpunktswinkel?
b) $r = 18{,}75$ m „ „ „ „ $b = 20$ m „ „ ?
c) $r = 31{,}45$ cm „ „ „ „ $b = 18{,}24$ cm „ Umfangswinkel?
d) $r = 82{,}35$ cm „ „ „ „ $b = 96{,}76$ cm „ „ ?

55. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, in welchem zu dem Bogen

a) $b = 219{,}5$ cm der Mittelpunktswinkel $\alpha = 117^\circ 24'$ gehört?
b) $b = 93{,}74$ cm „ „ $\alpha = 43^\circ 27'$ „ ?
c) $b = 325{,}8$ m „ Umfangswinkel $\varphi = 62^\circ 19{,}5'$ „ ?
d) $b = 716{,}7$ m „ „ $\varphi = 97^\circ 23{,}5'$ „ ?

56. Der Inhalt eines Kreisrings, den zwei um denselben Mittelpunkt beschriebene Kreise mit den Halbmessern r_1 und r_2 ($r_1 > r_2$) begrenzen, sei mit F bezeichnet. Welche Größe hat

a) F, wenn $r_1 = 23{,}4$ cm und $r_2 = 19{,}7$ cm ist?
b) F, „ $r_1 = 64{,}9$ cm „ $r_2 = 41{,}6$ cm „ ?
c) r_1, „ $r_2 = 17{,}25$ cm „ $F = 240$ qcm „ ?
d) r_2, „ $r_1 = 39{,}75$ cm „ $F = 2250$ qcm „ ?

57. Der Inhalt eines Kreisausschnitts (Sektors), der in einem Kreise zu dem Mittelpunktswinkel α gehört, sei mit A_α bezeichnet. Welche Größe hat

a) A_α, wenn $r = 8{,}5$ m und $\alpha = 79^\circ 12'$ ist?
b) A_α, „ $r = 12{,}45$ m „ $\alpha = 95^\circ 27'$ „ ?
c) α, „ $r = 67{,}48$ m „ $A_\alpha = 2557$ qm „ ?
d) α, „ $r = 29{,}75$ m „ $A_\alpha = 695{,}8$ qm „ ?
e) r, „ $\alpha = 115^\circ$ „ $A_\alpha = 2110$ qcm „ ?
f) r, „ $\alpha = 159^\circ 25'$ „ $A_\alpha = 426{,}7$ qm „ ?

58. Wie groß ist der Kreisabschnitt, der in einem Kreise mit dem Halbmesser

a) $r = 125{,}4$ cm zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 90^\circ$ gehört?
b) $r = 17{,}64$ cm „ „ „ $\alpha = 45^\circ$ „ ?
c) $r = 23{,}75$ cm „ „ „ $\alpha = 60^\circ$ „ ?
d) $r = 361{,}75$ cm „ „ „ $\alpha = 30^\circ$ „ ?
e) $r = 27{,}25$ m „ „ „ $\alpha = 120^\circ$ „ ?

Sechstes Kapitel.

Quadratische Gleichungen.

Nr. 30. Rein-quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. a) $x^2 = 49$. b) $x^2 = 144$. c) $x^2 = 225$.
d) $x^2 = a^2$. e) $x^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$. f) $x^2 = p^2 - 4pq + 4q^2$.
g) $x^2 = \frac{16}{81}$. h) $x^2 = \frac{189}{441}$. i) $x^2 = \frac{361}{625}$.
k) $x^2 = 7{,}84$. l) $x^2 = 47{,}61$. m) $x^2 = 0{,}2916$.
n) $x^2 = \frac{4a^2 + 4a + 1}{a^2 - 4a + 4}$. o) $x^2 = \frac{9p^2 - 24pq + 16q^2}{16r^2 + 40rs + 25s^2}$.

2. a) $5x^2 = 125$. b) $7x^2 = 448$. c) $11x^2 = 1859$.
d) $0{,}3x^2 = 6{,}075$. e) $0{,}09x^2 = 0{,}6084$. f) $0{,}12x^2 = 0{,}75$.
g) $\frac{7}{8}x^2 = 224$. h) $\frac{5}{9}x^2 = 3380$. i) $\frac{7}{11}x^2 = 308$.
k) $\frac{a}{b}x^2 = a^3b + 2a^2b + ab$. l) $\frac{a+b}{a-b}x^2 = a^2 - b^2$.
m) $\frac{a^2 - ab + b^2}{2ab}x^2 = \frac{a^3 + b^3}{a+b} \cdot 2ab$. n) $\frac{4a^2b^2 - 4a^2b^3}{a+b}x^2 = a^2 - b^2$.

3. a) $3x^2 - 7 = 101$. b) $5x^2 + 9 = 134$. c) $4x^2 - 11 = 89$.
d) $67 - 6x^2 = 43$. e) $79 - 7x^2 = 16$. f) $659 - 9x^2 = 83$.
g) $8x^2 - 0{,}75 = 0{,}53$. h) $4{,}3 - 6x^2 = 2{,}8$. i) $1{,}845 - 0{,}5x^2 = 1{,}6$
k) $\frac{5}{6}x^2 + 1\frac{1}{2} = 22\frac{1}{3}$. l) $7\frac{1}{4} - \frac{3}{5}x^2 = 3\frac{1}{2}$. m) $2\frac{1}{4} - \frac{2}{9}x^2 = 2\frac{1}{8}$.
n) $\frac{a-b}{2ab}x^2 + \frac{2ab}{a+b} = \frac{4a^2b}{a^2 - b^2}$. o) $\frac{5ab}{2a+5b} - \frac{2a+3b}{3ab}x^2 = \frac{4a^2b}{4a^2+16ab+15b^2}$.

4. a) $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$.
b) $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$.
c) $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) = 102$.
d) $(2x - 5)(3x - 4) - (3x + 4)(5x - 11) + 80 + 10x = 0$.
e) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 3x^2 - 7$.
f) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$.
g) $(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - (4x - 9)(4x + 9) = 2(64 - 29x)$.
h) $(a + x)(a + 2x) - (a - x)(a - 2x) = (a + 3x)^2 - a^2 - 9b^2$.
i) $x + a)(x - b) + (x + b)(x - a) = 2a^2 + 2ab + 2b^2$.
k) $(ax + b)^2 - (a - bx)^2 = 4abx + a(x^2 - 1)$.
l) $(x + 3b)(2a - x) + (x - 2b)(4a - x) = (6a - b)x - 8a^2 + 22ab - 18b^2$

5. a) $(x + 2)(x - 3)(x - 1) = x(x + 1)(x - 5) + 78$.
b) $x(x - 5)(x + 17) = (x + 5)(x + 7)(x - 10) + 840$.
c) $(x - 4)(x - 7)(x + 2) = x(x - 2)(x - 3) - 728$.
d) $(2x - 5)(3x - 7)(6x + 2) = (2x + 3)(2x - 3)(9x - 17) + 233x - 177$.

e) $(x+5)(2x+5)(3x-2) = (x-14)(x+3)(6x-27)+2166$.

f) $(2x+3)(3x+4)(4x+5) = (2x-3)(3x-4)(4x-5)+904$.

6. a) $x - \frac{49}{x} = 0$. b) $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$. c) $\frac{8x}{27} = \frac{3}{2x}$.

d) $x^2 - \frac{256}{x^2} = 0$. e) $\frac{8}{x^2} = \frac{x^2}{2}$. f) $\frac{8x^2}{27} = \frac{3}{2x^2}$.

g) $\frac{a^3x}{b} - \frac{b}{ax} = 0$. h) $\frac{ax}{b^2} = \frac{b^2}{a^3x}$. i) $\frac{a^5}{b^3x^2} = \frac{bx^2}{a^3}$.

7. a) $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{12}{x}$. b) $\frac{24}{x} + \frac{2x}{3} = \frac{7x}{3} - \frac{36}{x}$.

c) $\frac{4}{x} + \frac{3x}{4} = \frac{6}{x} + \frac{x}{4}$. d) $\frac{2x}{5} - \frac{5}{x} = \frac{2x}{3} - \frac{35}{3x}$.

e) $\frac{5x}{6} + \frac{12}{x} = \frac{5x}{4} - \frac{3}{x}$. f) $\frac{7x}{9} - \frac{9}{x} = \frac{6x}{5} - \frac{216}{5x}$.

g) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{ab^2} + \frac{ab^2}{x}$. h) $\frac{a^3}{x} - ax = \frac{b^4}{ax} - \frac{b^3x}{a}$.

i) $\frac{x}{2a} + \frac{2a}{x} = \frac{x}{18ab^2} + \frac{18ab^2}{x}$. k) $\frac{a^3}{x} - ax = \frac{(a^2-b^2)^2}{ax} - \frac{(b^2-a^2)x}{a}$.

8. a) $\frac{4x^2+9}{5} - \frac{5x^2-9}{6} = 3$. b) $\frac{3x^2-11}{8} + \frac{74-2x^2}{12} = 10$.

c) $\frac{8x^2-3}{5} - \frac{9x^2-5}{4} = 2$. d) $\frac{13x^2-4}{12} - \frac{20-3x^2}{18} = 3\frac{5}{9}$.

e) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$. f) $\frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = 5\frac{5}{9}$.

g) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$. h) $\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}$.

i) $\frac{4x+5}{7x-1} = \frac{x+2}{5x-3}$. k) $\frac{3x+8}{5x-2} - \frac{x+1}{3x-7} = 0$.

l) $\frac{4x-1}{3x+4} - \frac{3x+8}{7x+24} = \frac{5x+11}{7x-24}$. m) $\frac{4x+5}{7x-1} - \frac{x-2}{2x+9} = 1$.

n) $3 - \frac{5x+16}{4x+5} = 2 - \frac{7-3x}{x+2}$. o) $2 - \frac{5x-6}{4x-1} = 1 - \frac{x-5}{8x+19}$.

p) $2 - \frac{3(2x-5)}{5x-6} = 3 - \frac{2(4x-9)}{5x-3}$. q) $1 + \frac{x+1}{2x-5} = 2 - \frac{x-1}{3x-5}$.

r) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-4} = \frac{6}{x-5}$. s) $\frac{7}{x-4} - \frac{4}{x-6} = \frac{2}{x+2}$.

t) $\frac{x+1}{2x+3} + \frac{3x-5}{4x+1} = \frac{5}{7} \cdot \frac{14x-13}{8x+3}$. u) $\frac{2x-5}{3x+2} + \frac{3x-2}{x-5} = \frac{5(13-3x)}{3x^2-13x-10}$.

v) $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = 2\frac{2}{3}$. w) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}$.

x) $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{[x-(a+b)]^2}{x^2-(a+b)x+ab}$.

y) $\frac{x+a}{x-b} + \frac{x-b}{x+a} = \frac{a(2x+3a)-b(2x+b)}{x^2+(a-b)x-ab}$.

9.*) a) $\sqrt{23x^2 - 70x + 81} = 5x - 7.$

b) $3 - \sqrt{7x^2 - 24x + 45} = 4x.$

c) $13 - \sqrt{15x^2 - 72x + 49} = 2x - 5.$

d) $5 + \sqrt{19x^2 + 32x + 13} = 4x + 9.$

e) $\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{\frac{x-4}{9}}.$ f) $\sqrt{\frac{x+2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{x-2}}.$

g) $\frac{1}{\sqrt{2x-3}} = \sqrt{\frac{2x+3}{7}}.$ h) $\sqrt{\frac{5x-6}{96}} = \frac{3}{\sqrt{5x+6}}.$

i) $\sqrt{66 - \sqrt{x^2 + 33}} = 7.$ k) $\sqrt{36 - \sqrt{x^2 + 40}} = 5.$

l) $\sqrt[3]{24 + \frac{\sqrt{2x^2 - 17}}{3}} = 3.$ m) $\sqrt[3]{\sqrt{5x^2 + 9} - 19} = 2.$

n) $\sqrt[3]{73 - \sqrt[3]{7x^2 + 29}} = 4.$ o) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2 + 39} - 2} = 2.$

p) $\sqrt{3x + \sqrt{5x^2 - 6x + 17}} = 1.$ q) $\sqrt{2x + 1 + \sqrt{19x^2 - 32x + 4}} = 3.$

10. a) $2 + \sqrt{17 - 2x} = \sqrt{2x + 17}.$ b) $8 - \sqrt{20 - 4x} = \sqrt{20 + 4x}.$

c) $2 + \sqrt{2x + 8} = 2\sqrt{x + 5}.$ d) $2 + \sqrt{x + 8} = \sqrt{2x + 20}.$

e) $\sqrt{5x + 149} = 4 + \sqrt{3x + 85}.$ f) $2\sqrt{x + 37} - \sqrt{3x + 85} = 3.$

g) $\sqrt{4x + 41} = 2\sqrt{2x + 29} - 5.$ h) $2\sqrt{2x + 25} + 1 = 3\sqrt{x + 13}.$

i) $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{3a}.$ k) $\sqrt{a^2 + b^2 + x} + \sqrt{a^2 + b^2 - x} = (a + b)\sqrt{2}.$

l) $\sqrt{x + 3a + 2b} + \sqrt{x + 3a - 2b} = \sqrt{x - 6a}.$

m) $\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx} = \sqrt{2b}.$

n) $\sqrt{3x + 18a} + \sqrt{2a - 3b} = \sqrt{4x + 32a - 21b}.$

o) $\sqrt{2ax + 5(a + b)} + \sqrt{a + b} = \sqrt{3ax + 10(a + b)}.$

Nr. 31. Gemischt-quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

11. a) $(5x + 2)^2 = 729.$ b) $(8x - 5)^2 = 361.$

c) $(3x + 0{,}7)^2 = 6{,}25.$ d) $(0{,}3x - 1{,}1)^2 = 7{,}84.$

e) $(4x - 3)^2 = 9x^2.$ f) $(5x + 4)^2 = 49x^2.$

g) $(7x + 1)^2 = (5x + 11)^2.$ h) $(9x - 4)^2 = (7x + 2)^2.$

i) $(10x - 3)^2 = (9x + 2)^2.$ k) $(13x - 5)^2 = (12x - 1)^2.$

l) $(ax + b)^2 = (bx + a)^2.$ m) $(2x - 2a + 3b)^2 = (x + 3b)^2.$

*) Bei den Aufgaben dieser und der folgenden Gruppe ist zu untersuchen, welche der beiden Wurzeln zulässig ist; dabei ist die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen.

12. Die quadratische Ergänzung zu bilden zu den Ausdrücken

a) $x^2 + 4x$. b) $x^2 - 8x$. c) $x^2 - 24x$.
d) $x^2 - 0{,}6x$. e) $x^2 + 1{,}8x$. f) $x^2 - 0{,}5x$.
g) $x^2 + 1{,}3x$. h) $x^2 + \frac{5}{6}x$. i) $x^2 - \frac{9}{4}x$.
k) $x^2 + 3\frac{1}{2}x$. l) $x^2 - 3\frac{1}{4}x$. m) $x^2 + 2\frac{1}{5}x$.
n) $x^2 - 3ax$. o) $x^2 + \frac{a+b}{2}x$. p) $x^2 - 3 \cdot \frac{2a-3b}{2}x$.

13. a) $x^2 + 8x = 33$. b) $x^2 + 12x = 64$.
c) $x^2 - 21 = 4x$. d) $x^2 + 11 = 12x$.
e) $x^2 + 5x = 2\frac{3}{4}$. f) $x^2 + 9x - 3\frac{1}{9} = 0$.
g) $x^2 - 11x = 60$. h) $x^2 - 7x = -10$.
i) $x^2 + 0{,}6x = 18{,}4$. k) $x^2 - 2{,}4x - 13 = 0$.
l) $x^2 + 1{,}3x - 1{,}14 = 0$. m) $x^2 - 1{,}7x = 0{,}6$.
n) $x^2 + \frac{4}{5}x - 29 = 0$. o) $x^2 - \frac{14}{3}x + 41\frac{4}{9} = 0$.
p) $x^2 - \frac{5}{3}x - 26 = 0$. q) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0$.
r) $3x^2 - 2 = 5x$. s) $15x^2 - 53x = 42$.
t) $8x^2 - 17x = 115$. u) $9x^2 - 32x - 16 = 0$.
v) $11x^2 + 6x - 56 = 0$. w) $7x^2 - 8x - 39 = 0$.
x) $x^2 + 2ax = 3a^2$. y) $x^2 + (a+b)x = 2a^2 - 5ab + 2b^2$.
z) $x^2 - (a-b)x = 2ab + 2b^2$. α) $x^2 - \frac{b}{a}(a-b)x = a^2 - ab + b^2$.
β) $x^2 - (a^2+b^2)x = ab(b^2 - a^2)$. γ) $x^2 - (a^2+b^2)x = ab(a^2 - b^2)$.
δ) $x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2 = 0$. ε) $x^2 - 2ax = 4b^2 - a^2$.
ζ) $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2 = 0$. η) $x^2 - (2a-b)x + a^2 - ab - 2b^2 = 0$.
ϑ) $x^2 + 3(a-b)x = 10a^2 + 13ab - 3b^2$.
ι) $x^2 - 5(a-b)x + 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$.
κ) $(a^2 - b^2)x^2 - 4abx = a^2 - b^2$.
λ) $(a^2 - b^2)x^2 + 6abx = a^2 - 4b^2$.

14. Eine quadratische Gleichung aus den Wurzeln x_1 und x_2 herzustellen.

Aufl. Die Gleichung lautet: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$.

Beispiele. Die beiden Wurzeln seien

a) 4 und 7. b) 9 und 3. c) 15 und 23.
d) — 2 und — 19. e) — 9 und — 5. f) — 11 und — 35.
g) 6 und — 13. h) 11 und — 8. i) 72 und — 51.
k) 7 und — 19. l) 5 und — 39. m) 31 und — 80.
n) 0,6 und 0,8. o) 0,9 und — 0,4. p) 0,7 und — 1,2.
q) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$. r) $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{3}$. s) $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$.
t) $\frac{5}{6}$ und $-\frac{4}{15}$. u) $\frac{3}{8}$ und $-\frac{7}{12}$. v) $-\frac{2}{3}$ und $-\frac{5}{4}$.

w) $2a$ und $3b$. x) $a+b$ und $a-b$. y) $3a$ und $-2a+3b$.
z) $\frac{a+b}{a}$ und $\frac{a}{a-b}$. α) $\frac{a-2b}{b}$ und $\frac{2b-a}{a}$. β) $\frac{a+b}{a-b}$ und $-\frac{a-b}{a+b}$.

15. Die linke Seite in ein Produkt zu verwandeln und dadurch die Gleichung aufzulösen:

a) $x^2-8x+15=0$. b) $x^2-12x+35=0$.
c) $x^2+17x+70=0$. d) $x^2+15x+56=0$.
e) $x^2-15x-54=0$. f) $x^2-11x-12=0$.
g) $x^2-5x-36=0$. h) $x^2+15x-154=0$.
i) $x^2+18x-40=0$. k) $x^2-2x-63=0$.
l) $x^2-8x-884=0$. m) $x^2+8x-273=0$.
n) $x^2+12x-925=0$. o) $x^2-41x-336=0$.
p) $x^2+30x-1144=0$. q) $x^2-13x-9858=0$.
r) $x^2-1{,}3x+0{,}42=0$. s) $x^2+1{,}5x+0{,}56=0$.
t) $x^2-0{,}6x-0{,}27=0$. u) $x^2+0{,}5x-2{,}04=0$.
v) $x^2-1{,}1x-0{,}26=0$. w) $x^2+1{,}6x-1{,}05=0$.
x) $12x^2+x-35=0$. y) $15x^2-7x-88=0$.
z) $10x^2+39x-27=0$. α) $28x^2-17x-65=0$.
β) $27x^2-30x-77=0$. γ) $35x^2-66x-65=0$.
δ) $8x^2+41x+36=0$. ε) $12x^2+77x+30=0$.
ζ) $14x^2+45x+25=0$. η) $12x^2+160x+125=0$.
ϑ) $0{,}06x^2-0{,}31x+0{,}4=0$. ι) $0{,}15x^2+0{,}01x-0{,}28=0$.
κ) $0{,}35x^2+0{,}27x-0{,}18=0$. λ) $0{,}36x^2+1{,}11x+0{,}4=0$.

16. a) $x^2-12\frac{5}{12}x+5=0$. b) $x^2-3\frac{4}{5}x-6=0$.
c) $x^2-20\frac{3}{7}x-12=0$. d) $x^2+8\frac{1}{9}x-8=0$.
e) $x^2-2\frac{5}{6}x+2=0$. f) $x^2-\frac{28}{13}x-2=0$.
g) $x^2-4\frac{8}{15}x+4=0$. h) $x^2-\frac{9}{10}x-4=0$.
i) $x^2-4\frac{13}{30}x+3=0$. k) $x^2+9\frac{13}{14}x-6=0$.
l) $x^2+1\frac{13}{24}x-3=0$. m) $x^2+\frac{17}{36}x-4=0$.
n) $x^2-2\frac{8}{45}x-1\frac{2}{3}=0$. o) $x^2+2\frac{11}{12}x-3\frac{1}{8}=0$.
p) $x^2-2\frac{1}{12}x-6\frac{1}{4}=0$. q) $x^2-1\frac{2}{15}x-1\frac{1}{5}=0$.
r) $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{7}{16}=0$. s) $x^2-3\frac{2}{5}x+2\frac{1}{4}=0$.

17. a) $5x^2+1\frac{3}{4}x-1\frac{1}{2}=0$. b) $4x^2+11\frac{2}{3}x-12\frac{1}{2}=0$.
c) $3x^2-6\frac{1}{4}x-18\frac{3}{4}=0$. d) $4x^2-\frac{2}{3}x-1\frac{3}{4}=0$.
e) $6x^2-4\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=0$. f) $3x^2-12\frac{3}{4}x+13\frac{1}{8}=0$.
g) $2x^2-8\frac{1}{2}x+8\frac{3}{4}=0$. h) $6x^2+3\frac{1}{5}x-1\frac{1}{2}=0$.
i) $5x^2+\frac{4}{5}x-\frac{4}{15}=0$. k) $20x^2-11\frac{2}{3}x-2\frac{1}{2}=0$.
l) $10x^2+2\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}=0$. m) $11x^2-57\frac{2}{3}x+68\frac{3}{4}=0$.

18. a) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$.

b) $(x+5)^2+(x-2)^2+(x-7)(x+7)=11x+30$.
c) $(x-8)^2+(x+2)^2+(x-7)^2=(x+4)^2-(4x-1)$.
d) $(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2=(x+2)^2-7(x-1)$.
e) $(2x-5)^2+(3x-2)^2-(4x-9)^2=(2x+3)(7x-8)-76$.
f) $(3x-10)^2+(2x-6)^2=(4x-15)^2-(x-6)^2+19$.
g) $(5x-2)(5x+2)-(3x+4)^2=(6x-1)^2-53$.
h) $(7x-11)^2-(6x-5)(6x+5)+(2x+9)^2=(5x-3)^2+10$.
i) $(2x+1)^2+(3x+1)^2-(x-1)(2x+5)=(2x+3)^2$.
k) $(2x+4)^2-(3x-1)^2+(3x-1)(3x+7)=4(2x-3)^2$.
l) $(5x+9)(7x+3)+(4x-7)(8x-5)=(5x+4)(11x+3)-160$.
m) $(6x-5)(7x-6)+(7x-5)(8x-3)=(5x-1)(5x+9)+2$.
n) $(9x-8)(x+9)-(8x-7)(2x-3)=(3x+5)(5x-9)-33$.
o) $(x-a)^2+(x+b)^2+(x+a)(x-b)=2x^2+a^2+b^2$.
p) $(ax-b)^2+(a-bx)^2+4abx=2(a^2+b^2)x$.
q) $(x-a)^2+(x-b)^2+2(x-a)(x-b)=x^2$.
r) $(ax-b)^2+(bx-a)^2+2x(a^2+b^2)=4ab$.
s) $(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2=(a-b)^2$.
t) $(a^2-b^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x$.
u) $a^4(2x^2-1)-(ax-b)(2a^2+b^2)ax=b^3(ax-b)$.
v) $2(a+b)(x-a)(x-3b)+\frac{2}{3}a(x-9b)(x-3b)=3(a-b)[x^2-(a+b)x+ab]$.
w) $(a^2-b^2)[(a-x)^2-(b-x)^2]=4ab(a-x)(x-b)$.

19. a) $(x-3)(x-4)(x+7)-x(x-4)(x-1)=18$.
b) $(x-2)(x+5)(x-6)-x(x+3)(x-5)+80=0$.
c) $(x-7)(x-4)(x+2)-x(x-3)(x-5)+134=0$.
d) $(x+3)(x+1)(x-8)-(x-1)(x-2)(x-3)+216=0$.
e) $(x-4)(x+1)(x+3)=(x-1)(x-2)(x+4)-108$.
f) $(x-9)(x+2)(x+5)=(x-3)(x-4)(x-6)+12$.
g) $(2x-1)(3x-2)(4x-3)=(x+1)(3x+2)(8x-15)+36$.
h) $(4x+1)(6x-5)(5x+2)=(3x+4)(10x-17)(4x+3)-246$.
i) $(8x-7)(9x-8)(7x-6)=(14x-13)(12x-11)(3x+5)-7$.
k) $x(x-2)(x+5)+(x-3)(x-2)(8-3x)=2x^2(3-x)+208$.

20. a) $(x-4)^3+(x+1)^3=(x-1)(x-2)(2x+3)+61$.
b) $(2x+3)^3+(4x-3)^3=(2x+1)(4x+3)(9x-10)+28$.
c) $(3x-4)^3-(6x-7)^3=(9x+40)(7x-12)(7-3x)$.
d) $(5x-9)^3-(7x-5)^3=4x(14x-25x^2)-2x(59x^2-45)$.
e) $(x+2a)(x+b)(x-a+b)=(x-b)^3+b(x-a-b)^2+a(6bx-a^2)$.
f) $(x+a)^3-(x-a)^3=a(2x+a)(3x-b)+2ab^2-a^3$.
g) $(a-x)^3+(x+b)^3=a^2x+bx^2+2ab^2$.

21. a) $x+\frac{6}{x}=5$. b) $x-\frac{18}{x}=3$.

c) $3x - \frac{16}{x} = 8.$ d) $9x + \frac{45}{x} = 86.$

e) $5x - \frac{22}{2x+3} = 18.$ f) $3x - \frac{27}{5x-1} = 9.$

g) $11x - \frac{42}{3x+1} = 16.$ h) $7x + \frac{68}{3x-4} = 53.$

i) $\frac{x+5}{4} + \frac{5}{x-6} = \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{2}.$

k) $\frac{x+3}{3} - \frac{2}{x-4} = \frac{x}{6} + \frac{x-2}{4}.$

l) $\frac{x+3}{4} - \frac{5}{x-10} = \frac{x}{5} + \frac{x+11}{8}.$

m) $\frac{x-3}{5} + \frac{x}{4} = \frac{4}{x-6} - \frac{x-11}{3}.$

n) $\frac{2x-3}{5} + \frac{8}{3x-4} = \frac{5x-2}{6} - \frac{x}{4}.$

o) $\frac{3x-1}{10} + \frac{5x-3}{4} = \frac{9}{2x-11} + \frac{4x+7}{5}.$

p) $\frac{5x-3}{6} - \frac{7x-1}{10} = \frac{7}{3x-2} - \frac{4x-9}{3}.$

q) $\frac{5x-8}{4} - \frac{3x+4}{5} = \frac{17}{2x-7} + \frac{x-4}{2}.$

r) $x + \frac{a^2-b^2}{x} = 2a.$ s) $abx + \frac{ab}{x} = a^2 + b^2.$

22. a) $\frac{8}{x-4} + \frac{5}{x-3} = 3.$ b) $\frac{8}{x-2} + \frac{3}{x-5} = 5.$

c) $\frac{9}{x-2} - \frac{4}{x-7} = 5.$ d) $\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x-6} = 9.$

e) $\frac{7}{x+5} - \frac{8}{x-4} = 5.$ f) $\frac{11}{x+8} + \frac{6}{x-1} = 4.$

g) $\frac{9}{2x-5} + \frac{14}{3x+2} = 4.$ h) $\frac{5}{4x+3} - \frac{2}{5x-7} = \frac{1}{12}.$

i) $\frac{9}{2x+3} + \frac{15}{4x+1} = \frac{6}{5}.$ k) $\frac{6}{3x-5} - \frac{12}{7x-3} = \frac{5}{6}.$

l) $\frac{x-3}{x-4} + \frac{x+1}{x-2} = 2\frac{3}{4}.$ m) $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{x+2}{x-2} = 3.$

n) $\frac{5x-6}{2x-3} - \frac{7x+2}{5x-4} + 8 = 0.$ o) $\frac{5x+2}{8x-7} = \frac{9x-1}{6x+5} + \frac{1}{3}.$

p) $\frac{4x+3}{3x-4} + \frac{7x+5}{4x+1} = \frac{24x^2+31x+16}{(3x-4)(4x+1)}.$

q) $\frac{3x+2}{2x+7} - \frac{4x-5}{2x-7} = \frac{13-8x^2}{4x^2-49} - \frac{1}{3}.$

r) $\frac{5x+2}{3x-2} - \frac{7x-2}{3x+2} = \frac{9x-4}{9x^2-4} - \frac{5}{32}.$

s) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x-12} = \frac{3x+8}{4x^2-9} + \frac{1}{2}.$

23. a) $\frac{7}{x+5} - \frac{8}{x-6} = \frac{3}{x-1}$.

b) $\frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-3} = \frac{6}{x-6}$.

c) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} = \frac{6}{7-x}$.

d) $\frac{7}{x-3} + \frac{9}{x+5} = \frac{40}{x+1}$.

e) $\frac{6}{3x-4} - \frac{5}{4x-3} = \frac{18}{2x+5}$.

f) $\frac{11}{4x-1} + \frac{18}{7x-3} = \frac{26}{3x+4}$.

g) $\frac{18}{2x+1} - \frac{14}{3x+2} = \frac{19}{4x+3}$.

h) $\frac{7}{2x-3} + \frac{26}{3x-2} = \frac{57}{4x-1}$.

i) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = 3\frac{1}{3}$.

k) $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ax-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$.

l) $\frac{3b}{x-a} - \frac{2a}{x-b} = \frac{2a+b}{x+a}$.

m) $\frac{6b}{x-a} - \frac{a}{x-3b} = \frac{a+6b}{x+3b}$.

24. a) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x-1}{x-4} + 1$.

b) $\frac{x+11}{x+2} + \frac{x+13}{x+3} = \frac{4}{x-5} + 2$.

c) $\frac{x+5}{x-3} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{5}{x-4} + 2$.

d) $\frac{x+5}{x+2} + \frac{x+7}{x+3} = \frac{x+2}{x} + 1$.

e) $\frac{1}{x-9} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x+18} + \frac{1}{x-10}$.

f) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+20} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+8}$.

g) $\frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-7}$.

h) $\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-11} - \frac{1}{x-10}$.

i) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+23} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}$.

k) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$.

l) $\frac{1}{x-12} - \frac{1}{x+15} = \frac{1}{x-13} - \frac{1}{x-10}$.

m) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+10} - \frac{1}{x+22}$.

25.*) a) $3x - 8 = 4\sqrt{4x+1}$.

b) $5 + 3\sqrt{3x-5} = 2x$.

c) $4x - 3\sqrt{7x-6} = 6$.

d) $6 + 5\sqrt{13x+9} = 8x$.

e) $3x - 2\sqrt{3x^2-4x-6} = 1$.

f) $4 + 3\sqrt{5x^2-7x+12} = 7x$.

g) $9x - 2 = 5\sqrt{6x^2-7x-8}$.

h) $5\sqrt{7x^2-11x+10} - 8 = 6x$.

i) $\sqrt{3x-4+\sqrt{8x^2-3x+11}} = 5$.

k) $\sqrt{8x+13-7\sqrt{x^2-11x+4}} = 9$.

*) S. Bemerkung zu Nr. 9, S. 196.

l) $\sqrt[3]{2x+7+3\sqrt{5x^2+8x-3}}=4.$

m) $\sqrt[3]{9x-14+4\sqrt{9x^2-11x-3}}=5.$

26. a) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=4.$ b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-8}=5.$

c) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2.$ d) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+1}=1.$

e) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2}=7.$ f) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x-5}=3.$

g) $\sqrt{9x+4}+1=\sqrt{13x-1}.$ h) $\sqrt{7x+8}-2=\sqrt{5x-4}.$

i) $\sqrt{4x-3}-2=\sqrt{2x-5}.$ k) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x-5}=1.$

l) $\sqrt{11x+4}-\sqrt{9x+1}=1.$ m) $\sqrt{13x-3}-\sqrt{9x-2}=1.$

n) $2\sqrt{4x-3}-3\sqrt{2x-5}=1.$ o) $4\sqrt{6x+1}-3\sqrt{7x+8}=2.$

p) $3\sqrt{9x-5}-4\sqrt{3x-2}=5.$ q) $2\sqrt{11x-7}-5\sqrt{2x-7}=3.$

r) $\sqrt{b^2+x}+\sqrt{a^2-x}=a+b.$ s) $\sqrt{x+5a^2}-\sqrt{x-3a^2}=2a.$

t) $\sqrt{2a\,(x+3b)}-\sqrt{3b\,(2a-x)}=2a-3b.$

u) $\sqrt{ax+3a^2b^2}=\sqrt{\frac{3}{a}x+b^2}=2b\,(a-1).$

v) $3a-\sqrt{x+2a^2}=6a-\sqrt{5x+a^2}.$

w) $a^2-b\sqrt{x-a^2}=a\sqrt{x-b^2}-b^2.$

27. a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}.$

b) $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{8x+9}.$

c) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}.$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}=\sqrt{17x-4}.$

e) $\sqrt{7x-3}-\sqrt{3x+4}=\sqrt{x-3}.$

f) $\sqrt{7x+4}-\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-5}.$

g) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{19x+30}.$

h) $\sqrt{25-2x}+\sqrt{2x+9}=\sqrt{9x-8}.$

i) $\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}.$

k) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}.$

l) $\sqrt{x-3a^2}+\sqrt{2x+a^2}=\sqrt{3x+4a^2}.$

m) $\sqrt{2ax+2ab}-\sqrt{2ab-bx}=\sqrt{2ax-bx}.$

n) $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{2b\,(x-a)}=\sqrt{ax+4bx+b^2}.$

o) $\sqrt{x+2ab}-\sqrt{x-2ab}=2\sqrt{x-a^2}.$

28. a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$.

b) $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+1}$.

c) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{5x-9}=\sqrt{8x-4}-\sqrt{4x-4}$.

d) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+10}+\sqrt{4x-15}$.

e) $\sqrt{x-2}-\sqrt{5x-9}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+8}$.

29.*) a) $x^2-10x+13=0$. b) $x^2-6x-23=0$.

c) $x^2-4x-71=0$. d) $x^2-8x-29=0$.

e) $x^2-12x-14=0$. f) $x^2-14x+37=0$.

g) $x^2+2x-7=0$. h) $x^2+4x-41=0$.

i) $x^2+6x+1=0$. k) $x^2+8x-11=0$.

l) $x^2+10x+13=0$. m) $x^2+18x+31=0$.

n) $9x^2-72x+132=0$. o) $4x^2-40x+94=0$.

p) $3x^2+18x+25=0$. q) $4x^2+48x+69=0$.

r) $18x^2-24x-19=0$. s) $16x^2-24x+3=0$.

t) $12x^2+12x-1=0$. u) $18x^2+24x-73=0$.

v) $x^2+61{,}6=24{,}691x$. w) $x^2+0{,}4355x=0{,}2016$.

x) $5{,}2x^2-4{,}3x+1{,}8534=0$. y) $0{,}567x^2-1{,}248x+0{,}4537=0$.

z) $2{,}25x^2-13{,}47x+18{,}375=0$.

α) $1{,}75x^2+11{,}93x-6{,}125=0$.

β) $3{,}128x^2-6{,}995x+2{,}474=0$.

γ) $9{,}532x^2-18{,}75x+7{,}128=0$.

Nr. 32. Gleichungen, welche durch Einführung neuer Unbekannten lösbar oder einfacher werden.

30. a) $(2x-5)^2-5(2x-5)+4+0$.

b) $(3x-7)^2+6(3x-7-16=0$.

c) $(5x-3)^2+7(5x-3)-18=0$.

d) $(6x+3)^2-16(6x+3)+15=0$.

e) $4(4x-9)^2-5(4x-9)-21=0$.

f) $3(7x-11)^2+7(7x-11)-48=0$.

g) $(ax+b)^2-2b(ax+b)-a(a-2b)=0$.

h) $(ax-b)^2+b(ax-b)-a(a-b)=0$.

i) $3a(2ax-3b)^2-6a^2(2ax-3b)+9ab(2a-3b)=0$.

k) $5b(5ax-4b)^2+3a^2(5ax-4b)-b(3a^2+5b^2)=0$.

---

*) Die Wurzeln der Gleichungen dieser Nr. sind irrational.

31. a) $x^4 - 5x^2 = 36$. b) $x^4 - 8x^2 - 128 = 0$.
c) $x^4 + 9 = 10x^2$. d) $12x^2 - 32 = x^4$.
e) $3x^4 - 25x^2 = 18$. f) $4x^4 + 3x^2 = 1072$.
g) $8x^4 + 10x^2 = 3$. h) $18x^4 + 1 = 11x^2$.
i) $10x^4 - 0{,}7x^2 - 0{,}018 = 0$. k) $50x^4 + 23x^2 - 1 = 0$.
l) $5x^4 - 0{,}65x^2 + 0{,}018 = 0$. m) $15x^4 - 6{,}15x^2 + 0{,}6 = 0$.

32. a) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$. b) $x^6 - 60x^3 = 256$.
c) $x^6 - 52x^3 - 768 = 0$. d) $x^6 - 112x^3 = 1625$.
e) $2x^6 + 5x^3 = 168$. f) $5x^6 - 121x^3 = 378$.
g) $3x^6 - 618x^3 - 6480 = 0$. h) $8x^6 - 3 = 5x^3$.

33. a) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$. b) $x + 3\sqrt{x} = 10$.
c) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$. d) $x + 7\sqrt{x} = 30$.
e) $3x - 4\sqrt{x} - 32 = 0$. f) $5x + 3\sqrt{x} = 140$.
g) $4x + 3\sqrt{x} = 22$. h) $9x - 23\sqrt{x} = 52$.
i) $x - 0{,}7\sqrt{x} = 0{,}08$. k) $x + 0{,}5\sqrt{x} = 1{,}26$.
l) $x - 1{,}6\sqrt{x} + 0{,}63 = 0$. m) $x + 0{,}8\sqrt{x} = 0{,}65$.
n) $3(2x-1) + 2\sqrt{2x-1} = 33$. o) $5(3x+4) - 23\sqrt{2x-1} = 11$.
p) $7\sqrt{5x-11} + 10x = 169$. q) $2\sqrt{7x+1} - 21x + 173 = 0$.
r) $5\sqrt{4x-3} - 16x + 87 = 0$. s) $4\sqrt{9x-2} + 27x - 70 = 0$.
t) $x - a\sqrt{x} = ab + b^2$. u) $x + b\sqrt{x} = a^2 - ab$.
v) $3x - 2a\sqrt{x} + b^2 = (a+2b)^2$. w) $2x - b\sqrt{x} = (2a+b)(a+b)$.

34. a) $\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} = 10$. b) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$.
c) $3\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} - 28 = 0$. d) $6\sqrt[3]{x^2} - 25\sqrt[3]{x} - 25 = 0$.
e) $4\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt[3]{x} - 7 = 0$. f) $7\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{9} = 0$.
g) $5\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{4}{9} = 0$. h) $12\sqrt[3]{x^2} - 7\sqrt[3]{x} = 1\frac{1}{2}$.
i) $\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[5]{x} = 3$. k) $3\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[5]{x} - 16$.
l) $5\sqrt[5]{x^2} - 13\sqrt[5]{x} = 6$. m) $4\sqrt[6]{x^2} - 3\sqrt[6]{x} - 10 = 0$.
n) $3\sqrt[5]{x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} = 2$. o) $4\sqrt[5]{x^4} - 9\sqrt[5]{x^2} = 9$.
p) $\sqrt[3]{x^2} - 2a\sqrt[3]{x} + a^2 = 0$. q) $\sqrt[3]{x^2} + 2b\sqrt[3]{x} = a^2 - b^2$.
r) $\sqrt[3]{x^2} - (ab+1)\sqrt[3]{x} + ab = 0$. s) $\sqrt[3]{x^2} - (a-b)\sqrt[3]{x} = 2b(a+b)$.
t) $x^{2n} - 2ax^n + b = 0$. u) $\sqrt[n]{x^2} + 2a\sqrt[n]{x} = b$.

Nr. 33. Anwendungen der Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.*)

a. Vorübungen.

35. a*) Multipliziert man den m^{ten} Teil einer Zahl mit ihrem n^{ten} Teil, so erhält man a. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a = 80$, $m = 4$, $n = 5$. 2. $a = 16\frac{1}{2}$, $m = 6$, $n = 11$.

b*) Multipliziert man das $m$fache einer Zahl mit ihrem $n$fachen, so erhält man a. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a = 450$, $m = 5$, $n = 2\frac{1}{2}$. 2. $a = 294$, $m = 2\frac{1}{3}$, $n = 3\frac{1}{2}$.

c*) Dividiert man a durch eine Zahl, so erhält man das $n$fache dieser Zahl. Wie heißt diese?

Beispiele. 1. $a = 147$, $n = 3$. 2. $a = 384$, $n = 6$.

d*) Zwei Zahlen, deren Produkt gleich 980 ist, verhalten sich wie 4 : 5. Wie heißt die kleinere von ihnen?

36. a) Das Produkt zweier Zahlen, die sich um d unterscheiden, ist gleich n. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $d = 3$, $n = 54$. 2. $d = 7$, $n = 198$.

b) Die Zahl 84 soll in zwei Faktoren zerlegt werden, deren Differenz gleich 5 ist. Wie heißen die Faktoren?

c) Das Produkt zweier Zahlen, deren Summe gleich a ist, beträgt n. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 22$, $n = 96$. 2. $a = 30$, $n = 221$.

d) Die Zahl 156 soll in zwei Faktoren zerlegt werden, deren Summe gleich 25 ist. Wie heißen die Faktoren?

e) Welche ganze Zahl ist um d kleiner als das Quadrat der vorhergehenden Zahl?

Beispiele. 1. $d = 29$. 2. $d = 41$. 3. $d = 55$.

f) Welche ganze Zahl ist um d größer als der n^{te} Teil ihres Quadrates?

Beispiele. 1. $d = 3$, $n = 16$. 2. $d = 6$, $n = 25$.

g) Die Summe der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, die sich um d unterscheiden, beträgt a. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 9$, $d = 27$. 2. $a = 13$, $d = 39$.

h) Die Differenz der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, deren Summe gleich a ist, beträgt d. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 52$, $d = 2$. 2. $a = 769$, $d = 13$.

---

*) Die Aufgaben, welche auf rein-quadratische Gleichungen führen, sind mit einem Stern (*) bezeichnet.

31. a) $x^4 - 5x^2 = 36$. b) $x^4 - 8x^2 - 128 = 0$.
c) $x^4 + 9 = 10x^2$. d) $12x^2 - 32 = x^4$.
e) $3x^4 - 25x^2 = 18$. f) $4x^4 + 3x^2 = 1072$.
g) $8x^4 + 10x^2 = 3$. h) $18x^4 + 1 = 11x^2$.
i) $10x^4 - 0{,}7x^2 - 0{,}018 = 0$. k) $50x^4 + 23x^2 - 1 = 0$.
l) $5x^4 - 0{,}65x^2 + 0{,}018 = 0$. m) $15x^4 - 6{,}15x^2 + 0{,}6 = 0$.

32. a) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$. b) $x^6 - 60x^3 = 256$.
c) $x^6 - 52x^3 - 768 = 0$. d) $x^6 - 112x^3 = 1625$.
e) $2x^6 + 5x^3 = 168$. f) $5x^6 - 121x^3 = 378$.
g) $3x^6 - 618x^3 - 6480 = 0$. h) $8x^6 - 3 = 5x^3$.

33. a) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$. b) $x + 3\sqrt{x} = 10$.
c) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$. d) $x + 7\sqrt{x} = 30$.
e) $3x - 4\sqrt{x} - 32 = 0$. f) $5x + 3\sqrt{x} = 140$.
g) $4x + 3\sqrt{x} = 22$. h) $9x - 23\sqrt{x} = 52$.
i) $x - 0{,}7\sqrt{x} = 0{,}08$. k) $x + 0{,}5\sqrt{x} = 1{,}26$.
l) $x - 1{,}6\sqrt{x} + 0{,}63 = 0$. m) $x + 0{,}8\sqrt{x} = 0{,}65$.
n) $3(2x-1) + 2\sqrt{2x-1} = 33$. o) $5(3x+4) - 23\sqrt{2x-1} = 11$.
p) $7\sqrt{5x-11} + 10x = 169$. q) $2\sqrt{7x+1} - 21x + 173 = 0$.
r) $5\sqrt{4x-3} - 16x + 87 = 0$. s) $4\sqrt{9x-2} + 27x - 70 = 0$.
t) $x - a\sqrt{x} = ab + b^2$. u) $x + b\sqrt{x} = a^2 - ab$.
v) $3x - 2a\sqrt{x} + b^2 = (a+2b)^2$. w) $2x - b\sqrt{x} = (2a+b)(a+b)$.

34. a) $\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} = 10$. b) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$.
c) $3\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} - 28 = 0$. d) $6\sqrt[3]{x^2} - 25\sqrt[3]{x} - 25 = 0$.
e) $4\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt[3]{x} - 7 = 0$. f) $7\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{9} = 0$.
g) $5\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + \frac{4}{9} = 0$. h) $12\sqrt[3]{x^2} - 7\sqrt[3]{x} = 1\frac{1}{2}$.
i) $\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[5]{x} = 3$. k) $3\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt[5]{x} - 16$.
l) $5\sqrt[5]{x^2} - 13\sqrt[5]{x} = 6$. m) $4\sqrt[6]{x^2} - 3\sqrt[6]{x} - 10 = 0$.
n) $3\sqrt[5]{x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} = 2$. o) $4\sqrt[5]{x^4} - 9\sqrt[5]{x^2} = 9$.
p) $\sqrt[3]{x^2} - 2a\sqrt[3]{x} + a^2 = 0$. q) $\sqrt[3]{x^2} + 2b\sqrt[3]{x} = a^2 - b^2$.
r) $\sqrt[3]{x^2} - (ab+1)\sqrt[3]{x} + ab = 0$. s) $\sqrt[3]{x^2} - (a-b)\sqrt[3]{x} = 2b(a+b)$
t) $x^{2n} - 2ax^n + b = 0$. u) $\sqrt[n]{x^2} + 2a\sqrt[n]{x} = b$.

11
nten

Nr. 33. **Anwendungen der Gleichungen [illegible] mit einer Unbekannten.***

21,
tzten,
Quo=

a. Beziehungen.

35. a*) Multipliziert man den m^{ten} Teil einer [illegible] so erhält man a. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a = 80$, $m = 4$, $n = 5$. 2. [illegible]

b*) Multipliziert man das m-fache einer [illegible] so erhält man a. Wie heißt die Zahl?

Beispiele. 1. $a = 450$, $m = 5$, $n = 2$. 2. [illegible]

c*) Dividiert man a durch eine Zahl, [illegible] dieser Zahl. Wie heißt diese?

Beispiele. 1. $a = 147$, $n = 3$. 2. [illegible]

d*) Zwei Zahlen, deren Produkt [illegible] wie 4 : 5. Wie heißt die kleinere von ihnen?

en.
180 ℳ
kostete
r 60 ℳ
Rheinwein
weniger

36. a) Das Produkt zweier Zahlen [illegible] gleich n. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $d = 3$, $n = 54$. 2. [illegible]

b) Die Zahl 84 soll in zwei Zahlen [illegible] Differenz gleich 5 ist. Wie heißen die Zahlen?

c) Das Produkt zweier Zahlen, deren Summe [illegible] trägt n. Wie groß ist die kleinere der beiden Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 22$, $n = 8$. 2. [illegible]

d) Die Zahl 156 soll in zwei Zahlen [illegible] Summe gleich 25 ist. Wie heißen die Zahlen?

e) Welche ganze Zahl [illegible] hergehenden Zahl?

Beispiele. 1. $d = 20$. 2. [illegible]

f) Welche ganze Zahl [illegible] Quadrates?

Beispiele. 1. $d = 3$, $n = 8$. 2. [illegible]

g) Die Summe der Quadrate [illegible] um d unterscheiden, beträgt n. [illegible] Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 6$, $d = 1$. 2. [illegible]

h) Die Differenz der Quadrate [illegible] Summe gleich n ist, beträgt d. [illegible] Zahlen?

Beispiele. 1. $a = 12$, $d = 1$. 2. [illegible]

3 Frauen
verteilt, daß
kamen. Wie
einen Mann

ahmen, wurden
ℳ ausgegeben,
Erwachsenen be=
tie teil?
, daß jede seiner
en sollte. Da er
mmen 160 000 ℳ,
viel Söhne hatte

eindeschule an die
rteilt, und zwar
viel Mädchen
wurde?
m $\frac{2}{3}$ Stunden
klegte. Wie

hr zurück=
en. Wie

25 ₰
ie viel

---

*) Die Aufgaben [illegible] einem Stern (*) [illegible]

37. a*) Welche Zahl ist gleich dem 1,44fachen ihres reciproken Wertes?

b*) Welche Zahl muß man zu ihrem reciproken Werte addieren, um ihr $3\frac{1}{4}$faches zu erhalten?

c) Eine Zahl ist um $\frac{5}{6}$ kleiner als ihr reciproker Wert. Wie heißt die Zahl?

d) Eine Zahl ist um $4\frac{5}{18}$ größer als ihr reciproker Wert. Wie heißt die Zahl?

e) Der reciproke Wert einer Zahl ist um $1\frac{1}{2}$ größer als ihr 7faches. Wie heißt die Zahl?

f) Die Summe der reciproken Werte zweier auf einander folgenden Zahlen ist gleich $\frac{11}{30}$. Wie heißen die Zahlen?

g) Die reciproken Werte zweier Zahlen, von denen die eine um 49 kleiner ist als die andere unterscheiden sich um $\frac{1}{8}$. Wie heißt die kleinere der beiden Zahlen?

h) Die Summe aus den reciproken Werten zweier Zahlen, deren Produkt gleich 2 ist, beträgt $1\frac{5}{12}$. Wie heißen die beiden Zahlen?

i) Die reciproken Werte zweier Zahlen, deren Produkt gleich 4 ist, unterscheiden sich um $1\frac{31}{60}$. Wie heißen die beiden Zahlen?

38. a) Um welche Zahl muß man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{7}{3}$ vermehren, damit er um 1 größer wird als der 27te Teil der Zahl?

b) Der Zähler eines Bruches ist um 4 kleiner als der Nenner. Vermehrt man den Zähler um 7 und vermindert den Nenner um 5, so wird der Bruch um $1\frac{1}{15}$ größer. Wie heißt der Bruch?

c) Die Summe aus dem Zähler und Nenner eines Bruches beträgt 14. Vermehrt man den Zähler um 13 und den Nenner um 9, so nimmt der Wert des Bruches um $\frac{4}{9}$ zu. Wie heißt der Bruch?

d) Ein Bruch hat den Wert $\frac{2}{5}$. Vermehrt man seinen Zähler um 4 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man $\frac{2}{9}$ mehr als wenn man zum Zähler und Nenner 12 addiert. Wie heißt der Bruch?

39. a) In einer zweistelligen Zahl ist die zweite Ziffer um 2 kleiner als die erste. Dividiert man die Zahl durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man $2\frac{2}{3}$. Wie heißt die Zahl?

b) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 15 durch den Quotienten aus ihrer ersten und zweiten Ziffer, so erhält man $103\frac{1}{2}$. Wie heißt die Zahl?

c) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 9 durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 10 weniger, als wenn man sie durch ihre erste Ziffer dividiert. Wie heißt die Zahl?

d) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl beträgt 12. Dividiert man die Zahl durch ihre erste Ziffer, so erhält man $1\frac{1}{2}$ weniger, als wenn man ihre Ziffern umstellt und dann durch die zweite Ziffer der ursprünglichen Zahl dividiert. Wie heißt die Zahl?

e) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 11 durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man 2 zum Quotienten und 5 zum Rest. Wie heißt die Zahl?

f) Dividiert man eine dreistellige Zahl mit der Quersumme 21, deren erste Ziffer um 3 kleiner ist als die Summe der beiden letzten, durch das Produkt dieser beiden Ziffern, so erhält man 27 zum Quotienten und 30 zum Rest. Wie heißt die Zahl?

b. Vermischte Aufgaben, insbesondere Bewegungsaufgaben.

40. a) Ein Kaufmann bestellte für 160 ℳ Kaffee und für 180 ℳ Thee und erhielt 40 kg Kaffee mehr als Thee. Wie viel ℳ kostete ein kg Kaffee, wenn ein kg Thee 5 ℳ teurer war?

b) Ein Gastwirt kaufte für 90 ℳ Rheinwein und für 60 ℳ Moselwein, im ganzen 110 Flaschen. Wie viel Flaschen Rheinwein hatte er gekauft, wenn beim Moselwein für eine Flasche 30 ₰ weniger berechnet wurden als beim Rheinwein?

c) Die Kosten einer gemeinschaftlichen Reise, an der 3 Frauen weniger als Männer teil genommen hatten, wurden so verteilt, daß auf die Männer 1750 ℳ und auf die Frauen 800 ℳ kamen. Wie viel Männer befanden sich in der Gesellschaft, wenn für einen Mann 50 ℳ mehr als für eine Frau berechnet wurden?

d) Auf einer Landpartie, an der 27 Personen teil nahmen, wurden für die Erwachsenen 21 ℳ und für die Kinder 42 ℳ ausgegeben, obwohl für ein Kind 1,50 ℳ weniger als für einen Erwachsenen berechnet wurden. Wie viel Kinder nahmen an der Partie teil?

e) Ein Vater hatte in seinem Testament bestimmt, daß jede seiner Töchter 5000 ℳ mehr als jeder seiner Söhne erben sollte. Da er 2 Töchter weniger als Söhne hatte, so erhielten diese zusammen 160 000 ℳ, während den Töchtern nur 90 000 ℳ zufielen. Wie viel Söhne hatte der Erblasser?

f) Zu Kaisers Geburtstag wurden in einer Gemeindeschule an die Schüler 175 ℳ und an die Schülerinnen 280 ℳ verteilt, und zwar erhielt ein Mädchen 50 ₰ mehr als ein Knabe. Wie viel Mädchen waren in der Schule, wenn sie von 300 Kindern besucht wurde?

41. a) Ein Eisenbahnzug würde auf einer Strecke von 180 km $\frac{2}{3}$ Stunden Zeit gewinnen, wenn er in der Stunde 9 km mehr zurücklegte. Wie viel Stunden braucht er für die Strecke?

b) Ein Radfahrer würde, wenn er stündlich 2 km mehr zurücklegte, auf einer Strecke von 72 km $\frac{1}{2}$ Stunde Zeit gewinnen. Wie viel km legt er in der Stunde zurück?

c) Jemand kaufte für 30 ℳ Wein. Hätte eine Flasche 25 ₰ weniger gekostet, so hätte er 4 Flaschen mehr erhalten. Wie viel Flaschen hatte er gekauft?

d) Ein Kaufmann hatte für 130 ℳ Kaffee bestellt. Da das kg der verlangten Sorte aber 10 ₰ weniger kostete, so schickte der Lieferant 2 kg mehr, als bestellt waren. Wie viel kg hatte der Kaufmann bestellt?

e) Ein Kaufmann bestellte für 224 ℳ Thee. Da aber 1 kg desselben 0,6 ℳ mehr kostete, so erhielt er 3 kg weniger, als er gedacht hatte. Wie viel ℳ kostete 1 kg Thee?

f) Ein Kaufmann hatte für 48 ℳ Weintrauben gekauft. Da sich 5 kg als unverkäuflich erwiesen, so mußte er, um keinen Schaden zu erleiden, für das kg 4 ₰ mehr nehmen, als er dafür bezahlt hatte. Was hatte er für ein kg gegeben?

g) Ein reicher Mann hatte zur Verteilung an die Mannschaft einer Kompagnie am Weihnachtsabend 525 ℳ geschenkt. Da aber 25 Mann auf Urlaub waren, so erhielt jeder der zurückgebliebenen Soldaten 50 ₰ mehr, als ihm zugedacht waren. Wie viel Mann hatte die Kompagnie?

h) In einer Gesellschaft wurden zu einem wohlthätigen Zwecke 70 ℳ gesammelt, wobei jeder gleichviel gab. Wären 5 Personen mehr in der Gesellschaft gewesen und hätte jeder 50 ₰ mehr gegeben, so wären 100 ℳ zusammengekommen. Wie viel ℳ hatte jeder gegeben?

42. a) Zwei Fußgänger gingen sich von zwei Orten aus entgegen und trafen sich 3 Stunden nach ihrem gleichzeitigen Aufbruch. In welcher Zeit würde der erste die ganze Strecke zurücklegen, wenn er dazu $2\frac{1}{2}$ Stunden mehr als der zweite brauchte?

b) Zwei Reiter, von denen der erste für eine kreisförmige Bahn 15 Sekunden weniger braucht als der zweite, begegnen sich nach 56 Sekunden, wenn beide von demselben Punkte aus in entgegengesetzter Richtung gleichzeitig abreiten. Wie viel Sekunden braucht der erste, um die Bahn zurückzulegen?

c) Zwei Radfahrer treffen sich nach 30 Sekunden, wenn sie in einer kreisförmigen Bahn von derselben Stelle aus in entgegengesetzter Richtung gleichzeitig abfahren. Wie viel Sekunden braucht der erste für die Bahn, wenn er 11 Sekunden mehr nötig hat als der zweite?

d) Um einen Wasserbehälter zu füllen, braucht die erste von zwei Röhren 24 Minuten mehr als die zweite. Wie viel Minuten braucht die erste Röhre, wenn beide gleichzeitig geöffnet werden und in 35 Minuten den Behälter füllen?

e) Um einen Behälter zu füllen, braucht die erste von zwei Röhren 20 Minuten weniger als die zweite. Werden beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so füllen sie in 16 Minuten $\frac{2}{3}$ des Behälters. Wie viel Minuten braucht die erste Röhre, um den Behälter zu füllen?

f) Zwei Arbeiter beenden eine Arbeit in $6\frac{2}{3}$ Stunden, wenn sie

gleichzeitig beginnen. Wie viel Stunden braucht der erste Arbeiter allein, wenn er 3 Stunden weniger nötig hat als der zweite?

g) Ein Mann würde mit einem bestimmten Reisegeld 9 Tage länger reisen können als seine Frau. Da aber beide zusammen reisen, so kommen sie mit dem Reisegeld nur 20 Tage aus. Wie viel Tage hätte der Mann allein unterwegs sein können?

43. a) Bei einem Rennen wurde der Radfahrer A von B alle 450 Sekunden überrundet, da er für die ganze Bahn 5 Sekunden mehr als B brauchte. Wie viel Sekunden hatte A nötig, um die Bahn zurückzulegen?

b) Von zwei Reitern braucht der erste für eine kreisförmige Bahn 8 Sekunden weniger als der zweite. Reiten beide gleichzeitig von derselben Stelle und in derselben Richtung ab, so wird der zweite von dem ersten alle 160 Sekunden einmal überholt. Wie viel Sekunden braucht der erste für die Bahn?

c) Von zwei Röhren braucht die erste 9 Minuten weniger, um einen Behälter zu füllen, als die zweite, um ihn zu leeren. Werden beide zu derselben Zeit geöffnet, so fließt 70 Minuten später der Behälter über. In welcher Zeit füllt die erste Röhre den Behälter?

d) Von zwei Röhren braucht die erste 2 Minuten weniger, um einen Behälter zu füllen, als die zweite, um ihn zu leeren. Werden beide zu derselben Zeit geöffnet, so ist 72 Minuten später $\frac{2}{5}$ des Behälters gefüllt. In welcher Zeit füllt die erste Röhre den Behälter?

44. a) Zwei Radfahrer fuhren sich von zwei Orten aus entgegen. Der erste, der für die ganze Strecke eine Stunde weniger brauchte als der zweite, brach $\frac{1}{2}$ Stunde nach diesem auf und begegnete ihm nach einer 3stündigen Fahrt. Wie viel Stunden brauchte der erste Radfahrer für die ganze Strecke?

b) Von zwei Dampfern fuhr der erste um 6 Uhr vormittags von Mainz nach Köln und der zweite um 8 Uhr von Köln nach Mainz ab. Die Fahrzeit des zweiten Dampfers betrug 2 Stunden mehr als die des ersten. Wann kam der erste Dampfer in Köln an, wenn er dem zweiten um 11 Uhr 40 Minuten begegnete?

c) Um einen Behälter zu füllen, braucht die erste von zwei Röhren 15 Minuten mehr als die zweite. Wird die zweite 11 Minuten nach der ersten geöffnet, so vergehen noch

1. 21 Minuten, bis der Behälter gefüllt ist.
2. 4 „ „ $\frac{4}{15}$ des Behälters gefüllt sind.

Wie viel Minuten braucht die erste Röhre, um den Behälter zu füllen?

d) Bei einem Rennen wurde der Radfahrer A von B nach 506 Sekunden zum ersten Male überrundet, obschon er 6 Sekunden vor ihm abfahren durfte. In wie viel Sekunden legte A die Bahn zurück, wenn er dazu 4 Sekunden mehr als B nötig hatte?

e) Von zwei Röhren braucht die erste, um einen Behälter zu füllen, 10 Minuten weniger als die zweite, um ihn zu leeren. Wird die zweite 5 Minuten nach der ersten geöffnet, so vergehen weitere

1. 45 Minuten, bis der Behälter gefüllt ist.
2. 9 „ „ $\frac{2}{5}$ des Behälters gefüllt sind.

Wie viel Minuten braucht die erste Röhre, um den Behälter zu füllen?

45. a*) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper (Punkte) mit derselben Geschwindigkeit vom Scheitel fort. Wie groß ist diese, wenn der erste seine Bewegung 3 Sekunden nach dem zweiten beginnt und nach 9 Sekunden von ihm 60 cm entfernt ist?

b) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegten sich zwei Punkte mit derselben Geschwindigkeit vom Scheitel fort. Der erste, der bereits 15 cm vom Scheitel entfernt war, begann seine Bewegung 3 Sekunden nach dem zweiten, der sich vorher in einer Entfernung von 10 cm vom Scheitel befand, und hatte nach 3 Sekunden von ihm einen Abstand von 50 cm. Wie groß war die Geschwindigkeit der beiden Körper?

c) Wenn unter den Voraussetzungen der Aufgabe b der erste Punkt sich nach dem Scheitel hin und der zweite sich von diesem fortbewegte und die Entfernung der beiden Punkte nach der Bewegung 20 cm betrug, wie groß war dann ihre Geschwindigkeit?

46. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Punkte aus den Entfernungen a_1 und a_2 cm mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 cm nach dem Scheitel hin und sind am Schluß der Bewegung e cm von einander entfernt.

a) Wie viel Sekunden dauert die Bewegung für

1. $a_1 = 40$, $a_2 = 72$, $v_1 = 5$, $v_2 = 8$ und $e = 26$?
2. $a_1 = 30$, $a_2 = 20$, $v_1 = 11$, $v_2 = 7$ „ $e = 10$?
3. $a_1 = 63$, $a_2 = 134$, $v_1 = 15$, $v_2 = 18$ „ $e = 82$?

b) Wie lange dauert für $a_1 = 32$, $a_2 = 37$, $v_1 = 3$ und $v_2 = 4$ die Bewegung, wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 14$ cm und $r_2 = 15$ cm sind, bis sich die beiden Kreise von außen berühren?

c) Wie lange dauert für $a_1 = 42$, $a_2 = 41$, $v_1 = 5$ und $v_2 = 6$ die Bewegung, wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 27$ cm und $r_2 = 14$ cm sind, bis sich die beiden Kreise von innen berühren?

d) Wie viel Sekunden bewegt sich für $a_1 = 32$, $a_2 = 44$, $v_1 = 5$, $v_2 = 4$ und $e = 20$ der erste Punkt, wenn er seine Bewegung 3 Sekunden später als der zweite beginnt?

e) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 3$ cm sind und der erste seine Bewegung 2 Sekunden früher als der zweite beginnt, wie lange muß sich dann

für $a_1 = 38$, $a_2 = 28$, $v_1 = 7$ und $v_2 = 8$ der zweite bewegen, bis sich die Kreise von außen berühren?

f) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 18$ cm und $r_2 = 13$ cm sind und der erste seine Bewegung 3 Sekunden früher als der zweite beginnt, wie lange muß sich dann für $a_1 = 39$, $a_2 = 34$, $v_1 = 4$ und $v_2 = 5$ der zweite bewegen, bis sich die Kreise von innen berühren?

47. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in den Aufgaben 51 bewegen sich beide Punkte vom Scheitel weiter fort.

a*) Wie lange dauert die Bewegung für $a_1 = a_2 = 0$, $v_1 = 6$, $v_2 = 8$ und $e = 50$?

b) Wie lange dauert die Bewegung für

1. $a_1 = 12$, $a_2 = 42$, $v_1 = 3$, $v_2 = 7$ und $e = 74$?
2. $a_1 = 33$, $a_2 = 15$, $v_1 = 4$, $v_2 = 3$ „ $e = 51$?
3. $a_1 = 5$, $a_2 = 14$, $v_1 = 5$, $v_2 = 4$ „ $e = 58$?

c) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 45$ cm und $r_2 = 16$ cm sind, wie lange dauert dann für $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $v_1 = 4\frac{1}{2}$ und $v_2 = 3\frac{1}{4}$ die Bewegung, bis sich die Kreise von innen berühren?

d) Wie viel Sekunden bewegt sich für $a_1 = 5$, $a_2 = 30$, $v_1 = 5$, $v_2 = 9$ und $e = 85$ der erste Punkt, wenn er seine Bewegung 2 Sekunden früher als der zweite beginnt?

e) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 31$ cm und $r_2 = 27$ cm sind und der erste seine Bewegung 3 Sekunden früher als der zweite beginnt, wie lange muß sich dann für $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, $v_1 = 4$ und $v_2 = 7$ der zweite bewegen, bis sich die Kreise von außen berühren?

48. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in den Aufgaben 51 bewegt sich der erste Punkt nach dem Scheitel hin und der zweite vom Scheitel weiter fort.

a) Wie lange dauert die Bewegung für

1. $a_1 = 31$, $a_2 = 24$, $v_1 = 5$, $v_2 = 9$ und $e = 61$?
2. $a_1 = 36$, $a_2 = 7$, $v_1 = 3$, $v_2 = 11$ „ $e = 75$?
3. $a_1 = 33$, $a_2 = 10$, $v_1 = 4$, $v_2 = 5$ „ $e = 41$?

b) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 23$ cm und $r_2 = 18$ cm sind, wie lange dauert dann für $a_1 = 30$, $a_2 = 28$, $v_1 = 7$ und $v_2 = 4$ die Bewegung, bis sich die Kreise von außen berühren?

c) Wie viel Sekunden bewegt sich für $a_1 = 48$, $a_2 = 14$, $v_1 = 4$ $v_2 = 7$ und $e = 74$ der erste Punkt, wenn er seine Bewegung 2 Sekunden später als der zweite beginnt?

d) Wenn die Punkte die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 19$ cm und $r_2 = 15$ cm sind und der erste sich 3 Se-

kunden später als der zweite zu bewegen beginnt, wie lange dauert dann für $a_1 = 46$, $a_2 = 12$, $v_1 = 6$ und $v_2 = 9$ die Bewegung des Mittelpunktes, bis sich die Kreise von außen berühren?

c. Prozentrechnung.

49. a) Ein Kapital von $a\,\mathcal{M}$ bringt $z\,\mathcal{M}$ Zinsen, wenn die Anzahl der Jahre um d größer ist als der Zinsfuß, zu dem es aussteht. Wie lange ist das Kapital ausgeliehen?

Beispiele. 1. $a = 5400$, $d = 2$, $z = 1296$.
2. $a = 675$, $d = 1\frac{1}{3}$, $z = 144$.
3. $a = 840$, $d = 4\frac{1}{2}$, $z = 189$.

b) Ein Kapital von $a\,\mathcal{M}$ brachte $z\,\mathcal{M}$ Zinsen und würde ebenso viel Zinsen gebracht haben, wenn es $d_1\,\%$ weniger getragen, aber d_2 Jahre länger ausgestanden hätte. Zu wieviel % war das Kapital ausgeliehen?

Beispiele. 1. $a = 2100$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $z = 420$.
2. $a = 650$, $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, $z = 156$.
3. $a = 800$, $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{2}$, $z = 180$.

c) Zwei Kapitalien, die sich um $d_1\,\mathcal{M}$ unterschieden, brachten beide zu $p\,\%$ $z\,\mathcal{M}$ Zinsen, da das kleinere Kapital d_2 Jahre länger ausstand als das größere. Wie lange war das größere Kapital ausgeliehen?

Beispiele. 1. $d_1 = 300$, $d_2 = 1$, $p = 4$, $z = 240$.
2. $d_1 = 375$, $d_2 = 3$, $p = 4\frac{1}{2}$, $z = 225$.
3. $d_1 = 600$, $d_2 = 2$, $p = 4\frac{2}{3}$, $z = 336$.

d) Von zwei Kapitalien, von denen das erste um $d_1\,\mathcal{M}$ kleiner war, aber $d_2\,\%$ Zinsen mehr brachte als das zweite, trug das erste in n_1 Jahren $z_1\,\mathcal{M}$ und das zweite in n_2 Jahren $z_2\,\mathcal{M}$ Zinsen. Wie groß war das erste Kapital?

Beispiele. 1. $d_1 = 600$, $d_2 = 1$, $n_1 = 6$, $n_2 = 5$, $z_1 = 900$, $z_2 = 720$.
2. $d_1 = 200$, $d_2 = \frac{3}{4}$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $z_1 = 304$, $z_2 = 216$.
3. $d_1 = 150$, $d_2 = \frac{2}{3}$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$, $z_1 = 350$, $z_2 = 462$.

e) Zwei um $d\,\mathcal{M}$ voneinander verschiedene Kapitalien wuchsen beide zu $p\,\%$ auf $k\,\mathcal{M}$ an, da das kleinere Kapital n Jahre länger ausgeliehen war als das andere. Wie lange war das größere Kapital ausgeliehen?

Beispiele. 1. $d = 200$, $k = 3596$, $n = 2$, $p = 4$.
2. $d = 270$, $k = 3332$, $n = 3$, $p = 4\frac{1}{2}$.
3. $d = 120$, $k = 1725$, $n = 2\frac{2}{3}$, $p = 3\frac{5}{4}$.

f) Zwei Kapitalien, von denen das erste um $d_1\,\mathcal{M}$ kleiner war, aber $d_2\,\%$ Zinsen mehr brachte als das zweite, wuchs das erste in n_1 Jahren auf k_1 und das zweite in n_2 Jahren auf $k_2\,\mathcal{M}$ an. Wie groß war das erste Kapital?

Beispiel. 1. $d_1 = 300$, $d_2 = 1$, $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $k_1 = 625$, $k_2 = 992$.
2. $d_1 = 250$, $d_2 = 1\frac{1}{2}$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $k_1 = 930$, $k_2 = 1135$.
3. $d_1 = 350$, $d_2 = 1\frac{1}{4}$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $k_1 = 1500$, $k_2 = 1900$.

50. a) Ein Kaufmann hatte einen Posten Ware mit einem Gewinn von a ℳ verkauft. Für den Erlös kaufte er einen zweiten Posten Ware, an dem er beim Verkaufe b ℳ verdiente. Wie viel ℳ hatte er für den ersten Posten gegeben, wenn er an diesem d% weniger verdiente als am zweiten?

Beispiele. 1. $a = 120$, $b = 162$, $d = 2$.
2. $a = 30$, $b = 43$, $d = 2\frac{1}{2}$.
3. $a = 115$, $b = 257{,}6$, $d = 5\frac{2}{3}$.

b) Ein Kaufmann hatte einen Posten Ware mit einem Gewinn von a ℳ verkauft. Für den Erlös kaufte er einen zweiten Posten Ware, den er für b ℳ wieder verkaufte. Dabei verdiente er d% mehr als an dem ersten Posten. Wie viel ℳ hatte er für diesen bezahlt?

Beispiele. 1. $a = 80$, $b = 968$, $d = 0$.
2. $a = 36$, $b = 534{,}6$, $d = 2$.
3. $a = 136$, $b = 1683$, $d = 2\frac{1}{2}$.

c) Ein Kaufmann mußte einen Posten Ware, für den er a ℳ gegeben hatte, mit Verlust verkaufen. Für den ganzen Erlös kaufte er einen zweiten Posten Ware, bei dessen Verkauf er d% mehr verdiente, als er an dem ersten Posten verloren hatte. Wie viel ℳ verlor er an diesem, wenn er im ganzen b ℳ verdiente?

Beispiele. 1. $a = 420$, $b = 18{,}9$, $d = 5$.
2. $a = 275$, $b = 28{,}6$, $d = 12$.
3. $a = 850$, $b = 17$, $d = 2\frac{1}{4}$.

d) Ein Rentner war an einem Unternehmen mit einer Einlage von a ℳ beteiligt. Von dem Gewinn des ersten Jahres hob er nur b ℳ ab. Im zweiten Jahre, in dem ebensoviel % verdient wurden wie im ersten, betrug sein Gewinnanteil d ℳ mehr als im ersten Jahre. Wie viel % wurden in jedem Jahre verdient?

Beispiele. 1. $a = 60000$, $b = 2200$, $d = 140$.
2. $a = 75000$, $b = 3500$, $d = 60$.
3. $a = 42000$, $b = 1510$, $d = 44$.

e) Zwei Kaufleute verdienten bei einem Geschäft, zu dem der erste d ℳ mehr gegeben hatte als der zweite, zusammen a ℳ. Wie viel ℳ hatte der erste zu dem Geschäft gegeben, wenn er im ganzen b ℳ zurückerhielt?

Beispiele. 1. $a = 660$, $b = 3960$, $d = 600$.
2. $a = 960$, $b = 4760$, $d = 500$.
3. $a = 507$, $b = 2070$, $d = 220$.

f) Von zwei Kaufleuten, die zusammen in einem Geschäft a ℳ angelegt hatten, erhielt der erste nach n_1 Monaten b_1 ℳ und der zweite nach n_2 Monaten b_2 ℳ zurück. Wie viel ℳ hatte der erste eingelegt?

Beispiele. 1. $a = 5000$, $b_1 = 2544$, $b_2 = 2860$, $n_1 = 9$, $n_2 = 15$.
2. $a = 2600$, $b_1 = 1284$, $b_2 = 1554$, $n_1 = 7$, $n_2 = 11$.
3. $a = 2350$, $b_1 = 1134$, $b_2 = 1417$, $n_1 = 8$, $n_2 = 9$.

51. a) Bei jedem von zwei Posten Ware, von denen der erste a ℳ mehr kosten sollte als der zweite, wurden r ℳ Rabatt bewilligt. Wie teuer sollte der erste Posten sein, wenn bei ihm der Rabatt d% weniger als beim zweiten betrug?

Beispiele. 1. $a = 100$, $d = 2$, $r = 40$.
2. $a = 30$, $d = 1\frac{2}{3}$, $r = 6$.
3. $a = 50$, $d = 2\frac{1}{2}$, $r = 10{,}2$.

b) Der erste von zwei Posten Ware, der a ℳ mehr als der zweite kosten sollte, wurde mit b ℳ bezahlt, während bei dem zweiten der Rabatt r ℳ betrug. Wie viel ℳ sollte die erste Ware kosten, wenn bei ihr d% Rabatt mehr bewilligt wurden als bei der zweiten?

Beispiele. 1. $a = 50$, $b = 270$, $d = 2$, $r = 20$.
2. $a = 45$, $b = 253$, $d = 3$, $r = 11\frac{1}{2}$.
3. $a = 75$, $b = 367{,}5$, $d = 4\frac{1}{2}$, $r = 27{,}6$.

c) Zwei Posten Ware, von denen der erste a ℳ mehr kosten sollte als der zweite, wurden beide mit je b ℳ bar bezahlt, da beim ersten d% Rabatt mehr als beim zweiten bewilligt wurden. Wie viel ℳ sollte die erste Ware kosten?

Beispiele. 1. $a = 10$, $b = 451{,}2$, $d = 2$.
2. $a = 30$, $b = 874$, $d = 3$.
3. $a = 25$, $b = 506$, $d = 4$.

d) Von zwei Posten Ware, von denen der erste a ℳ mehr als der zweite kosten sollte, wurde der erste mit b_1 und der zweite mit b_2 ℳ bar bezahlt. Wie viel ℳ sollte die erste Ware kosten, wenn bei ihr d% Rabatt weniger bewilligt wurden als bei der zweiten?

Beispiele. 1. $a = 25$, $b_1 = 264$, $b_2 = 235$, $d = 2$.
2. $a = 40$, $b_1 = 323$, $b_2 = 281$, $d = 1\frac{1}{3}$.
3. $a = 80$, $b_1 = 386$, $b_2 = 304$, $d = 1\frac{1}{2}$.

52. a) Ein Wechsel von a ℳ wird für b ℳ verkauft, wenn d% Diskont weniger gerechnet werden, als die Anzahl der Monate beträgt, die er noch zu laufen hat. Wie viel % Diskont werden berechnet?

Beispiele. 1. $a = 400$, $b = 384$, $d = 2$.
2. $a = 1500$, $b = 1470$, $d = 2$.
3. $a = 1200$, $b = 1168\frac{1}{2}$, $d = 2\frac{1}{2}$.

b) Zwei Wechsel, von denen der erste d_1 ℳ mehr beträgt und

d_2 Monate länger zu laufen hat als der zweite, werden unter der Berechnung vom p% Diskont für b_1 ℳ, bez. für b_2 ℳ verkauft. Auf welche Summe lautet der erste Wechsel?

Beispiele. 1. $b_1 = 2037$, $b_2 = 1758$, $d_1 = 300$, $d_2 = 2$, $p = 4$.
2. $b_1 = 1155$, $b_2 = 819$, $d_1 = 360$, $d_2 = 4$, $p = 3\frac{3}{4}$.
3. $b_1 = 1344$, $b_2 = 1215$, $d_1 = 150$, $d_2 = 3$, $p = 4\frac{4}{5}$.

c) Von zwei Wechseln über a_1 ℳ und a_2 ℳ, von denen der erste d_1 Monate länger als der zweite zu laufen hat, wird der erste für b_1 ℳ und der zweite für b_2 ℳ verkauft. Nach wie viel Monaten ist der erste Wechsel fällig, wenn bei ihm d_2% Diskont mehr berechnet werden als beim zweiten?

Beispiele. 1. $a_1 = 600, a_2 = 750, b_1 = 575, b_2 = 735, d_1 = 4, d_2 = 1$.
2. $a_1 = 800, a_2 = 900, b_1 = 768, b_2 = 885, d_1 = 3, d_2 = 2$.
3. $a_1 = 3000, a_2 = 2400, b_1 = 2865, b_2 = 2337, d_1 = 2, d_2 = 1\frac{1}{2}$.

d. Aufgaben aus der Planimetrie.*)

53. Seiten, Diagonalen und Winkel des Vielecks.

a) Wie groß ist die Anzahl der Punkte, zwischen denen n Verbindungslinien möglich sind, wenn nicht mehr als zwei von ihnen in einer Geraden liegen?

Beispiele. 1. $n = 78$. 2. $n = 171$. 3. $n = 300$.

b) Welches Vieleck hat n Diagonalen?

Beispiele. 1. $n = 104$. 2. $n = 189$. 3. $n = 405$.

c) In welchem Vieleck ist die Anzahl der Diagonalen um d größer als die Anzahl der Seiten?

Beispiele. 1. $d = 33$. 2. $d = 63$. 3. $d = 133$.

d) In welchem Vieleck wird die Anzahl der Diagonalen um d größer, wenn die Anzahl der Seiten auf ihr $n$faches gebracht wird?

Beispiele. 1. $d = 45$, $n = 2$. 2. $d = 85$, $n = 3$.

e) Die Anzahl der Seiten eines Vielecks verhält sich zu der Seitenzahl eines zweiten wie 3 : 4 und das zweite hat 80 Diagonalen mehr als das erste. Wie viel Seiten hat das erste Vieleck?

f) Von zwei Vielecken hat das erste 6 Seiten mehr als das zweite und $3\frac{1}{5}$mal so viel Diagonalen wie dieses. Wie viel Seiten hat das erste Vieleck?

g) Vermehrt man in einem Vieleck die Anzahl der Seiten um die Anzahl der Rechten, die seine Winkelsumme beträgt, so erhält man die um d verminderte Anzahl seiner Diagonalen. Wie viel Seiten hat das Vieleck?

Beispiele. 1. $d = 0$, 2. $d = 9$. $d = 49$.

---

*) Die hierher gehörigen Aufgaben aus der Stereometrie stehen in Kapitel 9 und sind dort durch einen Stern (*) kenntlich gemacht.

h) Vergrößert man die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks um d_1, so nimmt jeder Vieleckswinkel um $d_2{}^0$ zu. Wie viel Seiten hat das Vieleck?

Beispiele. 1. $d_1 = 10$, $d_2 = 3$. 2. $d_1 = 5$, $d_2 = 1$.

i) Vergrößert man die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks um d_1, so nimmt jeder Außenwinkel um $d_2{}^0$ ab. Wie viel Seiten hat das Vieleck?

Beispiele. 1. $d_1 = 5$, $d_2 = 6$. 2. $d_1 = 6$, $d_2 = 2$.

54. Seite und Inhalt des **Quadrates.**

a) Verlängert man jede Seite eines Quadrates um d cm, so wird der Inhalt des neuen Quadrates $n$mal so groß wie der Inhalt des ursprünglichen. Wie groß ist dessen Seite?

Beispiele. 1. $d = 3$, $n = 2\frac{1}{4}$. 2. $d = 2$, $n = 1\frac{9}{16}$.

b) Die Inhalte zweier Quadrate, deren Seiten sich um d cm unterscheiden, betragen zusammen n qcm. Wie groß ist die Seite des kleineren Quadrates?

Beispiele. 1. $d = 5$, $n = 193$. 2. $d = 2\frac{1}{3}$, $n = 87\frac{2}{9}$.

c) Bei zwei Quadraten beträgt die Summe der Umfänge a cm und die Summe der Inhalte n qcm. Wie groß ist die Seite des kleineren Quadrates?

Beispiele. 1. $a = 240$, $n = 2522$. 2. $a = 440$, $n = 6338$.

d*) Teilt man die Seiten eines Quadrates in derselben Richtung so, daß ihre Abschnitte sich um 1 cm unterscheiden, so ist der Inhalt des durch die 4 Teilpunkte bestimmten Quadrates um 112 qcm kleiner als der Inhalt des gegebenen Quadrates. Wie groß ist dessen Seite?

e*) Die Seiten eines Quadrates, dessen Seite 24 cm lang ist, sind in derselben Richtung so geteilt, daß ihre Abschnitte sich um dieselbe Strecke unterscheiden. Wie groß ist diese, wenn der Inhalt des durch die 4 Teilpunkte bestimmten Quadrates 306 qcm beträgt?

f*) Die Seiten eines Quadrates sind von zwei gegenüberliegenden liegenden Ecken aus so geteilt, daß die von diesen Ecken ausgehenden Abschnitte jedesmal um 4 cm größer sind als die anderen. Wie groß ist die Seite des Quadrates, wenn sein Inhalt um 193 qcm größer ist als der Inhalt des durch die 4 Teilpunkte bestimmten Rechtecks?

g*) Die Seiten eines Quadrates mit einem Umfang von 84 cm werden gleichmäßig von zwei gegenüberliegenden Ecken aus geteilt. Um wieviel cm unterscheiden sich die Abschnitte einer Seite, wenn das durch die 4 Teilpunkte bestimmte Rechteck einen Inhalt von 216 qcm besitzt?

55. Die Seiten des **rechtwinkligen Dreiecks.**

a*) In einem rechtw. Dreieck mit einem Inhalt von J qcm verhalten sich die Katheten wie $p : q$. Wie groß ist die kleinere von ihnen?

Beispiele. 1. $J = 150$, $p : q = 3 : 4$. 2. $J = 270$, $p : q = 5 : 12$.

b) Wie groß sind die Katheten eines rechtw. Dreiecks mit einem Inhalt von J qcm, wenn sie sich um d cm unterscheiden?

Beispiele. 1. $J=84$, $d=17$. 2. $J=540$, $d=21$. 3. $J=720$, $d=62$.

c) Wie groß sind die Katheten eines rechtw. Dreiecks mit einem Inhalt von J qcm, wenn ihre Summe gleich l cm ist?

Beispiele. 1. $J=60$, $l=23$. 2. $J=210$, $l=41$. 3. $J=330$, $l=71$.

d*) In einem rechtw. Dreieck, dessen Katheten sich wie 7 : 24 verhalten, ist die Hypotenuse 75 cm lang. Wie groß sind die Katheten?

e*) Wie groß sind die Katheten eines rechtw. Dreiecks mit einem Inhalt von 120 qcm, wenn seine Hypotenuse 26 cm lang ist?

f) In einem rechtw. Dreieck mit einer Hypotenuse von c cm Länge unterscheiden sich die Katheten um d cm. Wie groß sind die Katheten?

Beispiele. 1. $c=39$, $d=21$. 2. $c=25$, $d=5$. 3. $c=102$, $d=42$.

g) In einem rechtw. Dreieck mit einer Hypotenuse von c cm Länge ist die Summe der beiden Katheten gleich l cm. Wie groß ist die kleinere Kathete?

Beispiele. 1. $c=17$, $l=23$. 2. $c=29$, $l=41$. 3. $c=53$, $l=73$.

h) In einem rechtw. Dreieck ist die Hypotenuse um 11 cm und die größere Kathete um 10 größer als das Doppelte der kleineren Kathete. Wie groß ist diese?

i†) In einem rechtw. Dreieck mit einem Umfang von u cm verhalten sich die Katheten wie $p : q$. Wie groß ist die kleinere von ihnen?

Beispiele. 1. $u=120$, $p:q=8:15$. 2. $u=280$, $p:q=20:21$.
3. $u=120$, $p:q=5:12$. 4. $u=392$, $p:q=7:24$.

k) In einem rechtw. Dreieck ist eine Kathete a cm und die Projektion der anderen auf die Hypotenuse q cm lang. Wie groß ist die Hypotenuse?

Beispiele. 1. $a=35$, $q=24$. 2. $a=4{,}5$, $q=4{,}8$. 3. $a=7\frac{1}{2}$, $q=9\frac{1}{3}$.

l) In einem rechtw. Dreieck ist die kleinere Kathete a cm lang und die Hypotenusenabschnitte unterscheiden sich um d cm. Wie groß ist die Hypotenuse?

Beispiele. 1. $a=35$, $d=1$. 2. $a=42$, $d=98$. 3. $a=51$, $d=1{,}5$.

m) In einem rechtw. Dreieck ist die Hypotenusenhöhe h cm lang und die Hypotenusenabschnitte unterscheiden sich um d cm. Wie groß ist die Hypotenuse?

Beispiele. 1. $h=21$, $d=56$. 2. $h=32$, $d=48$. 3. $h=54$, $d=81$.

n) In einem rechtw. Dreieck ist die Hypotenuse c cm und die Hypotenusenhöhe h cm lang. Wie groß sind die beiden Katheten?

Beispiele. 1. $c=25$, $h=12$. 2. $c=169$, $h=60$. 3. $c=65$, $h=31{,}2$.

---

†) Die Aufgabe i) kann auch durch eine Gleichung ersten Grades aufgelöst werden.

56. a) In einem **gleichschenkligen Dreieck** ist die Grundlinie um d_1 und jeder Schenkel um d_2 cm größer als die Höhe. Wie groß ist die Grundlinie?

Beispiele. 1. $d_1 = 19$, $d_2 = 8$. 2. $d_1 = 22$, $d_2 = 9$.

b) In einem gleichschenkl. Dreieck mit einem Umfang von u cm ist die zur Grundlinie gehörige Höhe um d cm kleiner als der Schenkel. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

Beispiele. 1. $u = 50$, $d = 2$. 2. $u = 98$, $d = 8$.
3. $u = 144$, $d = 25$. 4. $u = 242$, $d = 18$.

c) Wie groß ist die Grundlinie eines gleichschenkl. Dreiecks mit einem Inhalt von J qcm, wenn jeder Schenkel eine Länge von b cm besitzt?

Beispiele. 1. $J = 60$, $b = 13$. 2. $J = 168$, $b = 25$.
3. $J = 420$, $b = 29$. 4. $J = 660$, $b = 61$.

57. Seiten, Diagonale und Inhalt des **Rechtecks.**

a) In einem Rechteck mit einem Inhalt von 192 qcm unterscheiden sich die anstoßenden Seiten um 4 cm. Wie groß sind die Seiten?

b) Wie groß sind die Seiten in einem Rechteck mit einem Umfang von 40 cm und einem Inhalt von 91 qcm?

c) Eine Strecke von 80 cm ist innerlich so zu teilen, daß das Rechteck aus den Teilstrecken gleich 576 qcm wird. Wie groß muß die kleinere Teilstrecke werden?

d) Eine Strecke von 25 cm ist äußerlich so geteilt, daß das Rechteck aus den Teilstrecken gleich 306 qcm ist. Welche Länge besitzt der äußere Abschnitt?

e) In ein Rechteck mit den Seiten a cm und b cm ist ein zweites Rechteck gezeichnet, dessen Seiten von den Seiten des ersten gleich weit abstehen und dessen Inhalt $n$mal so groß ist wie der Inhalt des ersten Rechtecks. Wie groß sind seine Seiten?

Beispiele. 1. $a = 56$, $b = 33$, $n = \frac{1}{2}$. 2. $a = 84$, $b = 60$, $n = \frac{3}{7}$.

f) Um ein Rechteck mit den Seiten a cm und b cm ist ein zweites Rechteck gezeichnet, dessen Seiten von den Seiten des ersten gleich weit abstehen und dessen Inhalt $n$mal so groß ist wie der Inhalt des ersten Rechtecks. Wie groß sind seine Seiten?

Beispiele. 1. $a = 6$, $b = 8$, $n = 4\frac{2}{3}$. 2. $a = 56$, $b = 35$, $n = 1\frac{3}{4}$.

g*) Zwei Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie 3 : 4 und die Quadrate ihrer Diagonalen unterscheiden sich um 252 qcm. Wie groß sind die beiden Grundlinien?

h*) Zwei Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie 4 : 7 und die Quadrate ihrer Diagonalen unterscheiden sich um 297 qcm. Wie groß sind die beiden Höhen?

i) Zwei Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie 2 : 5. Ihre

Inhalte unterscheiden sich um 72 qcm und die Summe der Quadrate ihrer Diagonalen beträgt 389 qcm. Wie groß sind die beiden Grundlinien?

k) Zwei Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie 9:16 und ihre Inhalte betragen zusammen 1200 qcm. Wie groß sind die beiden Höhen, wenn die Diagonalen der Rechtecke sich wie 3:4 verhalten?

58. Seite, Diagonalen und Inhalt des **Rhombus.**

a) In einem Rhombus mit der Seite a cm unterscheiden sich die beiden Diagonalen um d cm. Wie groß ist die kleinere Diagonale?

Beispiele. 1. $a=17$, $d=14$. 2. $a=25$, $d=34$. 3. $a=61$, $d=98$.

b) In einem Rhombus mit der Seite a cm ist die Summe der beiden Diagonalen gleich l cm. Wie groß ist die kleinere Diagonale?

Beispiele. 1. $a=35$, $l=98$. 2. $a=53$, $l=146$. 3. $a=65$, $l=182$.

c) In einem Rhombus mit einem Inhalt von 1176 qcm unterscheiden sich die Diagonalen um 14 cm. Wie groß ist die kleinere Diagonale?

d) In einem Rhombus mit einem Inhalt von 266 qcm ist die Summe der Diagonalen gleich 47 cm. Wie groß ist die kleinere Diagonale?

e) Ein Rhombus mit einer Seite von 15 cm Länge hat einen Inhalt von 216 qcm. Wie groß ist die kleinere Diagonale?

f) Ein Rhombus hat einen Inhalt von 546 qcm und der Umfang des Rechtecks, dessen Ecken die Seitenmitten des Rhombus sind, beträgt 68 cm. Wie groß ist die kleinere Diagonale des Rhombus?

g) Die Seite des Rhombus, dessen Ecken die Seitenmitten eines Rechtecks mit einem Umfang von 124 cm sind, ist 25 cm lang. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

59. **Das schiefwinklige ungleichseitige Dreieck.**

a) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 170 qcm ist die Summe aus einer Seite und der zu ihr gehörigen Höhe gleich 37 cm. Wie groß ist die Seite?

b) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 247 qcm ist eine Seite um 7 cm kleiner als die zu ihr gehörige Höhe. Wie groß ist die Seite?

c) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 600 qcm ist die Summe zweier Seiten gleich 95 cm und die Summe der zu ihnen gehörigen Höhen gleich 76 cm. Wie groß sind die beiden Seiten?

d) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 1680 qcm ist die Summe zweier Seiten gleich 152 cm und die zu ihnen gehörigen Höhen unterscheiden sich um 25 cm. Wie groß sind die beiden Seiten?

e) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 61,2 qcm unter-

scheiden sich zwei Seiten um 5 cm und die zu ihnen gehörigen Höhen um 3 cm. Wie groß sind die beiden Seiten?

f) Zwei Seiten eines Dreiecks unterscheiden sich um 6 cm. Verlängert man die kleinere um 2 cm und die größere um 1 cm (ohne den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu ändern), so wächst der Inhalt des Dreiecks um den 5ten Teil seiner Größe. Welche Länge besitzen die beiden Seiten?

g) Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks beträgt 44 cm. Verlängert man beide um 1 cm, so wächst der Inhalt des Dreiecks um den 7ten Teil seiner Größe. Wie lang sind die beiden Seiten?

h) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 180 qcm ist eine Seite gleich 30 cm und die Summe der beiden anderen Seiten gleich 50 cm. Wie groß ist jede von ihnen?

i) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 456 qcm ist eine Seite gleich 25 cm und die beiden anderen unterscheiden sich um 13 cm. Wie groß ist jede von diesen Seiten?

k) In einem Dreieck mit einem Inhalt von 240 qcm und einem Umfang von 90 cm ist eine Seite um 10 cm kleiner als die Summe der beiden anderen. Wie groß sind die drei Seiten?

l) In einem Dreieck ist eine Seite gleich 16 cm, die zu ihr gehörige Mittellinie gleich 9 cm und die Differenz der beiden anderen Seiten gleich 2 cm. Wie groß ist die kleinere von diesen?

m) In einem Dreieck ist eine Seite 14 cm, die zu ihr gehörige Mittellinie 4 cm und die Summe der beiden anderen Seiten 16 cm lang. Wie groß ist jede von diesen?

n) Der Berührungspunkt eines eingeschriebenen Kreises teilt eine Dreiecksseite in zwei Abschnitte von 11 cm und 33 cm Länge. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks, wenn sein Inhalt 264 qcm beträgt?

o) In einem Dreieck ist eine Seite 408 cm und die Summe der beiden anderen 442 cm lang. Wie groß ist jede von diesen, wenn der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises eine Länge von 19,2 cm besitzt?

p) In einem Dreieck ist eine Seite 75 cm und der Halbmesser des zu ihr gehörigen äußeren Berührungskreises 70 cm lang. Wie groß sind die beiden anderen Seiten, wenn sie sich um 5 cm unterscheiden?

60. Die Linien beim Kreise.

a) In einem Kreise mit dem Halbmesser r cm ist eine Sehne um d cm größer als ihr Abstand vom Mittelpunkte. Wie groß ist die Sehne?

Beispiele. 1. $r = 17$, $d = 1$. 2. $r = 40$, $d = 16$.
3. $r = 25$, $d = -10$.

b) Eine Sehne eines Kreises, welche d_1 cm vom Mittelpunkte absteht, ist um d_2 cm größer als der Halbmesser. Wie groß ist die Sehne?

Beispiele. 1. $d_1 = 5$, $d_2 = 11$. 2. $d_1 = 9$, $d_2 = 39$.
3. $d_1 = 63$, $d_2 = 33$.

c) In einem Kreise wird eine Sehne von 36 cm Länge durch eine zweite Sehne von 85 cm halbiert. Wie groß sind die Abschnitte der zweiten Sehne?

d) In einem Kreise wird eine Sehne von 30 cm Länge durch eine zweite Sehne halbiert. Wie groß ist diese, wenn der eine ihrer Abschnitte um 2 cm kleiner als das 3fache des anderen ist?

e*) An einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 40$ cm sind zwei Tangenten gezogen, deren Berührungssehne $l = 48$ cm lang ist. Wie groß sind die beiden Tangenten (ihre Abschnitte zwischen ihrem Schnittpunkte und den Berührungspunkten)?

f) Eine Tangente an einen Kreis, deren Ausgangspunkt vom Mittelpunkte 61 cm abliegt, ist 49 cm größer als der Halbmesser. Wie groß ist dieser?

g) Eine Tangente, deren Ausgangspunkt (auf seiner Durchmesserssekante) vom Kreise 14 cm entfernt ist, übertrifft den Halbmesser an Länge um 7 cm. Wie groß ist der Halbmesser?

h) Die Berührungssehne zweier Tangenten, deren Ausgangspunkt vom Mittelpunkte des Kreises 25 cm abliegt, ist 24 cm lang. Wie groß ist der Halbmesser?

i) Durch den Ausgangspunkt einer Tangente von 18 cm Länge ist eine Sekante gezogen. Wie groß ist diese, wenn die zu ihr gehörige Sehne eine Länge von 27 cm besitzt?

k) Durch den Ausgangspunkt einer Tangente von 40 cm Länge ist eine Sekante gezogen, deren äußerer Abschnitt um 184 cm kleiner ist als die zu ihr gehörige Sehne. Wie groß ist die Sekante?

l) Bei zwei sich von außen berührenden Kreisen ist die Mittelpunktslinie 35 cm lang. Wie groß sind die beiden Halbmesser, wenn die Inhalte der Kreise zusammen $625\,\pi$ qcm betragen?

m) Bei zwei sich von innen berührenden Kreisen ist die Mittelpunktslinie 8 cm lang und die Summe aus ihren Inhalten beträgt $544\,\pi$ qcm. Wie groß sind die beiden Halbmesser?

e. Aufgaben aus der Physik.

61. Freier Fall und senkrechter Wurf.†)

a*) Welche Zeit braucht ein Stein, um bis auf den Boden eines 44,1 m tiefen Brunnens zu fallen?

†) Die Größe der Schwerkraft ist bei diesen Aufgaben gleich 9,8 m zu nehmen und der Einfluß des Luftwiderstandes unberücksichtigt zu lassen. Die benutzten Geschwindigkeiten beziehen sich auf die Sekunde.

b*) Welche Zeit braucht ein senkrecht in die Höhe geworfener Stein, um $122\frac{1}{2}$ m hoch zu steigen und dann wieder zur Erde zu fallen?

c*) Welche Anfangsgeschwindigkeit muß einem Stein erteilt werden, damit er $122\frac{1}{2}$ m senkrecht in die Höhe steigt?

d) Wie viel Sekunden braucht ein Stein, um den Boden eines a m tiefen (senkrechten) Schachtes zu erreichen, wenn er mit einer Anfangsgeschwindigkeit von c m in denselben geworfen wird?

Beispiele. 1. $a = 137{,}5$, $c = 3$. 2. $a = 212{,}4$ $c = 6$.
3. $a = 138{,}4$, $c = 15$.

e) Wann hat eine senkrecht in die Höhe geschossene Kugel eine Höhe von 1460 m erreicht, wenn sie mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 195 m abgeschossen wird?

f) Einen Stein, der in einen Schacht fällt, hört man nach 12 Sekunden aufschlagen. Wie viel Sekunden braucht der Schall, um aus der Tiefe heraufzukommen, wenn seine Geschwindigkeit 333 m beträgt?

g) Einen Stein, der in einen Schacht fällt, hört man nach 10 Sekunden aufschlagen. Wie tief ist der Schacht?

h) Einen Stein, der in einen Schacht mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m geworfen wurde, hörte man nach $6\frac{1}{3}$ Sekunden aufschlagen. Wie viel Sekunden brauchte der Schall, um aus der Tiefe heraufzukommen?

i) Einen Stein, der in einen Schacht mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 9 m geworfen wurde, hörte man nach $7\frac{1}{2}$ Sekunden aufschlagen. Wie tief ist der Schacht?

k) Eine Leuchtkugel, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 82,3 m senkrecht in die Höhe geworfen wurde, hörte man nach 11 Sekunden platzen. Wie hoch war sie gestiegen?

62. **Schiefer Wurf.** (Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene geworfen, so hat er am Ende der t^{ten} Sekunde die horizontale Entfernung $e = vt \cos \alpha$ und die Höhe $h = vt \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ erreicht.)

a*) Mit welcher Geschwindigkeit muß eine Kugel unter dem Winkel α abgeschossen werden, um in einer (horizontalen) Entfernung von e m eine h m hohe Stelle zu treffen?

Beispiele. 1. $\alpha = 45^0$, $e = 1024$, $h = 44$.
2. $\alpha = 30^0$, $e = 1500$, $h = 30$.
3. $\alpha = 25^0$, $e = 1600$, $h = 12$.

b) Eine Kugel wird unter dem Winkel α mit einer Geschwindigkeit von v m abgeschossen. Wann erreicht sie eine Höhe von h Meter?

Beispiele. 1. $\alpha = 30^0$, $v = 250$, $h = 522{,}5$.
2. $\alpha = 45^0$, $v = 275$, $h = 315$.
3. $\alpha = 23\frac{1}{2}^0$, $v = 300$, $h = 48$.

c*) Mit welcher Geschwindigkeit ist eine Kugel unter dem Winkel α abgeschossen worden, wenn sie in einer Entfernung von e m den Boden wieder erreicht hat?†)

Beispiele. 1. $\alpha = 15^0$, $e = 4410$. 2. $\alpha = 30^0$, $e = 3200$.

d*) Welche Anfangsgeschwindigkeit muß eine unter dem Winkel α abgeschossene Kugel erhalten, wenn ihre Wurfhöhe (die höchste Stelle ihrer Bahn) h m betragen soll?

Beispiele. 1. $\alpha = 30^0$, $h = 490$. 2. $\alpha = 45^0$, $h = 1531\frac{1}{4}$.

e*) Unter welchem Winkel muß eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von v m abgeschossen werden, wenn sie in einer Entfernung von e m den Boden wieder erreicht?

Beispiele. 1. $v = 245$, $e = 6125$. 2. $v = 275$, $e = 7500$.

f*) Unter welchem Winkel muß eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von v m abgeschossen werden, um eine Wurfhöhe von h m zu erreichen?

Beispiele. 1. $v = 196$, $h = 490$. 2. $v = 245$, $h = 1531\frac{1}{4}$.

63. **Schiefe Ebene.** (Hält auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α die Kraft P dem Gewicht Q das Gleichgewicht und bezeichnet D den Druck des Gewichts auf die schiefe Ebene, so ist (von der Reibung abgesehen) $Q \sin \alpha = P$, $Q \cos \alpha = D$, also $Q^2 = P^2 + D^2$.)

a*) Wie schwer ist eine Kugel, die auf eine schiefe Ebene einen Druck von 60 kg ausübt und einer Kraft von 11 kg das Gleichgewicht hält?

b*) Welchen Druck übt eine Kugel von 41 kg Gewicht auf eine schiefe Ebene aus, wenn sie einer Kraft von 9 kg das Gleichgewicht hält?

c*) Welche Kraft ist erforderlich, um einer Kugel von 25 kg Gewicht auf einer schiefen Ebene das Gleichgewicht zu halten, wenn die Kugel einen Druck von 24 kg ausübt?

d*) In wie viel Sekunden rollt eine Kugel auf einer schiefen Ebene von 39,2 m Länge und 10 m Höhe von oben nach unten?

e*) Eine Kugel rollt vom oberen Ende aus auf einer schiefen Ebene von 10 m Höhe in 6 Sekunden hinab. Welche Länge besitzt die schiefe Ebene?

f) Eine Lokomotive schiebt einen Wagen eine schiefe Ebene von der Steigung 1 : 50 hinauf und läßt den Wagen allein weiter laufen, wenn er eine Geschwindigkeit von 5 m angenommen hat. In wie viel Sekunden legt der Wagen nun allein eine Strecke von 61,8 m zurück?

g) Von einem Eisenbahnzug, der mit einer Geschwindigkeit von 15 m auf einer schiefen Ebene von der Steigung 1 : 100 hinauf fuhr, löste sich plötzlich der letzte Wagen los. Mit welcher Geschwindigkeit

---

†) Da dort $h = 0$ ist, so kann t durch v und α ausgedrückt werden.

fuhr der Wagen auf den Zug auf, wenn dieser 1147,5 m von der Stelle, an der sich der Wagen losgelöst hatte, zum Stehen gebracht wurde?

64. Anziehungskraft und Schwungkraft.

a*) In wieviel Sekunden legt ein Körper unter dem Einfluß einer Anziehungskraft von 3 m eine kreisförmige Bahn mit dem Halbmesser $r = 147$ m zurück? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

b*) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Körper in einer kreisförmigen Bahn mit dem Halbmesser $r = 25$ m, wenn er durch eine Kraft von 4 m angezogen wird?

c*) In welcher Entfernung von der Erde (durch den Halbmesser der Erde ausgedrückt) hat die Schwerkraft 1. um 6,6 m, 2. um 7,35 m, 3. um 8 m abgenommen?

d) Wird der Halbmesser einer Bahn, in der sich ein Körper mit einer Geschwindigkeit von 12 m bewegt, um 8 m vergrößert, so nimmt die auf den Körper wirkende Schwungkraft um 3 m ab. Wie groß ist der Halbmesser der Bahn?

e) In zwei kreisförmigen Bahnen mit den Halbmessern $r_1 = 162$ m und $r_2 = 200$ m bewegen sich zwei Körper, deren Schwungkräfte gleich groß sind. In wie viel Sekunden legt der erste seine Bahn zurück, wenn er 4 Sekunden weniger braucht als der zweite?

f*) Die mittlere Entfernung von der Sonne ist bei dem Planeten

1. Merkur 0,38 mal so groß wie bei der Erde.
2. Venus 0,72 " " " " " " "
3. Mars 1,52 " " " " " " "
4. Jupiter 5,2 " " " " " " "
5. Saturn 9,54 " " " " " " "
6. Uranus 19,2 " " " " " " "
7. Neptun 30 " " " " " " "

Wieviel Erdtage beträgt (nach dem dritten Keplerschen Gesetze) die Umlaufszeit eines jeden dieser Planeten, wenn das Jahr der Erde gleich $365\frac{1}{4}$ Tagen gerechnet wird?

65. Anwendung des Mariotteschen Gesetzes.

a) In eine U-förmig gebogene, überall gleich weite Röhre wird von einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht s so viel gegossen, daß in dem einen Schenkel eine Luftsäule von a cm Höhe bleibt. Wird nun dieser Schenkel luftdicht verschlossen und in den anderen so viel von der Flüssigkeit hinzugegossen, daß sie in ihm um b cm steigt, um wie viel cm steigt dann bei einem Barometerstand von 76 cm die Flüssigkeit in dem verschlossenen Schenkel?†)

†) Ist x die gesuchte Höhe, also $a - x$ die übriggebliebene Höhe der Luftsäule (und der Querschnitt gleich 1 qcm), so steht die eingeschlossene Luft unter einem Druck von $1030 + (b - x)\,s$ Gramm, und demnach liefert das Mariottesche Gesetz die Gleichung $1030 \cdot a = [1030 + (b - x)\,s]\,(a - x)$.

Beispiele. 1. $a = 80$, $b = 20$, $s = 1$ (Wasser).
2. $a = 60$, $b = 20$, $s = 13{,}6$ (Quecksilber).
3. $a = 50$, $b = 10$, $s = 1{,}8$ (Schwefelsäure).

b) Eine überall gleich weite und an einem Ende geschlossene gerade Röhre von a cm Länge wird bei einem Barometerstand von 76 cm mit ihrem offenen Ende b cm tief in eine Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht s vertikal eingetaucht. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in der Röhre?

Beispiele. 1. $a = 100$, $b = 50$, $s = 1$.
2. $a = 80$, $b = 30$, $s = 13{,}6$.
3. $a = 60$, $b = 30$, $s = 0{,}8$ (Alkohol).

c) Eine überall gleich weite und an einem Ende geschlossene Röhre von a cm Länge wird bis zu einer Höhe von b cm mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s gefüllt, am offenen Ende zugehalten, umgekehrt und in ein Becken mit derselben Flüssigkeit c cm tief vertikal eingetaucht. Um wie viel cm steht bei einem Barometerstand von 76 cm die Flüssigkeit in der Röhre höher als in dem Becken, wenn der untere Verschluß entfernt worden ist?

Beispiele. 1. $a = 80$, $b = 30$, $c = 20$, $s = 1$.
2. $a = 60$, $b = 40$, $c = 10$, $s = 13{,}6$.
3. $a = 100$, $b = 20$, $c = 10$, $s = 0{,}8$.

d) Eine überall gleich weite und an einem Ende geschlossene Röhre von a cm Länge wird bis zu einer Höhe von b cm mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s gefüllt, am offenen Ende geschlossen, umgekehrt und in ein Becken mit Quecksilber c cm tief eingetaucht. Wie hoch steht bei einem Barometerstand von 76 cm die Flüssigkeit in der Röhre über dem Quecksilber in dem Becken, wenn die Röhre wieder geöffnet ist?

Beispiele. 1. $a = 60$, $b = 20$, $c = 10$, $s = 1$.
2. $a = 50$, $b = 30$, $c = 12$, $s = 0{,}8$.
3. $a = 80$, $b = 20$, $c = 20$, $s = 1{,}8$.

56. Aufgaben aus der Lehre vom Lichte.

a) Wird ein Licht, das eine Stelle mit einer Stärke von a Normalkerzen beleuchtet, um d m abgerückt, so sinkt die beobachtete Lichtstärke auf b Normalkerzen. Wie weit ist das Licht von der beobachteten Fläche entfernt?

Beispiele. 1. $a = 16$, $b = 9$, $d = 4$. 2. $a = 27$, $b = 8\frac{1}{3}$, $d = 6$.

b) Um wieviel cm muß ein Licht, das aus einer Entfernung von d cm eine Stelle mit einer Stärke von a Normalkerzen beleuchtet, herangerückt werden, damit die Lichtstärke auf b Normalkerzen steigt?

Beispiele. 1. $a=25$, $b=36$, $d=150$. 2. $a=6\frac{2}{5}$, $b=15\frac{5}{8}$, $d=250$.

c) Wie weit ist ein leuchtender Punkt von einem Hohlspiegel mit dem Krümmungshalbmesser r cm entfernt, wenn sein Bild dem Spiegel um d cm näher liegt? $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}!\right)$.

Beispiele. 1. $r=120$, $d=160$. 2. $r=100$, $d=24$. 3. $r=64$, $d=140$.

d) Wie weit ist ein leuchtender Punkt von einem Hohlspiegel mit dem Krümmungsmesser r cm entfernt, wenn sein Bild von dem Spiegel um d cm weiter abliegt?

Beispiele. 1. $r=80$, $d=150$. 2. $r=120$, $d=350$. 3. $r=160$, $d=630$.

e) Welche Größe besitzt der Halbmesser eines Hohlspiegels, wenn er d_1 cm kleiner als die Entfernung eines leuchtenden Punktes von dem Spiegel und d_2 cm größer als dessen Bildweite ist?

Beispiele. 1. $d_1=48$, $d_2=16$. 2. $d_1=90$, $d_2=15$. 3. $d_1=56$, $d_2=7$.

f) Wie weit ist ein leuchtender Punkt von einem konvexen Spiegel mit dem Krümmungshalbmesser r cm entfernt, wenn er von seinem virtuellen Bilde d cm absteht?

Beispiele. 1. $r=108$, $d=45$. 2. $r=60$, $d=80$. 3. $r=75$, $d=40$.

g) Wie weit ist ein leuchtender Punkt von einem konvexen Spiegel mit dem Krümmungshalbmesser r cm entfernt, wenn er von dem Spiegel um d cm weiter abliegt als sein virtuelles Bild?

Beispiele. 1. $r=48$, $d=32$. 2. $r=64$, $d=72$. 3. $r=45$, $d=160$.

h) Welche Größe besitzt der Krümmungshalbmesser eines konvexen Spiegels, wenn er d_1 cm kleiner als die Entfernung eines leuchtenden Punktes von dem Spiegel und d_2 cm größer als dessen Bildweite ist?

Beispiele. 1. $d_1=8$, $d_2=10$. 2. $d_1=40$, $d_2=40$. 3 $d_1=62{,}5$, $d_2=37{,}5$.

67. Elektrische Messungen.

a*) Zwei isolierten Kugeln wird die gleiche Elektrizitätsmenge zugeführt. Wenn dabei die Elektrizität auf der zweiten $2\frac{7}{9}$mal so dicht wird wie auf der ersten und diese einen Halbmesser von 12 cm besitzt, wie groß ist dann der Halbmesser der ersten Kugel?

b*) Zwei Elektrizitätsmengen üben auf einen Gegenstand die gleiche Anziehung aus, obschon die erste, die von dem Gegenstand 9 cm ababsteht, 1,44mal so groß ist wie die zweite. Wie weit ist diese von dem Gegenstand entfernt?

c) Die Halbmesser zweier isolierten Kugeln unterscheiden sich um 4 cm. Wird beiden Kugeln die gleiche Elektrizitätsmenge zugeführt, so ist die Dichtigkeit der Elektrizität auf der kleineren Kugel $2\frac{1}{4}$mal so groß wie auf der anderen. Wie groß ist der Halbmesser der kleineren Kugel?

d) Zwei Elektrizitätsmengen, von denen die erste $6\frac{1}{4}$mal so groß ist wie die zweite, stoßen einen Gegenstand mit gleicher Stärke ab, wenn die erste von ihm 3 cm weiter als die zweite entfernt ist. Wie

viel cm beträgt die Entfernung des Gegenstandes von der ersten Elektrizitätsmenge?

e) Die Stromstärke einer Batterie mit einer Spannung von 12 Volt wurde durch Einschaltung eines Widerstandes von 3 Ohm um 2 Amp. vermindert. Wie groß war die ursprüngliche Stromstärke?

f) Um den spezifischen Widerstand eines Drahtes zu bestimmen, wurden n Bunsensche Elemente mit einer elektromotorischen Kraft von je 1,8 Volt benutzt. Bei einem zweiten Versuche mit derselben Batterie wurde die doppelte Länge des Drahtes eingeschaltet und dadurch die Stromstärke um d Amp. vermindert. Wie groß war der Widerstand des Drahtes bei dem ersten Versuche, wenn der innere Widerstand eines Bunsenschen Elementes 0,24 Ohm und der Widerstand der Zuleitungsdrähte w Ohm betrug?

Beispiele. 1. $d = 0{,}2$, $n = 5$, $w = 2{,}8$.
2. $d = 0{,}36$, $n = 4$, $w = 2{,}04$.
3. $d = 0{,}6$, $n = 6$, $w = 1{,}56$.

g) Um den spezifischen Widerstand eines Metalldrahtes zu bestimmen, wurden n Bunsensche Elemente mit einer elektromotorischen Kraft von je 1,8 Volt und einem inneren Widerstand von je 0,24 Ohm benutzt. Zu einem zweiten Versuch mit derselben Batterie wurde ein gleichlanger Draht aus demselben Metall mit doppelt so großem Querschnitt verwandt und dadurch die Stromstärke um d Amp. vermehrt. Der Widerstand der Zuleitungsdrähte betrug w Ohm. Wie groß war der Widerstand des ersten Drahtes?

Beispiele. 1. $d = 0{,}2$, $n = 2$, $w = 2{,}52$.
2. $d = 0{,}6$, $n = 10$, $w = 1{,}6$.
3. $d = 0{,}36$, $n = 3$, $w = 1{,}28$.

h) Bei einem äußeren Widerstand von w_1 Ohm liefern n_1 galvanische Elemente eine um d Amp. größere Stromstärke als n_2 Elemente derselben Art bei einem äußeren Widerstand von w_2 Ohm. Wie groß ist der innere Widerstand des Elementes, wenn seine elektromotorische Kraft 1,6 Volt beträgt?

Beispiele. 1. $d = \frac{2}{3}$, $n_1 = 8$, $n_2 = 5$, $w_1 = 2{,}4$, $w_2 = 2{,}5$.
2. $d = 0{,}8$, $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $w_1 = 2{,}5$, $w_2 = 3$.
3. $d = 0{,}4$, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $w_1 = 2$, $w_2 = 2{,}4$.

i) Der Widerstand einer Stromverzweigung von zwei Drähten, von denen der erste einen um d Ohm größeren Widerstand als der zweite leistet, beträgt w Ohm. Wie groß ist der Widerstand des ersten Drahtes?

Beispiele. 1. $d=15$, $w=4$. 2. $d=8$, $w=3$. 3. $d=6$, $w=2\frac{1}{4}$.

k) Der Widerstand einer Verzweigung von 2 Drähten mit einem

Gesamtwiderstand von s Ohm beträgt w Ohm. Wie groß ist der Widerstand der einzelnen Drähte?

Beispiele. 1. $s=18$, $w=4$. 2. $s=16$, $w=3$. 3. $s=7\frac{1}{2}$, $w=1\frac{2}{3}$.

l) Von zwei Stromleitern, die eine geschlossene Figur bilden, leistet der erste einen um d_1 Ohm und der zweite einen um d_2 Ohm größeren Widerstand als beide zusammen. Wie groß ist der Widerstand des ersten Stromleiters?

Beispiele. 1. $d_1=1$, $d_2=9$. 2. $d_1=1$, $d_2=16$. 3. $d_1=0{,}5$, $d_2=4{,}5$.

m) Der Widerstand einer Verzweigung von drei Drähten, von denen der erste d Ohm Widerstand weniger als der zweite, aber einen n mal so großen Widerstand leistet wie der dritte, beträgt w Ohm. Wie groß ist der Widerstand des ersten Drahtes?

Beispiele. 1. $d=1$, $n=3$, $w=1$.
2. $d=4$, $n=6$, $w=2{,}4$.
3. $d=3$, $n=4$, $w=2\frac{2}{3}$.

Siebentes Kapitel.

Aufgaben zur Reihenlehre.

Nr. 34. Arithmetische Reihen.

a. Allgemeine Übungen.

1. Eine arithmetische Reihe beginnt mit den Gliedern

1.	5,	7,	9	...	Wie	groß	ist	ihr	12tes	Glied?
2.	3,	8,	13	...	"	"	"	"	8	"	"
3.	12,	23,	34	...	"	"	"	"	13	"	"
4.	43,	40,	37	...	"	"	"	"	11	"	"
5.	95,	88,	81	...	"	"	"	"	19	"	"
6.	144,	129,	114	...	"	"	"	"	5	"	"
7.	22,	$25\frac{1}{2}$,	29	...	"	"	"	"	17	"	"
8.	28,	$30\frac{1}{3}$,	$32\frac{2}{3}$	...	"	"	"	"	18	"	"
9.	32,	$31\frac{1}{4}$,	$30\frac{1}{2}$	...	"	"	"	"	12	"	"
10.	25,	$23\frac{1}{3}$,	$21\frac{2}{3}$	...	"	"	"	"	7	"	"
11.	8,5,	10,9,	13,3	...	"	"	"	"	9	"	"
12.	25,3,	26,9,	28,5	...	"	"	"	"	14	"	"
13.	36,4,	34,6,	32,8	...	"	"	"	"	22	"	"
14.	9,6,	8,7,	7,8	...	"	"	"	"	16	"	"
15.	4,37,	4,25,	4,13	...	"	"	"	"	21	"	"

2. Wie groß ist die Differenz in einer arithmetischen Reihe mit dem

1. Anfangsglied $a = 3$, dem Endglied $t = 98$ u. der Gliederzahl $n = 20$?
2. „ $a = 12$, „ „ $t = 144$ „ „ „ $n = 13$?
3. „ $a = 50$, „ „ $t = 24$ „ „ „ $n = 14$?
4. „ $a = 62$, „ „ $t = 12$ „ „ „ $n = 11$?
5. „ $a = 24$, „ „ $t = 44$ „ „ „ $n = 17$?
6. „ $a = 8$, „ „ $t = 20$ „ „ „ $n = 9$?
7. „ $a = 60\frac{2}{3}$, „ „ $t = 28$ „ „ „ $n = 15$?
8. „ $a = 127\frac{1}{2}$, „ „ $t = 1$ „ „ „ $n = 24$?
9. „ $a = 6{,}5$, „ „ $t = 20{,}5$ „ „ „ $n = 29$?
10. „ $a = 43{,}2$, „ „ $t = 26{,}4$ „ „ „ $n = 25$?

3. Wie viel Glieder hat eine arithmetische Reihe mit dem

1. Anfangsglied $a = 13$, dem Endglied $t = 88$ u. der Differenz $d = 5$?
2. „ $a = 25$, „ „ $t = 74$ „ „ „ $d = 7$?
3. „ $a = 62$, „ „ $t = 7$ „ „ „ $d = -5$?
4. „ $a = -22$, „ „ $t = 83$ „ „ „ $d = 3\frac{1}{2}$?
5. „ $a = 36\frac{1}{3}$, „ „ $t = 4\frac{2}{3}$ „ „ „ $d = -1\frac{2}{3}$?
6. „ $a = 29$, „ „ $t = 15{,}5$ „ „ „ $d = -0{,}9$?

4. Die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe zu berechnen, wenn

a) 1. $a = 4$, $d = 7$ und $n = 12$ ist.
2. $a = 19$, $d = 5$ „ $n = 23$ „
3. $a = 56$, $d = -5$ „ $n = 15$ „
4. $a = -17$, $d = -2$ „ $n = 25$ „
5. $a = 5\frac{3}{4}$, $d = 2\frac{1}{2}$ „ $n = 17$ „
6. $a = -19\frac{3}{4}$, $d = 3\frac{1}{3}$ „ $n = 19$ „
7. $a = -45$, $d = -2\frac{1}{4}$ „ $n = 24$ „
8. $a = 86{,}4$, $d = -3{,}5$ „ $n = 18$ „

b) 1. $a = 15$, $d = 12$ und $t = 99$ ist.
2. $a = 22$, $d = 3\frac{1}{2}$ „ $t = 85$ „
3. $a = 63$, $d = -2\frac{1}{3}$ „ $t = 28$ „

c) 1. $a = 25$, $n = 8$ und $t = 74$ ist.
2. $a = 32$, $n = 13$ „ $t = 23$ „
3. $a = 57{,}5$, $n = 16$ „ $t = 35$ „

d) 1. $d = 3$, $n = 9$ und $t = 37$ ist.
2. $d = -3$, $n = 9$ „ $t = 19$ „
3. $d = -5\frac{1}{2}$, $n = 25$ „ $t = 1$ „

5. Wie groß ist die Summe

a) der ersten 25 ganzen Zahlen?
b) „ „ 30 geraden „ ?
c) „ „ 40 ungeraden „ ?

6. Wie groß ist die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Reihe mit der

1. Summe $S=1014$, dem Anfangsglied $a=12$ u. d. Endglied $t=144$?
2. „ $S=407$, „ „ $a=62$ „ „ „ $t=12$?
3. „ $S=1016\frac{1}{2}$, „ „ $a=22$ „ „ „ $t=85$?
4. „ $S=126$, „ „ $a=20$ „ „ „ $t=8$?

7. a) Wie groß ist die Differenz in einer arithmetischen Reihe von

1. 14 Gliedern mit dem Anfangsglied $a=8$ und der Summe $S=476$?
2. 14 „ „ „ „ $a=50$ „ „ „ $S=518$?

b) Wie groß ist die Differenz in einer arithmetischen Reihe von

1. 16 Gliedern mit dem Endglied $t=63$ und der Summe $S=728$?
2. 25 „ „ „ „ $t=1$ „ „ „ $S=1675$?

8.*) a) Wie viel Glieder hat eine arithmetische Reihe mit der

1. Summe $S=420$, der Differenz $d=3$ u. dem Anfangsglied $a=7$?
2. „ $S=578$, „ „ $d=-3$ „ „ „ $a=58$?

b) Wie viel Glieder hat eine arithmetische Reihe mit der

1. Summe $S=204$, der Differenz $d=6$ und dem Endglied $t=49$?
2. „ $S=456$, „ „ $d=-12$ „ „ „ $t=15$?

9. a) Zwischen 4 und 25 sollen 6 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt das 2te Glied?

b) Zwischen 71 und 35 sollen 12 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt das 3te Glied?

c) Zwischen $3\frac{1}{2}$ und $28\frac{1}{2}$ sollen 9 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt das 5te Glied?

d) Zwischen $55\frac{7}{12}$ und $2\frac{1}{4}$ sollen 16 Glieder so eingeschaltet werden, daß eine arithmetische Reihe entsteht. Wie heißt das 10te Glied?

10. a) In einer arithmetischen Reihe ist die Summe aus dem 5ten und 8ten Gliede gleich 54 und die Summe aus dem 2ten, 4ten und 13ten Gliede gleich 89. Wie heißt ihr Anfangsglied nnd ihre Differenz?

b) Die Summe aus dem 2ten, 4ten und 6ten Gliede einer arithmetischen Reihe beträgt 30. Zieht man von dieser Summe das 7te Glied ab, so erhält man das um 2 verminderte 5te Glied. Wie groß ist ihr Anfangsglied und ihre Differenz?

c) In einer arithmetischen Reihe ist die Summe der beiden ersten Glieder gleich 27, die Summe der beiden letzten Glieder gleich 105 und das 7te Glied gleich 30. Wie groß ist das erste Glied und wie viel Glieder hat die Reihe?

11.*) a) In einer arithmetischen Reihe ist die Summe aus dem 3ten

---

*) Die mit einem Stern (*) bezeichneten Aufgaben dieses Kapitels führen auf Gleichungen 2ten Grades.

und 5ten Gliede gleich 24 und das Produkt dieser Glieder gleich 135. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz der Reihe?

b) In einer arithmetischen Reihe ist die Differenz aus dem 9ten und 6ten Gliede gleich 21 und das Produkt dieser Glieder gleich 2146. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz der Reihe?

c) In einer arithmetischen Reihe verhält sich das 2te Glied zum 5ten wie 5 : 14, und das Produkt aus dem 3ten und 6ten Gliede ist gleich 544. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz der Reihe?

d) In einer arithmetischen Reihe, deren 5tes Glied gleich 25 ist, hat der Quotient aus dem 12ten und 3ten Gliede einen Wert, der um 2 größer ist, als der Quotient aus dem 16ten und 8ten Gliede. Wie groß ist das Anfangsglied und die Differenz der Reihe?

b. Anwendungen.

12. a) Ein Beamter wird mit einem Gehalt von 2000 ℳ angestellt und erhält jährlich 100 ℳ Zulage. Welches Gehalt bezieht er in seinem 19ten Dienstjahre?

b) Ein Beamter, der mit einem Gehalt von 1500 ℳ angestellt wurde und nach 3 Jahren jedesmal 200 ℳ Zulage erhielt, bezieht seit dem 1. Januar 1898 ein Gehalt von 3300 ℳ. Wann wurde er angestellt?

c) Ein Diener, der zuerst 240 ℳ und mit jedem weiteren Jahre 20 ℳ mehr erhielt, verbrauchte von seinem Lohn jährlich 120 ℳ und legte den Rest auf eine Sparkasse. Wann hat er seinen Dienst angetreten, wenn er am 3. Januar 1899 vom Lohn des letzten Jahres 220 ℳ auf die Sparkasse tragen konnte?

13. a) Ein Radfahrer, der in der ersten Stunde 20 km zurücklegte, verminderte in jeder weiteren Stunde seine Geschwindigkeit um $\frac{3}{4}$ km. Wie viel km hat er zurückgelegt, wenn seine Geschwindigkeit in der letzten Stunde 17 km betrug?

b) Ein junger Mann, der am ersten Tage 4 ℳ und an den folgenden Tagen jedesmal 25 ₰ mehr ausgab, hatte nach 9 Tagen sein Reisegeld aufgebraucht. Wie groß war dasselbe?

c) Beim Ausschachten eines Brunnens wurde für das erste Meter 4,30 ℳ und für die folgenden Meter jedesmal 45 ₰ mehr berechnet. Wie groß waren die Kosten für das Ausschachten, wenn der Brunnen 25 m tief ist?

14.*) a) Beim Ausschachten eines Brunnens wurde für das erste Meter 4 ℳ und für die folgenden Meter jedesmal 40 ₰ mehr berechnet. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Kosten für das Ausschachten 168 ℳ betrugen?

b) Wie lange kommt ein Reisender mit 172,50 ℳ aus, wenn er

am ersten Tage 8 ℳ und an jedem folgenden Tage 50 ₰ mehr als am vorhergehenden ausgiebt?

c) Ein Beamter, dessen anfängliches Gehalt 2400 ℳ betrug und jährlich um 100 ℳ stieg, hat während seiner ganzen Dienstzeit 90 000 ℳ bezogen. Wie lange war er im Amte?

d) In welcher Zeit legt ein Radfahrer eine Strecke von 93 km zurück, wenn er seine anfängliche Geschwindigkeit von 18 km in jeder weiteren Stunde um 1 km vermindert?

15. a) Ein senkrecht in die Höhe geworfener Stein fiel nach 36 Sekunden wieder zu Boden. Welche Geschwindigkeit besaß er beim Beginn der Bewegung†) und wie hoch war er gestiegen? ($g = 9{,}8$ m.)

b) Ein Stein wird mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 98 m senkrecht in die Höhe geworfen. Wie hoch steigt er und wann kommt er wieder auf der Erde an? ($g = 9{,}8$ m.)

c*) In wie viel Sekunden fällt ein Stein in einen Brunnen von 44,1 m Tiefe? ($g = 9{,}8$ m.)

16. a) Wann hört eine Kugel, die mit der Geschwindigkeit $v_0 = 235{,}2$ m unter dem Erhebungswinkel 30^0 abgeschossen wird, auf zu steigen und welche Höhe erreicht sie? ($g = 9{,}8$ m.)

b) Eine Kugel, die unter dem Erhebungswinkel 45^0 abgeschossen wurde, hörte nach $15\sqrt{2}$ Sekunden auf zu steigen. Wie groß war ihre anfängliche Geschwindigkeit? ($g = 9{,}8$ m.)

c) Unter welchem Winkel wird eine Kugel mit der Geschwindigkeit $v_0 = 117{,}6\sqrt{3}$ m abgeschossen, wenn sie nach 18 Sekunden aufhört zu steigen? ($g = 9{,}8$ m.)

d*) Wann erreicht eine mit der Geschwindigkeit $v^0 = 220$ m unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 30^0$ abgeschossene Kugel eine Höhe von 610 m? ($g = 9{,}8$ m.)

17. a) Ein Körper beginnt auf einer um 30^0 geneigten schiefen Ebene seine Bewegung mit einer Geschwindigkeit von 2,65 m. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich am Ende der 12ten Sekunde? ($g = 9{,}8$ m.)

b) Eine Kugel rollt auf einer schiefen Ebene, welche die Neigung 2 : 7 besitzt, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 4 m in der Sekunde hinab. Nach wie viel Sekunden hat sie eine Geschwindigkeit von 18 m erreicht? ($g = 9{,}8$ m.)

c*) Eine Kugel rollt auf einer schiefen Ebene, welche die Neigung 1 : 4 besitzt, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 2 m in der Sekunde hinab. Mit welcher Geschwindigkeit eilt sie an einer Stelle vorbei, die $142\frac{1}{2}$ m vom Ausgangspunkt der Bewegung entfernt ist? ($g = 9{,}8$ m.)

---

†) Bei den Aufgaben 15—17 soll weder auf den Widerstand der Luft noch auf die Reibung Rücksicht genommen werden.

d*) Auf einer schiefen Ebene, deren Steigung 3 : 14 beträgt, wird eine Kugel mit einer anfänglichen Geschwindigkeit von 12 m hinaufgeworfen. Mit welcher Geschwindigkeit kommt sie oben an, wenn die schiefe Ebene eine Länge von 31,2 m besitzt? ($g = 9{,}8$ m.)

18. a*) Jemand hatte 800 ℳ auf eine Bank, die (ohne Zinseszinsen) $4\frac{1}{2}$ % berechnet, gelegt und am Ende des ersten und jedes folgenden Jahres 100 ℳ hinzugefügt. Vor wie viel Jahren hatte er die erste Einlage gemacht, wenn nach der letzten Einlage sein Guthaben 2729 ℳ betrug?

b) Ein Gutsbesitzer übernahm das Gut seines Vaters mit der Verpflichtung, seinen Geschwistern nach 6 Jahren 76400 ℳ auszuzahlen. Es wurde ihm aber möglich, sofort 20000 ℳ und am Ende eines jeden weiteren Jahres 8000 ℳ abzutragen. Wie viel % wurden bei einfachen Zinsen berechnet, wenn mit der am Ende des 6ten Jahres erfolgten Auszahlung seine Verpflichtung abgelöst war?

Nr. 35. Geometrische Reihen.

a. Allgemeine Übungen.

19. Eine geometrische Reihe beginnt mit den Gliedern

1.	5,	10,	20, ...	Wie groß ist ihr 11tes Glied?		
2.	2,	6,	18, ...	„ „ „ „	7tes	„ ?
3.	3,	-6,	$+12$, ...	„ „ „ „	8tes	„ ?
4.	7,	-28,	$+112$, ...	„ „ „ „	5tes	„ ?
5.	18,	5,4,	1,62, ...	„ „ „ „	6tes	„ ?
6.	135,	27,	5,4, ...	„ „ „ „	10tes	„ ?
7.	217,	$-151{,}9$,	$+106{,}33$, ...	„ „ „ „	9tes	„ ?
8.	343,	$-34{,}3$,	$+3{,}43$, ...	„ „ „ „	7tes	„ ?
9.	$\frac{32}{81}$,	$\frac{16}{27}$,	$\frac{8}{9}$, ...	„ „ „ „	6tes	„ ?
10.	-4,	$+\frac{8}{3}$,	$-\frac{16}{9}$, ...	„ „ „ „	8tes	„ ?

20. Wie groß ist der Quotient in einer geometrischen Reihe mit dem

a)	Anfangsglied	$a_1 =$	9	und dem	5ten	Glied	$a_5 =$	144?		
b)	„	$a_1 =$	5	„ „	8ten	„	$a_8 =$	10935?		
c)	„	$a_1 =$	1024	„ „	7ten	„	$a_7 =$	16?		
d)	„	$a_1 =$	2	„ „	9ten	„	$a_9 =$	$\frac{512}{6561}$?		
e)	3ten	Glied $a_3 =$	12	„ „	8ten	„	$a_8 =$	384?		
f)	12ten	„ $a_{12} =$	240	„ „	16ten	„	$a_{16} =$	19440?		
g)	7ten	„ $a_7 =$	2048	„ „	12ten	„	$a_{12} =$	64?		
h)	5ten	„ $a_5 =$	81	„ „	11ten	„	$a_{11} =$	$\frac{64}{9}$?		
i)	Anfangsglied	$a=2$,	dem Endglied	$t=512$	und der Gliederzahl	$n=$	9?			
k)	„	$a=5000$,	„ „	$t=3{,}645$	„ „	„	$n=$	7?		
l)	„	$a=\frac{625}{27}$,	„ „	$t=\frac{81}{125}$	„ „	„	$n=$	8?		
m)	„	$a=\frac{64}{243}$,	„ „	$t=\frac{243}{16}$	„ „	„	$n=$	11?		

21. Wie groß ist das erste Glied einer geometrischen Reihe mit dem

a) letzten Glied $t_n = 27{,}2$, dem vorletzt. Glied $t_{n-1} = 25{,}9$ u. d. Gliederzahl $n = 6$?
b) „ „ $t_n = 385$, „ „ „ $t_{n-1} = 366{,}7$ „ „ „ $n = 15$?
c) „ „ $t_n = 47{,}5$, „ „ „ $t_{n-1} = 55{,}8$ „ „ „ $n = 16$?
d) „ „ $t_n = 0{,}075$, „ „ „ $t_{n-1} = 0{,}91$ „ „ „ $n = 12$?

22. Wie viel Glieder hat eine geometrische Reihe mit dem

a) 1ten Glied $a_1 = 6$, dem 2ten Glied $a_2 = 12$ und dem Endglied $t = 3072$?
b) 1ten „ $a_1 = 25$, „ 2ten „ $a_2 = 75$ „ „ „ $t = 2025$?
c) 4ten „ $a_4 = 13$, „ 6ten „ $a_6 = 117$ „ „ „ $t = 9477$?
d) 5ten „ $a_5 = 7$, „ 9ten „ $a_9 = 4375$ „ „ „ $t = 546875$?

e) 1. Anfangsglied $a = 37{,}5$, d. Quotienten $q = 1{,}8$ u. d. Endglied $t = 24099$?
2. „ $a = 0{,}007248$, „ „ $q = 2{,}5$ „ „ „ $t = 2700$?
3. „ $a = 23{,}95$, „ „ $q = -0{,}925$ „ „ „ $t = -7{,}375$?
4. „ $a = 6344$, „ „ $q = -0{,}43$ „ „ „ $t = 7{,}415$?

23. Die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe zu berechnen, wenn man kennt

a) 1. das Anfangsglied $a = 2$, den Quotienten $q = 3$ u. d. Gliederzahl $n = 8$.
2. „ „ $a = 5$, „ „ $q = 2$ „ „ „ $n = 11$.
3. „ „ $a = 25$, „ „ $q = -4$ „ „ „ $n = 7$.
4. „ „ $a = 3750$, „ „ $q = -0{,}4$ „ „ „ $n = 6$.
5. „ „ $a = 27{,}4$, „ „ $q = 1{,}75$ „ „ „ $n = 9$.
6. „ „ $a = 235{,}8$, „ „ $q = 0{,}925$ „ „ „ $n = 14$.
7. „ „ $a = 0{,}552$, „ „ $q = 1{,}025$ „ „ „ $n = 18$.
8. „ „ $a = 73{,}75$, „ „ $q = -0{,}891$ „ „ „ $n = 15$.
9. „ „ $a = 0{,}987$, „ „ $q = -0{,}978$ „ „ „ $n = 12$.

b) 1. das Anfangsglied $a = 4{,}6$, d. Quotienten $q = 1{,}08$ u. d. Endglied $t = 19{,}849$.
2. „ „ $a = 5{,}43$, „ „ $q = 2{,}43$ „ „ „ $t = 230205$.
3. „ „ $a = 0{,}525$, „ „ $q = 2{,}9$ „ „ „ $t = 312{,}68$.
4. „ „ $a = 0{,}8245$, „ „ $q = 0{,}996$ „ „ „ $t = 0{,}7702$.

c) 1. das Anfangsglied $a = 11$, das Endglied $t = 22528$ und die Gliederzahl $n = 12$.
2. „ „ $a = 7$, „ „ $t = 5103$ „ „ „ $n = 7$.
3. „ „ $a = 46{,}8$, „ „ $t = 2538{,}4$ „ „ „ $n = 15$.
4. „ „ $a = 9{,}275$, „ „ $t = 6{,}834$ „ „ „ $n = 19$.

d) 1. das Endglied $t = 333{,}78$, den Quotienten $q = 2{,}5$ und die Gliederzahl $n = 10$.
3. „ „ $t = 2{,}946$, „ „ $q = 0{,}837$ „ „ „ $n = 13$.
3. „ „ $t = 0{,}0453$, „ „ $q = 0{,}275$ „ „ „ $n = 11$.

24. Wie viel Glieder hat eine geometrische Reihe mit

a) 1. dem Anfangsglied $a = 4$, dem Quotienten $q = 3$, u. d. Summe $S = 13120$.
2. „ „ $a = 0{,}0875$, „ „ $q = 2{,}5$ „ „ „ $S = 556{,}28$.
3. „ „ $a = 4{,}6$, „ „ $q = 1{,}08$ „ „ „ $S = 210{,}21$.
4. „ „ $a = 3{,}75$, „ „ $q = 1{,}8$ „ „ „ $S = 5426$.

b) 1. dem Anfangsglied $a = 5$, dem Endglied $t = 1280$ u. d. Summe $S = 2555$.
2. „ „ $a = 3$, „ „ $t = 352947$ „ „ „ $S = 411771$.
3. „ „ $a = 23{,}75$, „ „ $t = 7{,}375$ „ „ „ $S = 225{,}7$.
4. „ „ $a = 634{,}4$, „ „ $t = 0{,}7415$ „ „ „ $S = 1112{,}4$.

25. Zwischen
a) 9 und 576 sollen 5 Glieder so eingeschaltet werden,
b) 4 „ 972 „ 4 „ „ „ „ ‘
c) 13,7 „ 5279,5 „ 17 „ „ „ „ ‘
d) 0,996 „ 0,824 „ 12 „ „ „ „ ‘
daß eine geometrische Reihe entsteht. Wie heißt das 2te Glied?

26. a) In einer geometrischen Reihe ist das 4te Glied gleich 135 und das 7te Glied gleich 3645. Wie groß ist die Summe der 12 ersten Glieder der Reihe?

b) In einer geometrischen Reihe von 10 Gliedern sind die beiden mittelsten gleich 48, bez. 96. Wie groß ist die Summe der Reihe?

c) In einer geometrischen Reihe von 16 Gliedern sind die beiden mittelsten gleich $\frac{7}{3}$, bez. $\frac{7}{9}$. Wie groß ist die Summe der Reihe?

27. a) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 3ten und 5ten Gliedes gleich 90 und die Summe des 6ten und 8ten Gliedes gleich 2430. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

b) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 2ten, 4ten und 7ten Gliedes gleich 370 und die Summe des 3ten, 5ten und 8ten Gliedes gleich 740. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

c) In einer geometrischen Reihe ist die Differenz aus dem 5ten und 3ten Gliede gleich 1680 und die Summe des 3ten und 4ten Gliedes gleich 560. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

d) In einer geometrischen Reihe ist die Differenz aus dem 6ten und 4ten Gliede gleich 432 und die Differenz aus dem 5ten und 4ten Gliede gleich 108. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

e*) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 2ten und 3ten Gliedes gleich 220 und die Differenz aus dem 2ten und 1ten Gliede gleich 33. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

f*) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 2ten, 3ten und 4ten Gliedes gleich 98 und die Differenz aus dem 3ten und 2ten Glied gleich 14. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

g*) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 2ten, 3ten und 4ten Gliedes gleich 2325 und die Differenz aus dem 3ten und 6ten Glied gleich 372. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

h*) In einer geometrischen Reihe ist die Differenz aus dem 7ten und 3ten Gliede gleich 120 und die Differenz aus dem 7ten und 5ten Glied gleich 96. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

i*) In einer geometrischen Reihe ist die Summe des 1ten und 5ten Gliedes gleich 1285 und das Produkt des 2ten und 4ten Gliedes gleich 6400. Wie heißen die beiden ersten Glieder?

28. Berechne die Größe der Summe
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ . . . . in inf.
b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} -$ . . . . in inf.

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots$. in inf.
d) $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} \ldots$. in inf.
e) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots$. in inf.
f) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} + 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \ldots$. in inf.

b. Anwendungen.

α. Vermischte Aufgaben.

29. a) Der Erfinder des Schachspiels erbat sich als Belohnung die Summe der Weizenkörner, die herauskäme, wenn auf das erste Feld 1 Korn, auf das zweite 2 Körner, auf das dritte 4 Körner, auf das vierte 8 Körner u. s. w. gelegt würden. Wie viel Scheffel Weizen hätte er bekommen müssen, wenn auf einen Scheffel 800 000 Körner gerechnet werden?

b) Ein Reiter ließ seinem Pferde 2 neue Hufeisen auflegen. Da er die Rechnung des Schmiedes zu hoch fand, ging er auf dessen Vorschlag ein, nur die Nägel zu bezahlen, und zwar für den ersten Nagel 1 ₰, für den zweiten 2 ₰, für den dritten 4 ₰ u. s. w. Wie viel ℳ mußte er nun bezahlen, wenn jedes Hufeisen 7 Nägel erhielt?

30. a) Ein Wirt nimmt aus einem Fasse, das 150 l Wein enthielt, 5 l heraus und ersetzt sie durch Wasser. Von der Mischung nimmt er wieder 5 l weg und gießt dafür 5 l Wasser in das Faß. Dies Verfahren führt er 5 mal aus. Wie viel l Wein befinden sich zuletzt noch in dem Fasse?

b) Jemand gießt in ein Faß, das 200 l Spiritus enthält, 20 l Wasser und nimmt dann von der Mischung 20 l heraus. Wie oft führt er dies Verfahren aus, wenn sich in dem Fasse zuletzt nur noch 112,9 l Spiritus befinden?

31. a) Aus einem Gefäß von 2000 ccm Rauminhalt wird durch eine einstiefelige Luftpumpe, deren Stiefel 80 ccm groß ist, die Luft ausgepumpt. Wie groß ist in dem Gefäß nach dem 20ten Kolbenzüge die Dichtigkeit der Luft?

b) Wenn das Gefäß 1000 ccm und der Stiefel 45 ccm groß ist, nach wie viel Kolbenzügen beträgt dann die Dichtigkeit der Luft in dem Gefäß nur noch 0,267?

32. a) Wie viel mm beträgt der reduzierte Barometerstand in einer Höhe von 1134 m, wenn das Barometer in einer Höhe von 1 m über dem Meeresspiegel 759,905 mm anzeigt?

b) Wie hoch ist ein Berg, auf dessen Spitze bei 0° Wärme das Barometer 718,48 mm anzeigt?

c) Wie hoch ist ein Berg, auf dessen Spitze der reduzierte Barometerstand 487,7 mm beträgt?

33. a) Von einem Punkte, der 14 m vom Scheitel eines Winkels von

30^0 entfernt auf einem Schenkel des Winkels liegt, sei das Lot auf den zweiten Schenkel, von dessen Fußpunkt das Lot auf den ersten Schenkel, von dessen Fußpunkt wiederum das Lot auf den zweiten Schenkel gefällt, u. s. w. Wie groß ist die Summe

1. der 8 ersten dieser Lote?
2. aller dieser Lote?

b) Dieselben Aufgaben, wenn der Winkel $57^0\,25{,}5'$ beträgt.

c) Aus den Höhen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $a = 25{,}4$ cm sei ein Dreieck, aus dessen Höhen wieder ein Dreieck gezeichnet, u s. w. Wie groß ist die Summe aus den Inhalten

1. der 6 ersten dieser Dreiecke?
2. aller dieser Dreiecke?

d) In einem Dreieck mit den Seiten $a = 14$ cm, $b = 19$ cm und $c = 7$ cm seien die Seitenmitten zu Ecken eines 2ten Dreiecks, dessen Seitenmitten zu Ecken eines 3ten Dreiecks gemacht, u. s. w. Welchen Inhalt besitzen

1. die sechs ersten dieser Dreiecke zusammen?
2. alle diese Dreiecke zusammen?

e) Zwei sich unter 60^0 schneidende Geraden werden durch eine Reihe von Kreisen berührt, von denen jeder folgende zugleich den vorhergehenden berührt. Der Halbmesser des 5ten von ihnen (vom Scheitel ab gerechnet) ist 81 cm groß. Welchen Inhalt besitzen die 5 ersten dieser Kreise?

f) Einem Würfel mit der Kante $a = 262$ cm ist eine Kugel, dieser ein Würfel, diesem wieder eine Kugel eingeschrieben, u. s. w. Wie groß ist die Summe aus den Oberflächen

1. der 6 ersten dieser Kugeln?
2. aller dieser Kugeln?

g) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 68{,}4$ cm ist ein regelmäßiges Vierflach (Tetraeder), diesem eine Kugel, dieser wiederum ein regelmäßiges Vierflach eingeschrieben, u. s. w. Wie groß ist die Summe aus den Inhalten (Oberflächen)

1. der ersten 5 dieser Vierflache?
2. aller dieser Vierflache?

h) Einem regelmäßigen 6-Eck mit der Seite $a = 54$ cm sei ein zweites 6-Eck eingeschrieben, dessen Ecken die Seiten des ersten in gleicher Richtung im Verhältnis $p : q = 5 : 3$ teilen.†) Dem 2ten 6-Eck sei in entsprechender Weise ein 3tes, diesem ein 4tes u. s. w. eingeschrieben. Wie groß ist

---

†) Ist x die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 6-Ecks, so hat man nach dem Pyth. Lehrs.: $x^2 = \left(\frac{p}{p+q}\right)^2 a^2 + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 a^2 + \frac{2pq}{(p+q)^2} \cos 60^0$.

1. die Summe der 5 ersten eingeschriebenen 6-Ecke?
2. die Summe aller eingeschriebenen 6-Ecke?
3. das Verhältnis dieser Summe zu dem Inhalt des ursprünglichen 6-Ecks?

i) Wie groß ist in der vorhergehenden Aufgabe das Verhältnis $p:q$ zu wählen, damit die Summe aller eingeschriebenen 6-Ecke 4 mal so groß wird wie das ursprüngliche 6-Eck?

β. Zinseszins-Rechnung.

34. Auf welche Summen wachsen an

a)	a	ℳ	bei	p %	in	n	Jahren?
b)	25 000	ℳ	„	$3\frac{1}{4}$ %	„	40	„	?
c)	5 000	ℳ	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	19	„	?
d)	375	ℳ	„	$4\frac{2}{5}$ %	„	12	„	?
e)	1 542	ℳ	„	$3\frac{3}{4}$ %	„	15	„	?
f)	939,80	ℳ	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	10	„	?

35. a) Eine Schuld von 5400 ℳ wird nach 15 Jahren mit den Zinsen zugleich abgetragen. Welche Summe ist zu bezahlen, wenn $3\frac{3}{4}$ % berechnet werden?

b) Ein Vater legte für seinen Sohn bei dessen Geburt 750 ℳ auf eine Sparkasse, die $4\frac{1}{4}$ % berechnet, mit der Bestimmung, daß er die Summe nach Beendigung seines 20ten Lebensjahres abheben dürfe. Wie groß wird die Summe sein?

c) Eine Stadt besitzt jetzt 65 200 Einwohner. Wie groß wird die Anzahl derselben nach 25 Jahren sein, wenn die Bevölkerung jährlich um 2 % zunimmt?

d) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 6500 cbm. Wie groß wird er nach 12 Jahren sein, wenn er jährlich um $2\frac{1}{2}$ % zunimmt?

e) Die Bevölkerung eines Landes, die jetzt 35 Millionen beträgt, nimmt jährlich um $\frac{3}{4}$ % ab. Wie groß wird sie nach 50 Jahren sein?

f) Die Maschinen einer Fabrik kosten 12 530 ℳ. Welchen Wert haben sie nach 12 Jahren, wenn die jährliche Abnutzung auf $8\frac{2}{3}$ % veranschlagt wird?

36. a) Eine Schuld von 6000 ℳ war 10 Jahre lang mit $4\frac{1}{2}$ % und weitere 5 Jahre lang mit $3\frac{3}{4}$ % zu verzinsen. Auf welchen Betrag ist sie gestiegen?

b) Ein Kapital von 2750 ℳ war auf eine Sparkasse gelegt worden, als sie noch 4 % berechnete. Nach 8 Jahren sah sich die Verwaltung gezwungen, den Zinsfuß um $\frac{1}{2}$ % herabzusetzen. Auf welche Summe war das Kapital angewachsen, wenn es noch weitere 6 Jahre auf der Sparkasse blieb?

c) Der Wert eines Grundstücks, das für 32500 ℳ gekauft worden war, stieg in den ersten 7 Jahren jährlich um 3 %. Dann trat ein Rückschlag ein und der Wert nahm jährlich um 4 % ab. Dadurch sah sich der Besitzer 3 Jahre später veranlaßt, das Grundstück zu verkaufen. Welchen Preis erhielt er, wenn er dabei noch 2 % des Wertes einbüßte?

37. Welches Kapitel wächst

a)	bei	p %	in	n	Jahren	auf	k ℳ an?
b)	„	$3\frac{3}{4}$ %	„	22	„	„	22477 ℳ „ ?
c)	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	19	„	„	1153,93 ℳ „ ?
d)	„	$3\frac{1}{4}$ %	„	40	„	„	8985,5 ℳ „ ?
e)	„	$3\frac{1}{2}$ %	„	20	„	„	3730,85 ℳ „ ?
f)	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	10	„	„	14595 ℳ „ ?

38. a) Eine Schuld, die vor 8 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ % aufgenommen wurde, beläuft sich jetzt auf 2370,20 ℳ. Wie groß war sie ursprünglich?

b) Welche Summe muß ein Vater bei der Geburt einer Tochter auf eine Sparkasse bringen, die $3\frac{3}{4}$ % berechnet, um ihr dadurch nach Beendigung ihres 20ten Lebensjahres 10000 ℳ für ihre Ausstattung zu sichern?

c) Wie groß war die Einwohnerzahl einer Stadt vor 12 Jahren, wenn die Zunahme durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ % betrug und die Stadt jetzt 87408 Einwohner besitzt?

d) Der Wert eines Grundstücks beträgt jetzt 26020 ℳ. Wie groß war er vor 10 Jahren, wenn er jährlich um $3\frac{3}{4}$ % stieg?

e) Ein Wald hat jetzt einen Holzbestand von 18635 cbm. Wie groß war der Bestand vor 8 Jahren, wenn er jährlich um $2\frac{3}{4}$ % zunahm?

f) Durch jährliche Abschreibung von $6\frac{2}{3}$ % ist der Buchwert einer Maschinenanlage in 10 Jahren auf 12541 ℳ gesunken. Was hatte die Anlage gekostet?

g) In einem Wald, dessen Holzbestand jetzt 31270 cbm beträgt, hatte der Besitzer in den letzten Jahren so viel Holz schlagen lassen, daß trotz des Zuwachses die jährliche Abnahme des Bestandes $3\frac{3}{4}$ % ausmachte. Wie groß war der Bestand vor 15 Jahren?

39. In wie viel Jahren wachsen

a)	a ℳ	bei	p %	auf	k ℳ an?
b)	1500 ℳ	„	$4\frac{1}{4}$ %	„	2471,75 ℳ „ ?
c)	2000 ℳ	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	4615,72 ℳ „ ?
d)	1879,6 ℳ	„	$4\frac{1}{2}$ %	„	2919 ℳ „ ?
e)	187,5 ℳ	„	$4\frac{1}{4}$ %	„	309 ℳ „ ?
f)	478,85 ℳ	„	$3\frac{3}{4}$ %	„	1000 ℳ „ ?

40. a) Wann wurde eine Schuld von 3500 ℳ aufgenommen, wenn sie mit den zu $3\frac{3}{4}$ % berechneten Zinsen am 1. Oktober 1899 sich auf 4207,35 ℳ belief?

b) Wie lange wurden bei einer Hypothek von 45 000 ℳ, die mit $4\frac{1}{4}$ % zu verzinsen war, die Zinsen nicht bezahlt, wenn sie mit 53 150 ℳ abgelöst wurde?

c) Wann sind 630 ℳ auf eine Sparkasse, die 4 % berechnet, gelegt worden, wenn sie am 1. April 1899 auf 969,8 ℳ angewachsen sind?

d) Wann war eine Schuld von 5000 ℳ fällig, wenn sie am 15. Juli 1898 unter Berechnung von $4\frac{1}{2}$ % mit 4578,60 ℳ abgetragen wurde?

e) Ein Kaufmann war bei einem Bankerott 18 000 ℳ schuldig geblieben. Nach einiger Zeit gelang es ihm, ein neues Geschäft zu gründen. Um nun seine Gläubiger nach Möglichkeit zu befriedigen, einigte er sich mit ihnen dahin, daß er am Ende eines jeden Geschäftsjahres 8 % der noch vorhandenen Schuld abtragen und damit in 20 Jahren seine Schuld tilgen sollte. Nach wieviel Jahren starb er, wenn bei seinem Tode seine Schuld nur noch 7194 ℳ betrug?

f) Die Maschinen einer Fabrik, die 22 500 ℳ gekostet hatten, haben durch jährliche Abschreibung von $8\frac{1}{2}$ % des jedesmaligen Wertes einen Buchwert von 7766 ℳ erhalten. Wie lange waren sie in Gebrauch?

41. a) Jemand hatte bei einer Sparkasse 400 ℳ angelegt, als sie noch 4 % berechnete. Nach 6 Jahren setzte die Sparkasse den Zinsfuß um $\frac{1}{3}$ % herab. Wie lange stand das Kapital noch, wenn es auf 563,85 ℳ anwuchs?

b) Der Wert eines Grundstücks, das für 2650 ℳ gekauft worden war und in den ersten 4 Jahren jährlich um 6 % an Wert zugenommen hatte, sank nach dieser Zeit jährlich um 2 %. Wie lange hatte der Besitzer das Grundstück noch behalten, als er es für 2964 ℳ verkaufte?

c) Der Wert eines Waldes hatte 7 Jahre lang jährlich um $5\frac{1}{3}$ % zugenommen. Dann trat Raupenfraß ein und verminderte den Wert jährlich um 8%. Um nicht noch mehr Schaden zu haben, verkaufte der Besitzer den Wald für 71 126 ℳ. Wie lange hatte er ihn besessen, wenn er ihn für 75 000 ℳ gekauft hatte?

42. Zu wie viel Prozent sind ausgeliehen

a)	a	ℳ,	wenn	sie	in	n	Jahren	auf	k	ℳ	anwachsen?
b)	625	„	„	„	„	15	„	„	1 166,9	„	„
c)	2400	„	„	„	„	20	„	„	5 788	„	„
d)	3200	„	„	„	„	37	„	„	11 427,2	„	„
e)	3759,2	„	„	„	„	10	„	„	5 838	„	„
f)	312,5	„	„	„	„	12	„	„	515	„	„

43. a) Eine Schuld von 2600 ℳ war in 5 Jahren auf 3820 ℳ angewachsen. Wie viel Prozent wurden berechnet?

b) Wie viel Prozent berechnet eine Sparkasse, wenn bei ihr 1000 ℳ in 22 Jahren auf 2247,7 ℳ anwachsen?

c) Ein Grundstück, das vor 12 Jahren mit 5580 ℳ bezahlt worden war, wurde für 10020 ℳ verkauft. Um wie viel Prozent hat der Wert des Grundstücks jährlich zugenommen?

d) Die Bewohnerzahl eines Landes ist in 25 Jahren von 5282400 auf 8666400 gestiegen. Wie viel Prozent betrug die jährliche Zunahme?

e) Der Holzbestand eines Waldes ist in 25 Jahren von 4580 cbm auf 6645,4 cbm gestiegen. Wie viel Prozent betrug die jährliche Vermehrung?

f) Der Buchwert einer Fabrik ist in 8 Jahren von 225000 ℳ auf 13716 ℳ gesunken. Wie viel Prozent des jedesmaligen Wertes wurden jährlich abgeschrieben?

g) Die Bewohnerzahl eines Landes ist in 16 Jahren von 35 Millionen auf 33 Millionen gesunken. Wie viel Prozent betrug die jährliche Abnahme?

44. a) Zu wie viel Prozent müßte ein Kapital angelegt sein, wenn es sich in 16 Jahren verdoppelte?

b) Um wie viel Prozent hat die Einwohnerzahl einer Stadt durchschnittlich jährlich zugenommen, wenn sie sich vom 1. Jan. 1883 bis zum 1. Jan. 1898 verfünffachte?

c) Um wie viel Prozent nimmt der Wert eines Hauses ab, wenn er in 35 Jahren auf seine Hälfte herabsinkt?

d) Wie viel Prozent einer unverzinslichen Schuld mußten jedesmal jährlich getilgt werden, wenn sie nach 10 Jahren auf ihren dritten Teil gesunken sein sollte?

45. a) Auf welche Summe wachsen 600 ℳ in 8 Jahren an, wenn für ein halbes Jahr 2% berechnet werden?

b) Auf welche Summe wachsen 825 ℳ in $12\frac{1}{2}$ Jahren an, wenn für ein viertel Jahr $\frac{15}{16}$% berechnet werden?

c) Auf welche Summe wachsen 1240 ℳ in $5\frac{3}{4}$ Jahren an, wenn für einen Monat $\frac{1}{3}$% berechnet wird?

d) Um welche Summe wird ein Kapital von 24600 ℳ in 10 Jahren größer, wenn halbjährlich 2%, als wenn jährlich 4% berechnet werden?

e) Wie groß ist der jährliche Zinsfuß, wenn monatlich 1% berechnet wird?

f) Ein Pfandleiher berechnete für eine Mark und einen Monat 2 ₰ Zinsen. Wie viel Prozent betrug dies für ein Jahr?

γ. Zinseszins-Rechnung mit Zu- und Auszahlungen.

46. a) Ein Kaufmann legte am Ende eines jeden Geschäftsjahres 1200 ℳ auf eine Bank, die $4\frac{1}{2}\%$ berechnete. Wie groß war sein Guthaben am Ende des 20ten Jahres?

b) Ein Arbeiter kann am Ende eines jeden Jahres 150 ℳ auf eine Sparkasse tragen, die 4% berechnet. Wie groß sind seine Ersparnisse am Ende des 36ten Jahres?

c) Ein Beamter brachte 20mal am Ende des Jahres für seine Kinder 500 ℳ auf eine Sparkasse, die $3\frac{3}{4}\%$ berechnet. Wie groß war nach der letzten Einzahlung das Guthaben der Kinder?

d) Die Unterhaltungskosten eines Sohnes während seiner Studien- und Ausbildungszeit werden von dem Vater am Schlusse des Jahres dem Sohne jedesmal mit 1800 ℳ angeschrieben. Welche Summe hat der Vater ihm damit am Ende des 8ten Jahres für die ganze Zeit angeschrieben, wenn er $3\frac{1}{2}\%$ berechnet?

e) Eine Fabrik wird für 10000 ℳ jährlich auf 15 Jahre verpachtet und die Pachtsumme am Ende des Jahres zu 3,4% angelegt. Welche Summe ist dem Besitzer am Ende der Pachtzeit auszuzahlen?

f) Ein Rittergut wurde nach dem Tode des Besitzers für 25000 ℳ jährlich auf 15 Jahre verpachtet mit der Bestimmung, daß zur Erziehung der 4 minorennen Erben jährlich 10000 ℳ verwandt und der Rest der Pachtsumme am Ende des Jahres zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegt werden sollen. Wie viel hat jeder der Erben am Ende der Pachtzeit zu beanspruchen?

47. a) Ein Arbeiter legte von einer Erbschaft 576 ℳ auf eine Sparkasse, die mit 4% verzinst, und fügte jedesmal am Ende der nächsten 17 Jahre $57\frac{1}{2}$ ℳ hinzu. Auf welche Summe ist nach der letzten Einzahlung sein Guthaben angewachsen?

b) Ein Vater hinterließ seiner Tochter 6980 ℳ, die er zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegt hatte, mit der Bestimmung, daß die Tochter davon am Ende des Jahres jedesmal 435 ℳ abheben dürfe. Wie groß war der Rest nach 27 Jahren?

c) Wie groß war die zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegte Erbschaft eines Knaben, wenn am Ende des Jahres jedesmal 750 ℳ zu seiner Ausbildung abgehoben wurden und ihm nach 15 Jahren noch 6472 ℳ übrig blieben?

d) Welche Summe hatte ein Vater für seine Tochter auf eine Sparkasse, die zu $3\frac{3}{4}\%$ verzinst, bei ihrer Geburt gelegt, wenn er an jedem ihrer Geburtstage 300 ℳ hinzufügte und nach der 18ten Zuzahlung das Guthaben der Tochter 8492 ℳ betrug?

48. a) Von der Erbschaft eines Knaben, die zu 4% angelegt war, wurde 17mal am Ende des Jahres eine gewisse Summe zu seiner Ausbildung abgehoben. Dadurch wurde die Erbschaft von 15000 ℳ bis auf 5521 ℳ verbraucht. Wie groß war die abgehobene Summe?

b) Ein Fabrikbesitzer hatte auf einer Bank, die $3\frac{1}{2}\%$ berechnet, bei der Übernahme der Fabrik 78 000 ℳ liegen. Welche Summe fügte er 21 mal am Ende des Geschäftsjahres hinzu, wenn er bei der Abgabe der Fabrik an seinen Sohn ein Barvermögen von 391 580 ℳ besaß?

c) Ein Gutsbesitzer hatte das Gut seines Vaters mit der Verpflichtung übernommen, seinen Geschwistern 123 500 ℳ auszuzahlen oder in der ersten Zeit mit $4\frac{1}{4}\%$ zu verzinsen. Welche Summe hat er 20 mal am Ende des Jahres abgezahlt, wenn er nach der letzten Auszahlung seinen Geschwistern noch 39 400 ℳ schuldig war?

d) Ein junger Mann gewann in der Lotterie 50 000 ℳ und legte davon 45 000 ℳ zu $4\frac{1}{2}\%$ an. Welche Summe ließ er sich 12 mal am Ende des Jahres auszahlen, wenn mit der letzten Auszahlung die Summe aufgebraucht war?

e) Bei der Geburt eines Knaben legte einer seiner Paten für ihn 600 ℳ auf eine Sparkasse, die mit $3\frac{3}{4}\%$ verzinst. Welche Summe fügte er an jedem Geburtstage des Knaben hinzu, wenn dieser im Alter von 18 Jahren ein Guthaben von 6178 ℳ besaß?

f) Wie viel cbm Holz wurden in einem Walde, dessen Holzbestand vor 6 Jahren 12 000 cbm betrug, jährlich geschlagen, wenn der jetzige Bestand trotz der jährlichen Zunahme um 2,2% nur noch 9863,7 cbm beträgt?

49. a) Ein Kaufmann hatte bei der Übernahme eines größeren Geschäfts die Mitgift seiner Frau im Betrage von 40 000 ℳ zu $3\frac{1}{2}\%$ auf Zinseszinsen angelegt und fügte zum gleichen Zinsfuß am Ende eines jeden Geschäftsjahres 7843 ℳ hinzu. Nach wie viel Jahren gab er sein Geschäft an seinen Sohn ab, wenn sein Vermögen ihm jährlich 14 000 ℳ Zinsen bringt?

b) Ein Diener trug, als er seinen Dienst antrat, von einer Erbschaft 450 ℳ auf eine Sparkasse, die $3\frac{3}{4}\%$ berechnet, und konnte am Ende eines jeden Dienstjahres 150 ℳ hinzufügen. Nach wie viel Jahren war sein Guthaben auf 4633,5 ℳ gestiegen?

c) Ein Vater legte für seine unverheiratete Tochter 10 000 ℳ auf eine Bank, die 4% berechnet, und bestimmte, daß die Tochter jedesmal am Ende des Jahres 580 ℳ abheben dürfte. Wie oft hatte sie diesen Betrag erhoben, wenn bei ihrem Tode ihren Erben noch 4640 ℳ zufielen?

d) Ein Beamter, dessen Frau eine zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegte Mitgift von 25 000 ℳ eingebracht hatte, mußte zur Bestreitung seiner Haushaltungskosten u. s. w. jährlich am Ende des Jahres 1500 ℳ zu seinem Gehalt hinzunehmen. Nach wie viel Jahren hatte sich die Mitgift auf 12 944 ℳ verringert?

e) Ein Kaufmann hatte bei der Übernahme seines Geschäfts ein zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegtes Vermögen von 69 800 ℳ geerbt. Er verdiente jedoch so wenig, daß er am Ende des ersten und jedes folgenden

Jahres zur Führung seines Haushalts 4350 ℳ abheben mußte. Nach wie viel Jahren starb er, wenn seine Erben nur noch 8510 ℳ Barvermögen vorfanden?

f) Eine Stadt hat augenblicklich 28 800 Einwohner und die Anzahl der Geburten übersteigt die der Todesfälle um $3\frac{1}{4}\%$ der Einwohnerzahl. Der ungünstigen Erwerbsverhältnisse wegen ziehen jedoch jedes Jahr 2142 Personen fort. Nach wie viel Jahren wird die Einwohnerzahl auf 7842 gesunken sein?

50. a) Jemand legte 8000 ℳ auf eine Bank, die 4% berechnet, und bestimmte, daß von dieser Summe zur Erziehung seines Sohnes am Ende eines jeden Vierteljahres 300 ℳ abgehoben werden sollten. Wie groß war der Rest nach 6 Jahren?

b) Wie oft hätte von diesem Kapital (Aufg. a)) eine vierteljährliche Pension von 350 ℳ bezahlt werden können, und welcher Rest wäre nach der letzten Auszahlung geblieben?

c) Ein Vater hinterlegte bei einer Bank, die $4\frac{1}{2}\%$ berechnet, 10 000 ℳ für die Studienkosten seines Sohnes. Welche Summe konnte dieser am Ende eines jeden Monats abheben, wenn er stets die gleiche Summe wegnehmen und in 8 Jahren die Summe verbrauchen durfte?

d) Jemand kaufte ein Haus für 140 000 ℳ und verpflichtete sich, bis zur vollständigen Auszahlung der Kaufsumme 4% Zinsen zu bezahlen. Nach welcher Zeit war er nur noch 60 280 ℳ schuldig, wenn er vierteljährlich am Ende des Vierteljahres 5000 ℳ abtrug?

e) Ein Beamter, der ein zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegtes Vermögen von 60 000 ℳ geerbt hatte, hob von den Zinsen am Ende eines jeden Vierteljahres 400 ℳ ab. Wann hatte er die Erbschaft gemacht, wenn sein Vermögen am 1. April 1900 85 000 ℳ betrug?

f) Ein Kaufmann hatte vor 6 Jahren 12 000 ℳ zu 4% angelegt und am Ende eines jeden Vierteljahres 750 ℳ hinzugefügt. Die Eröffnung eines Konkurrenzgeschäftes vermindert jedoch von nun an seine Einnahme so sehr, daß er trotz der größten Sparsamkeit am Ende eines jeden Monats 150 ℳ abheben muß. Auf welchen Betrag werden seine Ersparnisse nach 4 Jahren wieder gesunken sein?

g) Zur Erziehung eines Knaben, dessen Erbteil in einer zu 4% angelegten Summe von 150 000 ℳ bestand, wurden von den Zinsen am Ende eines jeden Vierteljahres 600 ℳ abgehoben. Wie groß war sein Vermögen nach 16 Jahren, wenn der Wachstumsfaktor für das Vierteljahr

1. gleich 1,01
2. gleich $\sqrt[4]{1{,}04}$

genommen wurde? Bei welcher Berechnungsweise nahm das Vermögen am meisten zu?

δ. Kapital- und Lebens-Versicherung.

51. a) Welche Summe wird durch eine Jahresprämie von 877,25 ℳ versichert, wenn sie nach 18 Jahren ausgezahlt werden soll und $4\frac{1}{4}\%$ berechnet werden?

b) Welche Summe wird durch eine Jahresprämie von 537,45 ℳ versichert, wenn sie nach 30 Jahren ausgezahlt werden soll und $3\frac{3}{4}\%$ berechnet werden?

c) Welche Jahresprämie ist für eine nach 15 Jahren auszuzahlende Summe von 20000 ℳ zu entrichten, wenn $4\frac{1}{2}\%$ berechnet werden?

d) Welche Jahresprämie ist für eine nach 25 Jahren auszuzahlende Summe von 25000 ℳ zu erheben, wenn $3\frac{1}{2}\%$ berechnet werden?

e) Wie oft muß eine Jahresprämie von 290,85 ℳ zur Versicherung eines Kapitals von 16000 ℳ erhoben werden, wenn die Versicherungs-Gesellschaft $3\frac{2}{3}\%$ berechnet?

f) Wann ist eine Versicherungs-Summe von 30000 ℳ auszuzahlen, wenn vom 1. Jan. 1882 ab eine Jahresprämie von 668 ℳ zu entrichten war und $4\frac{1}{4}\%$ berechnet werden?

52. a) Welche nach 15 Jahren auszuzahlende Summe wird unter Berechnung von $4\frac{1}{2}\%$ für das Jahr durch eine Vierteljahrsprämie von 117 ℳ versichert?

b) Welche nach 20 Jahren auszuzahlende Summe wird unter Berechnung von $4\frac{1}{4}\%$ für das Jahr durch eine monatliche Prämie von 20 ℳ versichert?

c) Welche Halbjahrsprämie ist für eine nach 19 Jahren auszuzahlende Summe von 2000 ℳ zu erheben, wenn $3\frac{3}{4}\%$ für das Jahr berechnet werden?

d) Welche Vierteljahrsprämie muß für eine nach 22 Jahren zu erhebende Summe von 12500 ℳ erhoben werden, wenn $4\frac{1}{2}\%$ für das Jahr berechnet werden?

e) Wie lange ist eine monatliche Prämie von 31 ℳ zu entrichten um damit ein Kapital von 6000 ℳ zu versichern, wenn $4\frac{3}{4}\%$ für das Jahr berechnet werden?

f) Wie lange muß ein Arbeiter wöchentlich 1,60 ℳ Prämie bezahlen, um damit eine Summe von 2400 ℳ zu versichern, wenn 5% berechnet werden? (1 Jahr = 52 Wochen!)

53. a) Jemand will sein Leben für 15000 ℳ versichern. Welche Jahresprämie hat er zu entrichten, wenn 3% berechnet werden und seine Lebensdauer auf weitere 35 Jahre abgeschätzt wird?

b) Wie hoch hat ein Beamter sein Leben versichert, wenn er eine Jahresprämie von 257,05 ℳ bezahlt, seine Lebensdauer auf weitere 25 Jahre angenommen wird und die Gesellschaft $3\frac{1}{4}\%$ berechnet?

c) Ein Kaufmann versichert sein Leben für 50000 ℳ und bezahlt dafür eine Jahresprämie von 1064,9 ℳ. Auf wie viel Jahre

wurde seine weitere Lebensdauer eingeschätzt, wenn die Gesellschaft $2\frac{3}{4}\,\%$ berechnet?

54. a) Wie hoch ist in Aufg. 53 b) das Leben versichert, wenn eine Vierteljahrsprämie von 78,06 ℳ erhoben wird?

b) Wie groß müßte in Aufg. 53 a) die Vierteljahrsprämie sein?

55. a) Wie hoch hat ein Kaufmann sein Leben bei einer Gesellschaft versichert, deren Prämien jährlich um 6% abnehmen, wenn er bei einer angenommenen weiteren Lebensdauer von 20 Jahren im ersten Jahre eine Prämie von 2381,5 ℳ bezahlt und die Gesellschaft $2\frac{3}{4}\,\%$ berechnet?

b) Ein Beamter will sein Leben für 20000 ℳ bei einer Gesellschaft versichern, deren Prämien jährlich um 8 % abnehmen. Welche Prämie hat er im ersten Jahre zu bezahlen, wenn die Gesellschaft $2\frac{1}{2}\,\%$ berechnet und seine weitere Lebensdauer auf 33 Jahre angenommen wird?

8. Renten-Rechnung. Tilgung von Anleihen.

56. Welchen Wert hat eine Jahresrente von r ℳ am Tage der ersten Auszahlung, wenn sie n mal ausgezahlt werden soll und $p\,\%$ berechnet werden?

Beispiele. 1. $r = 600$ ℳ, $n = 20$, $p = 3\frac{1}{2}$.
2. $r = 1000$ ℳ, $n = 15$, $p = 4\frac{1}{4}$.
3. $r = 1440$ ℳ, $n = 16$, $p = 3\frac{3}{4}$.
4. $r = 2000$ ℳ, $n = 12$, $p = 3\frac{1}{4}$.

57. a) Ein Herr vermachte seinem Diener eine Jahresrente von 900 ℳ die zum ersten Male 2 Jahre nach seinem Tode ausgezahlt werden soll. Gleich nach dem Tode des Erblassers lösen seine Erben die Rente des Dieners ab. Wie groß ist die Ablösungssumme, wenn angenommen wird, daß die Rente nach 17 Jahren zum letzten Mal zur Auszahlung gelangt, und $4\frac{1}{4}\,\%$ berechnet werden?

b) Welche Summe muß jemand bei einer Rentenbank, die $3\frac{1}{2}\,\%$ berechnet, einzahlen, um sich dadurch eine nach 3 Jahren beginnende Jahresrente von 800 ℳ zu sichern, wenn seine weitere Lebensdauer auf 25 Jahre eingeschätzt worden ist?

c) Ein Kaufmann wünscht sich eine nach 5 Jahren beginnende Jahresrente von 3000 ℳ bei einer Rentenbank, die $3\frac{3}{4}\,\%$ berechnet, durch eine sofortige Einzahlung zu sichern. Wie groß ist diese, wenn seine weitere Lebensdauer auf 20 Jahre abgeschätzt wird?

58. a) Eine Rente von 1000 ℳ war 14 mal hintereinander nicht abgehoben worden. Welche Summe hat der Empfänger am 15ten Auszahlungstage zu fordern, wenn $3\frac{2}{5}\,\%$ berechnet werden?

b) Durch einen Zufall wird 14 Jahre nach dem Tode eines reichen Mannes eine Bestimmung von ihm entdeckt, daß bei der Wiederkehr seines Todestages jedesmal 1500 ℳ an die Armen seiner Vaterstadt verteilt werden sollten. Welche Summe haben die Erben an die Armen-

kasse unter Berechnung von $4\frac{1}{2}$ % für die verflossene Zeit zu bezahlen, wenn sie nach 2 Jahren den von der Stadt angestrengten Prozeß verloren?

c) Ein reicher Mann hatte seinem in Amerika lebenden Neffen eine Jahresrente von 1200 ℳ ausgesetzt. Zwölf Jahre nach seinem Tode kehrte der Neffe, der in der Zwischenzeit die Rente nicht abgehoben hatte, in die Heimat zurück und einigte sich nun mit den Haupterben dahin, daß die Rente unter Berechnung von $3\frac{1}{2}$ % und unter der Annahme abgelöst wurde, daß seine weitere Lebensdauer noch 22 Jahre betrüge. Welche Summe erhielt er?

59. a) Eine Jahresrente, die 25 mal am Ende des Jahres erhoben werden sollte, wird beim Beginn des ersten Jahres unter Berechnung von $3\frac{3}{4}$ % mit 14 440 ℳ abgelöst. Wie groß ist die Rente?

b) Eine Jahresrente, die 15 mal nicht abgehoben worden war, wird am 16ten Auszahlungstermine mit 8521,5 ℳ auf einmal erhoben. Wie groß ist die Rente, wenn $4\frac{1}{2}$ % berechnet werden?

c) Bei der Geburt eines Mädchens wurden 3384,6 ℳ zu 4 % angelegt, um ihm dadurch eine nach 40 Jahren beginnende und 25 mal zur Auszahlung gelangende Jahresrente zu sichern. Wie groß wird die Rente sein?

d) Ein Rittergutsbesitzer hatte bei der Übernahme des Gutes die Verpflichtung übernommen, den beiden unverheirateten Schwestern seines Vaters eine bestimmte Jahresrente auszuzahlen. Nach einiger Zeit wird es ihm möglich, kurz nach der Auszahlung der fälligen Rate seine Verpflichtung abzulösen. Wie groß war die Rente, wenn unter Berechnung von $3\frac{3}{4}$ % und unter der Annahme, daß die Lebensdauer der Schwestern (oder der Überlebenden) noch 20 Jahre betrüge, die Abfindungssumme sich auf 111 180 ℳ belief?

e) Welche Jahresrente wird unter Berechnung von $3\frac{1}{2}$ % durch eine Einlage von 13 874 ℳ gesichert, wenn sie nach 7 Jahren zum ersten Male erhoben und 20 mal ausgezahlt werden soll?

60. a) Eine Jahresrente von 1400 ℳ wird am ersten Zahlungstermin unter Berechnung von $3\frac{3}{4}$ % mit 17 200 ℳ abgelöst. Wie oft sollte sie erhoben werden?

b) Eine Jahresrente von 750 ℳ, die nach 5 Jahren zum ersten Male erhoben werden sollte, wird unter Berechnung von $4\frac{1}{4}$ % mit 6917,5 ℳ abgelöst. Wie oft sollte sie ausgezahlt werden?

c) Eine Jahresrente von 960 ℳ, die 4 mal nicht abgehoben worden war, wird am 5ten Zahlungstermine unter Berechnung von $3\frac{2}{5}$ % mit 15 090 ℳ abgelöst. Wie oft sollte sie erhoben werden?

d) Bei der Geburt eines Knaben wurden 6490 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % angelegt, um damit die Kosten seiner nach 20 Jahren beginnenden Studien-

und Ausbildungszeit zu bestreiten. Auf wie viel Jahre ist die Ausbildungszeit veranschlagt, wenn beim Beginn eines jeden Jahres 1500 ℳ abgehoben werden sollen?

61. a) Ein Kaufmann wünscht sich durch eine einmalige Einzahlung eine nach 15 Jahren beginnende und 12 Jahre dauernde Vierteljahrsrente von 1500 ℳ zu sichern. Wie groß ist die Einzahlung

1. wenn $3\frac{3}{4}\,\%$ für das Jahr,
2. wenn $\frac{15}{16}\,\%$ für das Vierteljahr

berechnet werden?

b) Welche Rente sollte am Ende eines jeden Vierteljahres einem alten Diener ausgezahlt werden, wenn sie mit 6436,3 ℳ unter Berechnung von

1. $4\frac{1}{2}\,\%$ für das Jahr,
2. $1\frac{1}{8}\,\%$ für das Vierteljahr

in der Annahme, daß die fernere Lebensdauer des Dieners noch 10 Jahre betrüge, abgelöst wurde?

c) Jemand hatte am 1. Oktober 1888 bei einer Bank, die $3\frac{1}{2}\,\%$ berechnet, 12 000 ℳ eingelegt, um sich dadurch eine am 1. April 1910 beginnende Vierteljahrsrente von 600 ℳ zu sichern. Wie oft kann die Bank die Rente auszahlen und welchen Rest muß sie der letzten Rente hinzufügen, um den Empfänger nicht zu schädigen?

62. a) Eine Anleihe von 216 600 ℳ, die zu $3\frac{3}{4}\,\%$ aufgenommen wird, soll in 25 Jahren durch gleichgroße, am Ende des Jahres auszuzahlende Raten getilgt (amortisiert) werden. Wie groß wird die Rate sein?

b) Die Tilgung einer Anleihe von 10 615 000 ℳ soll nach 3 Jahren beginnen und in 22 gleichgroßen Jahresraten erfolgen. Wie groß wird die Rate sein, wenn die Anleihe zu $3\frac{1}{2}\,\%$ aufgenommen wird?

c) Die Tilgung einer Anleihe von 1 533 100 ℳ soll in 15 gleichgroßen nach 5 Jahren beginnenden Jahresraten erfolgen. Wie groß wird die Rate sein, wenn die Anleihe zu $3\frac{3}{4}\,\%$ aufgenommen wird?

63. a) Die Tilgung einer zu $4\frac{1}{2}\,\%$ aufgenommenen Anleihe soll in 20 nach 5 Jahren beginnenden Jahresraten von 458 360 ℳ erfolgen. Wie groß ist die Anleihe?

b) Ein Staat nahm zum Ausbau seiner Flotte zu $3\frac{3}{4}\,\%$ eine Anleihe auf, deren Tilgung nach 3 Jahren beginnen und in 25 Jahresraten von 1 677 200 ℳ erfolgen sollte. Wie groß war die Anleihe?

c) Der Preis eines Hauses sollte nach 2 Jahren ausgezahlt werden. Da der Käufer jedoch hierzu nicht imstande war, einigte er sich mit seinem Gläubiger dahin, daß er die Kaufsumme vom Tage des Kaufes ab mit $4\frac{1}{2}\,\%$ verzinsen und in 12 nunmehr beginnenden Jahresraten von 4852 ℳ abtragen durfte. Wie groß war der Preis des Hauses?

64. a) Ein Kaufmann hatte bei der Begründung seines Geschäfts eine

Schuld von 60 300 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ % aufgenommen und sich vorgenommen, die Tilgung nach 4 Jahren mit Jahresraten von 4800 ℳ zu beginnen. In wie viel Raten wollte er seine Schuld tilgen?

b) Die Tilgung einer Schuld von 7500 ℳ, die mit $3\frac{1}{4}$ % zu verzinsen war, begann nach 6 Jahren in Jahresraten von 1045 ℳ. Wie oft war die Auszahlung dieser Raten erforderlich?

c) Die Tilgung einer Anleihe von 693 700 ℳ, die zu $3\frac{1}{2}$ % aufgenommen war, begann nach 7 Jahren. Wie oft mußte eine Jahresrate von 60 000 ℳ ausgezahlt werden, um die Anleihe zu tilgen?

65. a) Ein Staat machte eine Anleihe von 100 Millionen ℳ zu 4 % mit der Bestimmung, daß die Tilgung innerhalb 50 Jahren durch gleichgroße, am Ende eines Vierteljahres jedesmal auszuzahlende Raten erfolgen sollte. Wie groß mußten die Raten sein?

b) Wie groß müssen in Aufgabe a) die Vierteljahrsraten sein, wenn 1 % für das Vierteljahr berechnet werden?

c) Ein Kaufmann nahm eine Schuld zu $4\frac{1}{2}$ % auf und verpflichtete sich, die Tilgung nach 3 Jahren zu beginnen und in 25 Halbjahrsraten von 1467,5 ℳ auszuführen. Wie groß war die Schuld?

d) Eine Stadt nahm zur Ausführung einer Kanalisation eine Anleihe von 6 Millionen ℳ zu $4\frac{1}{4}$ % auf und begann die Tilgung nach 2 Jahren in Halbjahrsraten, die der Zunahme der Bevölkerung entsprechend jedesmal um 4 % stiegen. Wie groß war die erste Rate, wenn die Tilgung in 60 Raten erfolgen sollte?

Achtes Kapitel.

Trigonometrische Aufgaben.

Nr. 36. Aufgaben zur Bestimmung von Winkeln.

1. Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $2 \sin x = 1{,}5$?

b) $5 \cos x = 4$?

c) $8 \operatorname{tg} x = 9$?

d) $8 \operatorname{ctg} x = 9$?

2. Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $5 \sin x = 6 \cos x$?

b) $3 \operatorname{tg} x = 4 \sin x$?

c) $7 \operatorname{ctg} x = 9 \cos x$?

3. Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $\sin x = \sqrt{0{,}9435 \cdot 0{,}8727}$?

b) $\cos x = \frac{4{,}274^3}{12{,}593^2}$?

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt[7]{\frac{24{,}5\sqrt{36{,}49}}{5{,}34^2}}$?

d) $\operatorname{ctg} x = \sqrt[3]{1{,}546^2 + 0{,}943^2}$?

e) $\operatorname{tg} x = \frac{14{,}3 \cdot \sin^2 34^0\,15{,}7'}{57{,}9 \operatorname{ctg} 75^0\,2{,}8'}$?

f) $\cos x = \frac{6 \sin 65^0\,19{,}4' + 7 \operatorname{tg} 39^0\,41{,}2'}{8 \operatorname{ctg} 7^0\,14{,}5'}$?

4.*) Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $4 \sin^2 x + 3 \sin x = 2{,}5$?

b) $5 \cos^2 x + 2 \cos x = 3$?

c) $3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x = 4$?

d) $4 \operatorname{ctg}^2 x - 5 \operatorname{ctg} x = 2$?

5.*) Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $3 \operatorname{tg} x - 4 = 5 \operatorname{ctg} x$?

b) $2 \operatorname{tg} x + 4 = 3 (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)$?

---

*) Der Stern (*) bezeichnet die Gleichung als eine quadratische.

6.*) Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $3 \sin^2 x + 2 \sin x = 4 \cos^2 x$?

b) $5 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 2 \cos x$?

c) $2 \cos^2 x - \sin^2 x = 4 \sin x$?

d) $5 \sin^2 x - 3 = 3 \operatorname{ctg}^2 x$?

e) $5 \sin^2 x - 3 + 2 \operatorname{tg}^2 x = 0$?

f) $8 \cos^2 x + 5 \operatorname{ctg}^2 x = 3$?

7.*) Für welchen Winkel zwischen 0^0 und 90^0 ist

a) $3 \sin x - 4 \cos x = 1$?

b) $0{,}9 \sin x + \cos x = 1{,}1$?

c) $\cos x + 0{,}4 = 2 \sin x$?

d) $2 \sin x - \frac{1}{4} \cos x = 1$?

Nr. 37. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.†)

Sind a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse c, so hat man

I. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$.

II. $J = \frac{1}{2} a b = \frac{1}{2} c \cdot h$.

Für die Hypotenusenabschnitte p und q bestehen die Formeln:

III. $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$ und $p \cdot q = h^2$.

Die Halbmesser der Berührungskreise sind mit den Seiten und Winkeln durch die Gleichungen verbunden:

IV. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{\varrho_a}{s} = \frac{s-c}{\varrho_b} = \frac{s-b}{\varrho_c}$.

$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \frac{\varrho_b}{s} = \frac{s-c}{\varrho_a} = \frac{s-a}{\varrho_c}$.

Aus den entsprechenden Formeln für $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ ($\operatorname{tg} 45^0$!) ergiebt sich:

V. $\varrho = s - c$, $\varrho_a = s - b$, $\varrho_b = s - a$ und $\varrho_c = s$.

Ferner ist

VI. $J = \varrho \cdot s = \varrho_a (s-a) = \varrho_b (s-b) = \varrho_c (s-c)$.

8. a) Aus den Katheten $a = 24$ cm und $b = 32$ cm die Hypotenuse c und den spitzen Winkel α zu berechnen.

b) Aus den Katheten $a = 37{,}5$ cm und $b = 25{,}4$ cm den spitzen Winkel α und die Hypotenusenhöhe h zu berechnen.

c) Aus den Katheten $a = 24$ cm und $b = 32$ cm ihre Projektionen auf die Hypotenuse zu berechnen.

---

†) Aufgaben über die Berechnung von Dreiecken, regelmäßigen Vielecken, Sehnen u. s. w. ohne Benutzung der Winkelfunktionen stehen bei den Logarithmen in Nr. 29 e, f und g Seite 187—193.

d) Aus den Katheten $a = 37{,}5$ cm und $b = 25{,}4$ cm die Halbmesser der Berührungskreise zu berechnen.

e) Aus den Katheten $a = 625{,}84$ cm und $b = 397{,}75$ cm die Halbmesser des um- und eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

9. a) Aus der Hypotenuse $c = 75$ cm und der Kathete $a = 60$ cm den spitzen Winkel α, die andere Kathete b und den Inhalt J zu berechnen.

b) Es sei $c = 46{,}75$ cm und $a = 32{,}25$ cm. Wie groß sind b und α?

c) Es sei $c = 127{,}48$ m und $b = 76{,}45$ m. Wie groß sind a und α?

10. a) Aus der Kathete $a = 44$ cm und dem gegenüberliegenden spitzen Winkel $\alpha = 34^0\,27{,}6'$ die andere Kathete b, die Hypotenuse c und den Inhalt J zu berechnen.

b) Aus der Kathete $a = 275{,}85$ cm und dem anliegenden Winkel $\beta = 54^0\,34{,}3'$ die andere Kathete b, die Hypotenuse c und den Inhalt J zu berechnen.

c) Aus der Kathete $b = 77{,}44$ cm und dem anliegenden Winkel $\alpha = 24^0\,36{,}7'$ die andere Kathete a, die Hypotenuse und den Inhalt zu berechnen.

11. a) Aus der Hypotenuse $c = 347$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 49^0\,41{,}4'$ die beiden Katheten zu berechnen.

b) Aus der Hypotenuse $c = 25$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 37^0\,23{,}4'$ den Inhalt zu berechnen.

c) Aus der Hypotenuse $c = 124{,}88$ cm und dem spitzen Winkel $\beta = 42^0\,45{,}7'$ die Hypotenusenhöhe zu berechnen.

12. a) Aus der Hypotenusenhöhe $h = 25$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 62^0\,19{,}3'$ die drei Seiten und den Inhalt zu berechnen.

b) Aus der Hypotenusenhöhe $h = 62{,}25$ cm und der Kathete $a = 84{,}79$ cm die beiden anderen Seiten und den Winkel zu berechnen.

c*) Aus der Hypotenusenhöhe $h = 19{,}45$ cm und der Hypotenuse $c = 42{,}25$ cm die Katheten und die Winkel zu berechnen.

13. a) Aus dem Inhalt $J = 324$ qcm und der Kathete $a = 32$ cm die beiden anderen Seiten und die Winkel zu berechnen.

b) Aus dem Inhalt $J = 512{,}25$ qcm und dem spitzen Winkel $\alpha = 37^0\,35{,}3'$ die drei Seiten zu berechnen.

2tes Beispiel. $J = 96{,}8$ qcm und $\beta = 41^0\,41{,}4'$.

c) Aus dem Inhalt $J = 482{,}5$ qm und der Hypotenuse $c = 52$ m die Katheten und Winkel zu berechnen.

14. a) Aus der Kathete $a = 16{,}25$ cm und ihrer Projektion auf die Hypotenuse (dem anliegenden Hypotenusenabschnitt) $p = 9{,}75$ cm die andere Kathete, die Hypotenuse, die Winkel und den Inhalt zu berechnen.

b) Aus der Hypotenusenhöhe $h = 23{,}94$ cm und dem Hypotenusenabschnitt $p = 17{,}27$ cm die Seiten und Winkel zu berechnen.

c) Aus der Hypotenuse und einem der Hypotenusenabschnitte die Katheten, die Winkel und den Inhalt zu berechnen.

Beispiele. 1. $c = 81$ cm und $p = 20$ cm.
2. $c = 64$ cm und $p = 36$ cm.
3. $c = 144$ cm und $p = 80$ cm.

d) Aus den Hypotenusenabschnitten $p = 7{,}25$ m und $q = 11{,}45$ m die Katheten, die Winkel und den Inhalt zu berechnen.

15.*) Aus der Kathete $a = 24$ cm und dem nicht-anliegenden Hypotenusenabschnitt $q = 16$ cm die andere Kathete, die Hypotenuse und die Winkel zu berechnen.

2tes Beispiel. $a = 35$ cm und $q = 24$ cm.

16. a) Aus der Summe der beiden Katheten $a + b = 36$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 35^0\,26{,}3'$ die Seiten und den Inhalt zu berechnen.

b) Aus der Differenz der beiden Katheten $a - b = 5$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 49^0\,11{,}7'$ die Seiten und den Inhalt zu berechnen.

c*) Aus der Summe der beiden Katheten $a + b = 20$ cm und der Hypotenuse $c = 15$ cm die Katheten und die Winkel zu berechnen.

d*) Aus der Differenz der beiden Katheten $a - b = 5$ cm und der Hypotenuse $c = 30$ cm die Katheten und die Winkel zu berechnen.

17. a) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Summe $c + a = 41$ cm und den Winkel $\alpha = 52^0\,24{,}3'$. Wie groß sind seine Seiten und sein Inhalt?

b) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Differenz $c - a = 8{,}25$ cm und den Winkel $\alpha = 58^0\,47{,}6'$. Man soll seine Seiten und seinen Inhalt berechnen.

18. a) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $a + b + c = 60$ cm und $\alpha = 23^0\,15{,}8'$. Wie groß sind seine Seiten und sein Inhalt?

b) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $a + b - c = 25$ cm und $\alpha = 62^0\,43{,}5'$. Wie groß sind seine Seiten und sein Inhalt?

c) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $b + c - a = 19$ cm und $\alpha = 42^0\,27{,}3'$. Wie groß sind seine Seiten und sein Inhalt?

19. a) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $b + c - a = 6$ cm und der Halbmesser des inneren Berührungskreises $\varrho = 2$ cm. Wie groß sind seine Seiten und sein Inhalt?

b) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $a + b + c = 120$ cm und $\varrho_a = 20$ cm. Wie groß sind seine Seiten und Winkel?

c) In einem rechtwinkligen Dreieck sei $a + b + c = 70$ cm und $\varrho_b = 15$ cm. Wie groß sind seine Seiten, seine Winkel und sein Inhalt?

20. In einem rechtwinkligen Dreieck sei

a) $\varrho = 7{,}75$ cm und $\alpha = 69^0\,37{,}4'$. Wie groß sind seine Seiten?
b) $\varrho = 3{,}82$ cm „ $\beta = 52^0\,27{,}6'$. „ „ „ „ „ ?
c) $\varrho_a = 15{,}84$ cm „ $\alpha = 27^0\,46{,}8'$. „ „ „ „ „ ?
d) $\varrho_a = 217{,}5$ cm „ $\alpha = 83^0\,29{,}5'$. „ „ „ „ „ ?
e) $\varrho_b = 336$ cm „ $\alpha = 33^0\,33{,}2'$. „ „ „ „ „ ?
f) $\varrho_a = 87{,}4$ cm „ $\beta = 57^0\,12{,}8'$. „ „ „ „ „ ?
g) $\varrho_c = 12{,}5$ cm „ $\alpha = 49^0\,41{,}6'$. „ „ „ „ „ ?
h) $\varrho_c = 31{,}5$ cm „ $\alpha = 68^0\,13{,}4'$. „ „ „ „ „ ?

21. In einem rechtwinkligen Dreieck sei

a) $\varrho = 5$ cm und $\varrho_a = 7$ cm. Wie groß sind seine Seiten u. Winkel?
b) $\varrho = 12{,}5$ cm „ $\varrho_b = 29{,}8$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
c*) $\varrho = 7$ cm „ $\varrho_c = 42$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
d*) $\varrho = 20$ cm „ $\varrho_c = 98$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
e*) $\varrho_a = 35$ cm „ $\varrho_b = 28$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
f*) $\varrho_a = 24{,}8$ cm „ $\varrho_b = 36{,}2$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
g) $\varrho_a = 18$ cm „ $\varrho_c = 29$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
h*) $\varrho = 3$ cm „ $a+b+c = 40$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
i*) $\varrho = 4$ cm „ $a+b+c = 48$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?

Nr. 38. Anwendungen.

22. a) Wie groß sind in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = 37{,}5$ cm und $b = 25{,}4$ cm die Halbierungslinien der spitzen Winkel?

b) In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem spitzen Winkel $\alpha = 62^0\,19{,}4'$ hat die Halbierungslinie dieses Winkels die Länge $w_a = 17{,}5$ cm. Wie groß ist die Hypotenuse?

c) Wie groß ist in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = 24$ cm und $b = 32$ cm die Halbierungslinie des rechten Winkels?

d) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenusenhöhe $h = 8$ cm und die Halbierungslinie seines rechten Winkels $w_\gamma = 9$ cm. Wie groß ist sein Inhalt?

23. a) Von einem Rechteck kennt man die Seite $a = 25$ cm und die Diagonale $d = 36$ cm. Wie groß ist sein Inhalt?

b) Von einem Rechteck kennt man die Seite $a = 64{,}5$ cm und die Diagonale $d = 93{,}5$ cm. Unter welchem Winkel schneiden sich seine Diagonalen?

24. a) Von einem Rhombus kennt man die Seite $a = 16$ cm und den spitzen Winkel $\alpha = 72^0\,19{,}8'$. Wie groß sind seine Diagonalen?

b) Von einem Rhombus kennt man den spitzen Winkel $\alpha = 62^0\,48{,}4'$

und die ihm gegenüberliegende Diagonale $e = 8{,}46$ cm. Wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

c) Von einem Rhombus kennt man die Seite $a = 14{,}3$ cm und den Inhalt $J = 132{,}45$ qcm. Wie groß sind seine Diagonalen?

25. a) Wie hoch ist ein Turm, der in einer Ebene steht und in der Entfernung $d = 120$ m von seinem Fußpunkte unter dem Winkel $\varphi = 15^0\,17{,}5'$ gesehen wird?

b) Ein Baum von $h = 16$ m Höhe steht am Ufer eines Flusses und wird von einem Punkte auf dem anderen Ufer unter dem Winkel $\varphi = 11^0\,20'$ gesehen. Wie weit ist dieser Punkt von dem Baume entfernt?

c) Ein senkrecht aufgestiegener Luftballon wird $d = 500$ m von der Stelle seines Aufstiegs unter dem Winkel $\varphi = 76^0$ gesehen. In welcher Höhe befindet sich der Ballon, wenn der Ort der Beobachtung mit dem Ort des Aufstiegs in einer Ebene liegt?

d) Wie breit ist der Fluß in Aufgabe b, wenn die Verbindungslinie des Punktes mit dem Baume und die Richtung des Flusses mit einander den Winkel $\varphi = 81^0\,25'$ einschließen?

e) Von der $h = 86$ m hohen Plattform eines Leuchtturms wird ein Schiff unter einem Winkel von $\varphi = 8^0\,20'$ gegen die Horizontallinie gesehen. Wie weit ist das Schiff von dem Turme entfernt?

f) Wie lang ist der Schatten einer $l = 8{,}4$ m hohen Telegraphenstange, wenn die Höhe der Sonne $\alpha = 42^0\,45'$ beträgt (wenn die Sonne unter dem Winkel α gegen die Horizontallinie gesehen wird)?

g) Bei einer Höhe der Sonne von $\alpha = 37\frac{1}{2}^0$ wirft eine Telegraphenstange einen Schatten von $l = 10{,}5$ m Länge. Wie hoch ist die Stange?

h) Wie hoch steht die Sonne, wenn ein senkrecht stehender Stab von $l = 2$ m Länge einen $s = 2{,}52$ m langen Schatten wirft?

i) Unter welchem Winkel wird eine Fahnenstange von $h = 10$ m Höhe in einer Entfernung von $a = 24$ m gesehen, wenn das Auge sich in einer Höhe von $l = 1{,}62$ m über dem Erdboden befindet?

k) Ein Luftballon, der mit seiner Gondel 18 m (22 m) hoch ist, erscheint unter einem Gesichtswinkel von $\frac{3}{4}^0$ ($1\frac{1}{2}^0$) und der Erhebungswinkel seiner Gondel beträgt 52^0 ($43\frac{1}{2}^0$). Wie hoch schwebt die Gondel über der Erde und wie weit ist sie von dem Beobachter entfernt?

l) Zwei Orte A und B sind durch eine geradlinige Straße von 8 km Länge und 18^0 östlicher Abweichung von der Nord-Südlinie mit einander verbunden. Von B aus führt die Straße geradlinig in 53^0 östlicher Abweichung von der Nord-Südlinie weiter nach einem 13 km entfernten Orte C. Welche Richtung und Länge müßte eine Straße haben, die A mit C geradlinig verbindet?

26. a) Wie weit ist Berlin (Breite $= 52^0\,30{,}3'$) von der Erdachse

entfernt, wenn der Halbmesser der Erdkugel gleich 6370 km angenommen wird?

b) Wie groß ist unter derselben Annahme der durch Königsberg i. Pr. (Breite $= 54^0\,42{,}8'$) gehende Parallelkreis?

c) Welcher Parallelkreis hat unter derselben Annahme die Länge $l = 5000$ km?

27. a) Welche Strecke legt auf einer schiefen Ebene mit dem Winkel $\varphi = 32^0\,37{,}4'$ eine hinabrollende Kugel in 10 Sekunden zurück?

b) Eine auf einer schiefen Ebene rollende Kugel hat 8 Sekunden nach Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit $v = 36$ m erreicht. Wie groß ist der Winkel der schiefen Ebene?

c) Eine auf einer schiefen Ebene rollende Kugel legt in 8 Sekunden die Strecke $s = 160$ m zurück. Wie groß ist der Winkel der schiefen Ebene?

d) Eine Kugel ist auf einer schiefen Ebene von der Länge $l = 180$ m hinabgerollt und mit einer Geschwindigkeit von $v = 45$ m unten angekommen. Wie groß ist der Winkel der schiefen Ebene?

28. a) Eine Bahnkurve ist ein Bogen eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 500$ m. Um wieviel muß bei einer Spurweite von 1,30 m die äußere Schiene höher liegen als die innere, damit ein Zug ohne Gefahr über die Kurve mit einer Geschwindigkeit von 45 km in der Stunde fahren kann?

b) Unter welchem Winkel muß eine Kurve einer Radfahrbahn angelegt werden, wenn der Halbmesser 48 m beträgt, damit die Stelle mit einer Geschwindigkeit von $\frac{3}{4}$ km in der Minute durchfahren werden kann?

29. a) Wo befindet sich nach 10 Sekunden eine Kugel, die unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 41^0\,15'$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 300$ m in der Sekunde abgeschossen worden ist?†)

b) Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 450$ m abgeschossene Kugel besitzt nach 8 Sekunden die horizontale Entfernung von 1800 m. In welcher Höhe befindet sie sich dann?

c) Eine mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 350$ m unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 30^0$ abgeschossene Kugel trifft ein Haus in einer Höhe von 12 m. Wie weit ist das Haus von dem Geschütz entfernt, wenn beide in der Horizontalebene stehen?

d) Wie hoch steigt und wie weit fliegt eine Kugel, die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v = 275$ m unter dem Erhebungswinkel $\alpha = 45^0$ abgeschossen wird?

---

†) Bezeichnet x die horizontale Entfernung und y die Höhe der Kugel nach t Sekunden, so ist

$$x = vt\cos\alpha \quad \text{und} \quad y = vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

30. a) Zwei Punkte sind $c = 26$ m von einander entfernt und besitzen von der Ebene eines Spiegels die Abstände $a = 4$ m und $b = 9$ m. Wie groß ist der Einfallswinkel des Lichtstrahls, der von dem ersten Punkte ausgeht und nach dem zweiten reflektiert wird?

b) Ein Stein, der in einem Wasserbecken mit horizontalem Boden und 2 m Wasserhöhe liegt, wird unter dem Winkel $\alpha = 62^0\,15'$ gegen den Horizont gesehen. Um wie viel ist sein Bild gegen seine Lage verschoben? (Brechungsexponent des Wassers $= \frac{4}{3}$!)

c) Wie hoch steht in diesem Becken das Wasser, wenn der Winkel α gleich $58^0\,24'$ und das Bild des Steines um 32,85 cm gegen seine Lage verschoben ist?

d) Welche Verschiebung erleidet ein Lichtstrahl beim Durchgang durch eine 6 cm dicke Glasplatte, wenn er unter dem Winkel $\alpha = 44^0\,45'$ auffällt? (Brechungsexponent des Glases $= \frac{3}{2}$!)

Nr. 39. Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

Die zur Grundlinie a gehörige Höhe h_a zerlegt das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse b (Schenkel!), den Katheten h_a' und $\frac{a}{2}$ und den spitzen Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ und β. Für den Inhalt ergeben sich die Formeln:

$$J = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{etg}\frac{\alpha}{2} = h_a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

31. a) Aus der Grundlinie $a = 54{,}85$ cm und dem Schenkel $b = 37{,}69$ cm die Winkel und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

b) Aus der Grundlinie $a = 64{,}872$ m und dem Schenkel $b = 376{,}8$ m die Winkel und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

32. a) Ein gleichschenkliges Dreieck habe die Grundlinie $a = 12{,}14$ cm und an der Spitze den Winkel $\alpha = 27^0\,41{,}5'$. Wie groß sind seine Schenkel und sein Inhalt?

b) Ein gleichschenkl. Dreieck habe die Grundlinie $a = 11{,}11$ cm und an der Spitze den Winkel $\alpha = 32^0\,43{,}6'$. Wie groß sind seine Schenkel und seine Höhen?

c) Ein gleichschenkl. Dreieck habe die Grundlinie $a = 36{,}96$ cm und an der Grundlinie den Winkel $\beta = 64^0\,17{,}2'$. Wie groß sind seine Schenkel und seine Höhen?

33. a) Ein gleichschenkl. Dreieck habe den Schenkel $b = 19{,}56$ cm und an der Grundlinie den Winkel $\beta = 43^0\,17{,}4'$. Wie groß ist seine Grundlinie und sein Inhalt?

b) Ein gleichschenkl. Dreieck habe den Schenkel $b = 256$ cm und an der Grundlinie den Winkel $\beta = 71^0\,43{,}8'$. Wie groß sind seine Grundlinie und seine Höhen?

c) Ein gleichschenkl. Dreieck habe den Schenkel $b = 42{,}45$ cm und an der Spitze den Winkel $\alpha = 114^0\,26{,}6'$. Wie groß ist seine Grundlinie und sein Inhalt?

34. a) Ein gleichschenkl. Dreieck habe die Grundlinie $a = 9{,}375$ m und die zu ihr gehörige Höhe $h_a = 7{,}843$ m. Wie groß sind seine Winkel und sein Inhalt?

b) Ein gleichschenkl. Dreieck habe die Grundlinie $a = 83{,}25$ cm und die zu den Schenkeln gehörige Höhe $h_b = 66{,}40$ cm. Wie groß ist sein Winkel an der Spitze?

c) Ein gleichschenkl. Dreieck habe den Schenkel $b = 14{,}6$ m und die zur Grundlinie gehörige Höhe $h_a = 9{,}145$ m. Wie groß ist seine Grundlinie und sein Winkel an der Spitze?

d) Ein gleichschenkl. Dreieck habe den Schenkel $b = 27{,}85$ cm und die zu ihr gehörige Höhe $h_b = 21{,}45$ cm. Wie groß ist seine Grundlinie und sein Inhalt?

35. In einem gleichschenkl. Dreieck sei

a) die Höhe $h_a = 347{,}26$ cm und der Winkel $\alpha = 46^0\,17'$.
b) „ „ $h_a = 65{,}8$ „ „ „ „ $\beta = 61^0$.
c) „ „ $h_b = 34{,}25$ „ „ „ „ $\alpha = 104^0\,19'$.
d) „ „ $h_b = 125{,}4$ m „ „ „ $\beta = 72^0\,15'$.

Wie groß sind seine Seiten?

36. Ein gleichschenkl. Dreieck habe

a) den Inhalt $J = 25\,080$ qcm und die Grundlinie $a = 240$ cm.
b) „ „ $J = 369{,}6$ qm „ den Schenkel $b = 28{,}1$ m.
c) „ „ $J = 1218$ qm „ die Höhe $h_a = 60{,}9$ „.
d) „ „ $J = 245{,}59$ qcm „ „ „ $h_b = 13{,}2$ cm.
e) „ „ $J = 62\,197$ qm „ den Winkel $\alpha = 118^0\,49{,}2'$.
f) „ „ $J = 101\,740$ qm „ „ „ $\beta = 39^0\,2{,}2'$.

Wie groß sind seine Winkel, bez. bei e) und f) seine Seiten?

37. In einem gleichschenkl. Dreieck sei

a) die Summe $a + b = 20$ cm und der Winkel $\alpha = 38^0\,56{,}6'$.
b) „ Differenz $a - b = 217{,}73$ cm „ „ „ $\alpha = 89^0\,46{,}6'$.
c) „ Summe $a + 2b = 734{,}88$ cm „ „ „ $\alpha = 106^0\,16'$.
d) „ Differenz $2b - a = 26{,}198$ m „ „ „ $\alpha = 49^0\,24{,}8'$.

Wie groß sind seine Seiten?

38. Ein gleichschenkl. Dreieck sei einem Kreise mit dem Halbmesser

a) $r = 25$ cm eingeschrieben und habe die Grundlinie $a = 37$ cm.
b) $r = 49{,}75$ cm „ „ „ den Schenkel $b = 71{,}45$ cm.
c) $r = 8{,}945$ m „ „ „ „ Winkel $\alpha = 83^0\,42{,}6'$.

Wie groß ist sein Inhalt?

39. Ein gleichschenkl. Dreieck mit
a) der Grundlinie $a = 42{,}8$ cm sei einem Kreise mit dem Halbm. $\varrho = 17{,}4$ cm
b) dem Schenkel $b = 19{,}4$ m „ „ „ „ „ „ $\varrho = 4{,}3$ m
c) dem Winkel $\alpha = 77^0 45'$ „ „ „ „ „ „ $\varrho = 25{,}6$ cm
umgeschrieben. Wie groß ist sein Inhalt?

40. a) Der Halbmesser des Berührungskreises, der die Grundlinie eines gleichschenkl. Dreiecks von außen berührt, habe die Länge $\varrho_a = 48{,}5$ cm. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze $\alpha = 104^0 26{,}4'$ ist?

b) Der Halbmesser des Berührungskreises, der einen Schenkel eines gleichschenkl. Dreiecks von außen berührt, habe die Länge $\varrho_b = 23{,}75$ cm und der Winkel an der Spitze sei $\alpha = 74^0 19{,}8'$. Wie groß sind die Seiten des Dreiecks?

Nr. 40. Anwendungen.

41. a) Ein Rhombus mit der Seite $a = 377{,}64$ cm habe den spitzen Winkel $\alpha = 46^0 17'$. Wie groß sind seine Diagonalen?

b) Ein Rhombus mit der Seite $a = 145$ cm habe den Inhalt $J = 4896$ qcm. Wie groß sind seine Diagonalen?

c) Ein Rhombus mit dem spitzen Winkel $\alpha = 79^0 9'$ habe den Inhalt $J = 99{,}22$ qcm. Wie groß ist seine Seite?

42. a) Die Diagonalen eines Rechtecks seien 408,26 cm lang und schneiden sich unter einem Winkel von $73^0 44'$. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

b) Ein Rechteck, dessen Diagonalen sich unter einem Winkel von $39^0 7'$ schneiden, habe den Inhalt $J = 5152$ qcm. Wie groß sind seine Seiten?

c) In einem Rechteck mit dem Inhalt $J = 883{,}8$ qcm steht die Diagonale zu der kleineren Seite in dem Verhältnis $5 : 2$. Wie groß sind seine Seiten?

d) Die Diagonalen eines Rechtecks mit dem Inhalt 17 400 qm sind 186,964 m groß. Wie groß sind seine Seiten?

43. Wie groß ist eine Sehne, die in einem Kreise mit dem Halbmesser
a) $r = 17$ cm zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 56^0 8{,}4'$ gehört?
b) $r = 35{,}7$ cm „ „ „ $\alpha = 109^0 5'$ „
c) $r = 215$ m „ „ „ $\alpha = 144^0 26{,}2'$ „

44. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel, der in einem Kreise mit dem Halbmesser
a) $r = 80{,}8$ cm zu der Sehne $l = 149{,}19$ cm gehört?
b) $r = 25$ m „ „ „ $l = 48$ m „
c) $r = 32{,}25$ cm „ „ „ $l = 18{,}75$ cm „

45. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, in welchem zu dem
a) Mittelpunktswinkel $\alpha = 24^0\,16{,}7'$ die Sehne $l = 21$ cm gehört?
b) „ $\alpha = 152^0\,39{,}2'$ „ „ $l = 58{,}3$ cm „
c) Umfangswinkel $\varphi = 48^0\,35{,}4'$ „ „ $l = 4{,}5$ m „
d) „ $\varphi = 79^0\,27{,}8'$ „ „ $l = 23{,}8$ cm „

46. a) Wie groß ist die Sehne eines Kreises, die zu dem Bogen $b = 486{,}55$ cm und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 112^0\,24{,}5'$ gehört?

b) Wie groß ist die Sehne, die in einem Kreise mit dem Inhalt $J = 7335{,}2$ qm einen Bogen von der Länge $b = 55{,}105$ m begrenzt?

47. Eine Sehne sei die mittlere Proportionale zu dem Durchmesser und dem Halbmesser. Wie groß ist der zugehörige Umfangswinkel?

48. a) Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Tangenten an einen Kreis mit dem Halbmesser $r = 12{,}5$ cm, wenn ihre Berührungssehne die Länge $l = 8{,}5$ cm besitzt, und wie weit ist ihr Schnittpunkt von dem Mittelpunkte des Kreises entfernt?

b) Zwei sich unter $52\frac{1}{2}^0$ schneidende Tangenten eines Kreises besitzen die Länge $t = 34{,}5$ cm. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

c) Der Ausgangspunkt zweier Tangenten teilt den zugehörigen Durchmesser in dem Verhältnis 3 : 2. Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten?

d) Zwei Tangenten eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 15$ cm begrenzen mit den Berührungsradien ein Viereck mit dem Inhalt $J = 240$ qcm. Wie groß ist ihr Winkel?

e) Zwei Tangenten eines Kreises besitzen eine Berührungssehne von der Länge $l = 42{,}43$ cm und bilden mit den Berührungsradien ein Viereck mit dem Inhalt $J = 900$ qcm. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises und unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten?

49. Einem Kreise mit dem Halbmesser
a) $r = 25{,}36$ cm sei ein regelmäßiges 13-Eck
b) $r = 19{,}72$ „ „ „ „ 11-Eck
c) $r = 27$ m „ „ „ 8-Eck
eingeschrieben. Wie groß ist seine Seite und sein Inhalt?

50. Einem Kreise mit dem
a) Umfang $u = 450$ cm sei ein regelmäßiges 12-Eck
b) Inhalt $J = 830$ qcm „ „ „ 17-Eck
eingeschrieben. Wie groß ist der Inhalt des Vielecks?

51. Einem Kreise mit dem
a) Halbmesser $\varrho = 38{,}37$ cm sei ein regelmäßiges 7-Eck
b) Umfang $u = 96{,}25$ cm „ „ „ 20-Eck
c) Inhalt $J = 637{,}4$ qcm „ „ „ 15-Eck
umgeschrieben. Wie groß ist die Seite des Vielecks?

52. a) Ein regelmäßiges 5-Eck habe die Seite $a = 13{,}8$ m. Wie groß ist sein Inhalt?

b) Ein regelmäßiges 13-Eck habe die Seite $a = 250$ cm. Wie groß ist der Halbmesser des umgeschriebenen, bez. des eingeschriebenen Kreises?

53. Der Inhalt eines regelmäßigen

a) 17-Ecks beträgt 3273,6 qcm. Wie groß ist seine Seite?

b) 13-Ecks „ 8240,2 qcm. „ „ „ „ „ ?

c) 25-Ecks „ 2010,2 qcm. „ „ „ „ „ ?

54. Der Inhalt eines regelmäßigen 9-Ecks beträgt 6037 m. Wie groß sind die Halbmesser des um- und eingeschriebenen Kreises?

55. Wie groß ist der Kreisring zwischen den Kreisen, die einem regelmäßigen 25-Eck mit dem Inhalt 40 qm um- und eingeschrieben sind?

56. Um wie viel qm unterscheiden sich die Inhalte eines regelmäßigen 10-Ecks und 15-Ecks, wenn beide den Umfang 432 m besitzen?

57. Einem regelmäßigen 10-Eck sei ein Kreis mit dem Inhalt 201,60 qcm eingeschrieben. Um wie viel qcm ist das 10-Eck kleiner als der umgeschriebene Kreis?

58. An einem Quadrat mit der Seite $a = 6{,}53$ cm werden die Ecken so abgestumpft, daß ein regelmäßiges 8-Eck entsteht. Wie groß ist der Inhalt des dem 8-Eck umgeschriebenen Kreises?

59. An einem regelmäßigen 10-Eck werden die Ecken so abgestumpft, daß ein regelmäßiges 20-Eck entsteht. Wie groß ist die Seite dieses 20-Ecks?

60. Wie groß sind die Diagonalen eines regelmäßigen 5-Ecks, das

a) einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 16$ cm eingeschrieben ist?

b) einem Kreise mit dem Halbmesser $\varrho = 12$ cm umgeschrieben ist?

c) den Umfang $u = 175$ cm besitzt?

d) den Inhalt $J = 840$ qcm besitzt?

61. Die Diagonalen eines regelmäßigen 5-Ecks seien 536,29 cm groß. Welchen Inhalt besitzt das 5-Eck?

62. Wie groß ist ein Kreisausschnitt, der in einem Kreise mit dem Halbmesser

a) $r = 25{,}4$ cm zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 45^0$ gehört?

b) $r = 285{,}6$ cm „ „ „ $\alpha = 87^0\,25'$ „ ?

c) $r = 47{,}25$ m „ „ „ $\alpha = 122^0\,47{,}5'$ „ ?

63. a) Wie groß ist eine Sehne, die zu einem Kreisausschnitt mit dem Inhalt $A = 8950$ qcm und zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 144^0\,29'$ gehört?

b) Wie groß ist eine Sehne, die in einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 62{,}48$ cm zu einem Kreisausschnitt mit dem Inhalt $A = 3114{,}4$ qcm gehört?

c) Wie groß ist eine Sehne, die zu dem Bogen $b = 19{,}62$ cm gehört, wenn der zugehörige Kreisausschnitt den Inhalt $A = 98{,}09$ qcm besitzt?

64. Wie groß ist jeder der Kreisabschnitte über den Seiten eines regelmäßigen

a) 8-Ecks, wenn der Halbm. des umgeschr. Kreises $r = 24$ cm ist?
b) 15-Ecks, „ „ „ „ eingeschr. „ $\varrho = 54{,}68$ cm „ ?
c) 17-Ecks, „ dessen Inhalt $J = 507$ qm ist?

65. Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, der in einem Kreise mit dem Halbmesser

a) $r =$ 25,02 cm zu dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 36^0\,24{,}3'$ gehört?
b) $r =$ 62,48 cm „ „ „ $\alpha = 91^0\,25{,}2'$ „ ?
c) $r =$ 5 m „ „ Bogen $b =$ 7 m „ ?
d) $r =$ 84,25 m „ „ „ $b =$ 212,46 m „ ?
e) $r =$ 65 cm „ der Sehne $l =$ 77,71 cm „ ?
f) $r =$ 483,2 m „ „ „ $l =$ 521,66 m „ ?

66. Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, der durch den Bogen

a) $b = 283{,}08$ m und den Mittelpunktswinkel $\alpha = 29^0\,36{,}3'$ bestimmt ist?
b) $b = 737{,}12$ m „ „ „ $\alpha = 79^0\,16{,}2'$ „ „

67. Welchen Inhalt hat ein Kreisabschnitt, dessen Sehne 24 cm groß ist und 16 cm vom Mittelpunkte des Kreises absteht?

68. Wie groß ist ein Kreisabschnitt, der zu dem Ausschnitt

a) $A = 196\,400$ qcm und dem Mittelpunktswinkel $\alpha =$ $79^0\,16{,}6'$ gehört?
b) $A =$ 8 950 qcm „ „ „ $\alpha = 142^0\,48'$ „ ?
c) $A =$ 3 114 qcm „ „ Bogen $b =$ 99,69 cm „ ?
d) $A = 133\,130$ qm „ „ „ $b = 551{,}05$ m „ ?

69. a) Über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $c = 324$ cm und dem spitzen Winkel $\alpha = 36^0$ seien die Halbkreise gezeichnet und ihre Flächen durch den Halbkreis über der Hypotenuse zerlegt worden. Welchen Inhalt besitzt jede der dabei entstandenen mondförmigen Figuren?

b) Wie groß ist jede dieser Figuren, wenn das Dreieck die Katheten $a = 24$ cm und $b = 32$ cm besitzt?

c) Wie groß ist jede dieser Figuren, wenn das Dreieck die Hypotenuse $c = 624$ cm und die Hypotenusenhöhe $h = 156$ cm besitzt?

d) Wie groß ist jede dieser Figuren, wenn die Hypotenuse durch die Höhe in die Abschnitte $p = 4{,}02$ cm und $q = 55{,}98$ cm zerlegt wird?

e) Den Inhalt des Dreiecks in Aufg. a—d zu berechnen und mit den Inhalten der zugehörigen mondförmigen Figuren zu vergleichen. (Satz des Hippokrates!)

Nr. 41. Funktionen von Winkeln zwischen 0° und 180°.

70. Wie groß ist

a) $\log \sin 118^0\,25{,}4' + \log(-\cos 125^0\,57{,}3') + \log(-\operatorname{tg} 147^0\,13{,}8')$?

b) $\log(-\operatorname{ctg} 126^0\,15{,}7') - \log(-\operatorname{tg} 153^0\,0{,}5') - \log(-\cos 114^0\,17{,}2')$?

c) $\log(-\cos 97^0\,15{,}9') + \log(-\operatorname{ctg} 169^0\,41{,}4') - \log \sin 93^0\,47{,}2'$?

71. Wie groß ist

a) $\sin 97^0\,12{,}5' + \cos 119^0\,11{,}4' + \operatorname{ctg} 102^0\,33{,}4'$?

b) $\sin 153^0\,40{,}3' - \operatorname{ctg} 144^0\,22{,}7' - \operatorname{tg} 124^0\,14{,}2'$?

c) $\dfrac{\cos 142^0\,57{,}4' \cdot \operatorname{ctg} 94^0\,19{,}2'}{\sin 149^0\,52{,}4'}$?

d) $\dfrac{\operatorname{tg} 92^0\,11{,}5' \cdot \operatorname{ctg} 125^0\,17{,}8'}{\sin 135^0\,14{,}9' \cdot \cos 172^0\,13{,}5'}$?

72. Für welchen Winkel x zwischen 0° und 180° ist

a) $\sin x = \frac{2}{3}$? (Zwei Lösungen.)

b) $\cos x = -\sqrt{\frac{11}{12}}$?

c) $\operatorname{tg} x = -\left(\frac{4{,}37}{3{,}96}\right)^2$?

d) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt[3]{27{,}94}$?

e) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{13}{9}$? (Zwei Lösungen.)

f) $\cos^2 x = \sqrt{0{,}01\sqrt[3]{0{,}25}}$? (Zwei Lösungen.)

g) $\operatorname{ctg}^3 x = -6{,}253$?

73. Welche Winkel zwischen 90° und 180° genügen den Gleichungen 4—7 in Nr. 36?

Nr. 42. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

a. Anwendung des Sinus-Satzes.

Es ist

I. $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c.$

II. $h_a = b \sin\gamma = c \sin\beta = a \dfrac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}.$

III. $J = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \dfrac{1}{2} a^2 \dfrac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}.$

IV. $\begin{cases} a = 2r \sin\alpha, \quad b = 2r \sin\beta, \quad c = 2r \sin\gamma \\ h_a = 2r \sin\beta \sin\gamma \text{ und } J = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \end{cases}$

74. Aus einer Seite und zwei Winkeln eines Dreiecks die beiden anderen Seiten zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 44{,}75$ cm, $\alpha = 59^0\ 9{,}8'$ und $\beta = 41^0\ 18{,}2'$.
2. $a = 98{,}42$ cm, $\beta = 50^0\ 2{,}3'$ „ $\gamma = 38^0\ 51{,}1'$.
3. $a = 472{,}94$ cm, $\beta = 62^0\ 13{,}5'$ „ $\gamma = 47^0\ 31{,}7'$..

75. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem Gegenwinkel der größeren von ihnen die dritte Seite zu berechnen

Beispiele. 1. $a = 30$ cm, $b = 28$ cm und $\alpha = 67^0\ 22{,}8'$.
2. $a = 37{,}1$ cm, $b = 35{,}7$ cm „ $\alpha = 61^0\ 55{,}7'$.
3. $a = 25$ cm, $b = 17$ cm „ $\alpha = 118^0\ 4{,}3'$.

76. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem Gegenwinkel der kleineren von ihnen die dritte Seite zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 65$ cm, $b = 70$ cm und $\alpha = 52^0\ 29{,}4'$.
2. $b = 119$ cm, $c = 155$ cm „ $\beta = 47^0\ 42{,}8'$.
3. $a = 24{,}59$ cm, $c = 39{,}25$ cm „ $\alpha = 31^0\ 15{,}6'$.

77. Aus einer Seite und zwei Winkeln eines Dreiecks seine Höhen zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 44{,}75$ cm, $\beta = 59^0\ 9{,}8'$ und $\gamma = 79^0\ 32'$.
2. $a = 98{,}15$ cm, $\beta = 53^0\ 2{,}5'$ „ $\gamma = 38^0\ 51{,}7'$.

78. Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen aus den Stücken

a) $a = 65$ cm, $\alpha = 102^0\ 19{,}4'$ und $\beta = 42^0\ 43{,}4'$.
b) $a = 146{,}8$ cm, $b = 97{,}6$ cm „ $\alpha = 65^0\ 37{,}6'$.
c) $a = 219{,}5$ cm, $b = 315{,}4$ cm „ $\alpha = 57^0\ 25{,}2'$.
d) $a = 75{,}45$ cm, $c = 61{,}75$ cm „ $h_b = 47{,}33$ cm.

79. Aus den Stücken eines Dreiecks

a) $a = 52$ cm, $h_b = 48$ cm und $h_c = 43$ cm
b) $\alpha = 43^0 27{,}5'$, $h_b = 87{,}5$ cm „ $h_c = 96{,}8$ cm
c) $\alpha = 53^0\ 16{,}4'$, $h_a = 36$ cm „ $h_b = 43$ cm
d) $\alpha = 114^0\ 21{,}8'$ $h_a = 29{,}58$ cm „ $h_c = 46{,}25$ cm

die Seiten und den Inhalt zu berechnen.

80. Aus den Seiten eines Dreiecks

1. $a = 19$ cm, $b = 23$ cm und $c = 13$ cm
2. $a = 87{,}4$ cm, $b = 66{,}8$ cm „ $c = 93{,}8$ cm
3. $a = 27{,}15$ cm, $b = 33{,}78$ cm „ $c = 36{,}07$ cm

zuerst den Inhalt und dann die Winkel zu berechnen.

81. Aus dem Inhalt und zwei Winkeln eines Dreiecks seine Seiten zu berechnen.

Beispiele. 1. $J = 425{,}8$ qcm, $\alpha = 79^0\ 45'$ und $\beta = 44^0\ 16{,}4'$.
2. $J = 214{,}9$ qcm, $\alpha = 19^0\ 26{,}4'$ „ $\beta = 112^0\ 26{,}8'$.
3. $J = 8840$ qcm, $\alpha = 76^0\ 12{,}3'$ „ $\beta = 83^0\ 17{,}9'$.

82. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

1. $J = 80$ qcm, $h_a = 12$ cm und $\beta = 65^0\,49{,}2'$
2. $J = 219{,}8$ qcm, $h_b = 17$ cm „ $\gamma = 85^0\,4{,}5'$
3. $J = 2200$ qcm, $h_c = 72$ cm „ $\alpha = 78^0\,12{,}8'$

seine Seiten zu berechnen.

83. Aus zwei Winkeln eines Dreiecks und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises die Seiten zu berechnen.

Beispiele. 1. $\alpha = 43^0\,29{,}3'$, $\beta = 95^0\,43{,}4'$ und $r = 65$ cm.
2. $\alpha = 96^0\,25{,}6'$, $\beta = 26^0\,19{,}7'$ „ $r = 8{,}75$ cm.
3. $\alpha = 81^0\,54{,}5'$, $\beta = 41^0\,32{,}5'$ „ $r = 259{,}4$ cm.

84. a) Aus den Winkeln $\alpha = 56^0\,47{,}3'$ und $\beta = 62^0\,53{,}5'$ und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $r = 12$ cm den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

b) Aus dem Inhalt eines Dreiecks $J = 524{,}7$ qcm und den Winkeln $\alpha = 73^0\,22{,}5'$ und $\beta = 69^0\,27{,}4'$ zuerst den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und dann die Seiten zu berechnen.

c) Aus der Summe oder Differenz zweier Seiten eines Dreiecks und den Winkeln (zuerst den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises und dann) den Inhalt zu berechnen.

Beispiele. 1. $b + c = 54$ cm, $\alpha = 35^0\,12'$ und $\beta = 78^0\,36'$.
2. $b - c = 2{,}75$ cm, $\alpha = 62^0\,17{,}4'$ „ $\beta = 66^0\,29{,}3'$.
3. $a - b = 19{,}25$ cm, $\alpha = 57^0\,23{,}6'$ „ $\beta = 48^0\,12{,}7'$.

b. Anwendung der Mollweideschen Gleichungen und des Tangential-Satzes.

Es ist

$$\text{I.} \quad \begin{cases} (b + c) : a = \cos\dfrac{\beta - \gamma}{2} : \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ (b - c) : a = \sin\dfrac{\beta - \gamma}{2} : \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{cases},$$

und

$$\text{II.} \quad (b + c) : (b - c) = \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

85. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 49$ cm, $b + c = 72$ cm und $\alpha = 67^0\,19{,}4'$
b) $b = 9{,}375$ cm $a + c = 15{,}284$ cm „ $\beta = 72^0\,15{,}6'$
c) $a = 845$ cm $b + c = 2124$ cm „ $\beta - \gamma = 18^0\,49{,}4'$
d) $a = 225$ cm $b - c = 5$ cm „ $\alpha = 83^0\,54{,}4'$
e) $b = 319{,}5$ cm $c - a = 48$ cm „ $\gamma - \alpha = 7^0\,16{,}8'$
f) $c = 17{,}25$ cm $a - b = 2{,}45$ cm „ $\alpha - \beta = 17^0\,23{,}6'$

die drei Seiten und Winkel zu berechnen.

86. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 13{,}25$ cm, $b + c = 29{,}55$ cm und $r = 8{,}25$ cm
b) $b = 35$ cm, $a + c = 95{,}6$ cm „ $r = 25{,}4$ cm
c) $a = 78{,}2$ cm, $b - c = 19{,}5$ cm „ $r = 40$ cm
d) $c = 15{,}5$ cm, $a - b = 2{,}7$ cm „ $r = 7{,}8$ cm

seine Winkel und seinen Inhalt zu berechnen.

87. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $b + c = 52{,}95$ cm, $r = 16$ cm und $\alpha = 66^0\,47{,}6'$
b) $b - c = 8{,}72$ cm, $r = 25$ cm „ $\alpha = 72^0\,15{,}4'$
c) $a - c = 5{,}37$ cm, $r = 10{,}25$ cm „ $\beta = 52^0\,49{,}8'$
d) $a - b = 33{,}75$ cm, $r = 51{,}25$ cm „ $\gamma = 61^0\,13{,}2'$

seine Seiten zu berechnen.

88. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 25$ cm, $b + c = 40$ cm und $h_b + h_c = 37$ cm
b) $a = 14{,}75$ cm, $b - c = 3{,}95$ cm „ $h_c - h_b = 3{,}64$ cm
c) $b = 19{,}15$ cm, $a + c = 29{,}25$ cm „ $h_a + h_c = 27{,}75$ cm
d) $c = 540$ cm, $a - b = 126$ cm „ $h_b - h_a = 90$ cm

seine Winkel und seinen Inhalt zu berechnen.

89. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 34{,}40$ cm, $\alpha = 41^0\,18{,}2'$ und $h_b + h_c = 63{,}37$ cm
b) $a = 61{,}75$ cm, $\alpha = 38^0\,51{,}1'$ „ $h_c - h_b = 13{,}70$ cm
c) $b = 73{,}5$ cm, $\beta = 57^0\,12{,}2'$ „ $h_a + h_c = 122{,}8$ cm
d) $c = 81{,}5$ cm, $\gamma = 69^0\,51{,}6'$ „ $h_a - h_b = 12{,}77$ cm

seine Seiten und Winkel zu berechnen.

90. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 87$ cm, $b = 71$ cm und $\gamma = 44^0\,35{,}6'$
b) $a = 52{,}8$ cm, $c = 75{,}2$ cm „ $\beta = 56^0\,55{,}8'$
c) $b = 25{,}25$ cm, $c = 28{,}75$ cm „ $\alpha = 35^0\,44{,}2'$
d) $a = 72$ cm, $b = 47$ cm „ $\alpha - \beta = 38^0\,29'$
e) $a = 86$ cm, $c = 66$ cm „ $\alpha - \gamma = 26^0\,35'$
f) $b = 77{,}3$ cm, $c = 63{,}7$ cm „ $\beta - \gamma = 15^0\,43{,}6'$
g) $a + b = 156{,}48$ cm, $\alpha = 78^0\,5{,}2'$ cm „ $\beta = 54^0\,53'$
h) $a - b = 3{,}32$ cm, $\alpha = 52^0\,8{,}4'$ cm „ $\beta = 47^0\,39{,}2'$
i) $b - c = 22{,}97$ cm, $\alpha = 36^0\,9{,}2'$ cm „ $\beta = 113^0\,18'{,}8'$

die nicht-gegebenen Seiten und Winkel zu berechnen.

91. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 81$ cm, $\alpha = 58^0\,27{,}2'$ und $b : c = 9 : 7$
b) $h_a = 16{,}17$ cm, $\beta - \gamma = 11^0\,51{,}4'$ „ $b : c = 23 : 19$
c) $J = 617{,}8$ qcm, $\beta - \gamma = 10^0\,16{,}6'$ „ $b : c = 19 : 16$

die nicht-gegebenen Seiten und Winkel zu berechnen.

92. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 64$ cm, $\alpha = 46^0\,37{,}4'$ und $h_b : h_c = 9 : 7$

b) $h_a = 42$ cm, $\beta - \gamma = 15^0\,48{,}6'$ „ $h_b : h_c = 8 : 11$

c) $J = 385$ qcm, $\beta - \gamma = 23^0\,19{,}2'$ „ $h_b : h_c = 13 : 17$

die Winkel und Seiten zu berechnen.

93. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 25$ cm, $b = 18$ cm und $h_a = 15$ cm

b) $a = 36$ cm, $b = 41$ cm „ $h_b = 30$ cm

c) $b = 38{,}5$ cm, $c = 33{,}7$ cm „ $h_c = 35{,}2$ cm

d) $J = 110$ qcm, $a = 17$ cm „ $\gamma = 53^0\,58'$

e) $J = 2179$ qcm, $b = 85$ cm „ $\alpha = 57^0\,12{,}2'$

f) $J = 60$ qcm, $a = 15$ cm „ $b = 12$ cm

g) $J = 43{,}25$ qcm, $b = 7{,}3$ cm „ $c = 13{,}5$ cm

h) $J = 2413$ qcm, $a = 86$ cm „ $h_b = 63{,}5$ cm

i) $J = 1495{,}2$ qcm, $b = 72$ cm „ $h_c = 63{,}6$ cm

k) $J = 180$ qcm, $h_a = 16$ cm „ $h_b = 18$ cm

l) $J = 295{,}4$ qcm, $h_a = 22{,}5$ cm „ $h_c = 19{,}7$ cm

seine Winkel zu berechnen.

c. Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes.

Aus den Formeln

I. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

und $ah_a = 2J = bc\sin\alpha$

ergiebt sich:

II. $a^2 = b^2 + c^2 - 2ah_a\operatorname{ctg}\alpha = b^2 + c^2 - 4J\operatorname{ctg}\alpha.$

Benutzt man für die Formel I die Gleichheiten $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ und $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so erhält man weiter die Formeln:

III. $$\begin{cases} a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}, \\ a^2 = (b+c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

und aus diesen:

IV. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Da ferner $ah_a = 2J = bc\sin\alpha = 2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ ist, so folgen aus III noch die Formeln:

V. $$\begin{cases} a^2 = (b+c)^2 - 2ah_a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2 - 4J\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \\ a^2 = (b-c)^2 + 2ah_a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (b-c)^2 + 4J\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

94. a) Aus den drei Seiten eines Dreiecks seine Winkel zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 65$ cm, $b = 70$ cm und $c = 75$ cm.
2. $a = 390$ cm, $b = 450$ cm „ $c = 120$ cm.
3. $a = 32{,}5$ cm, $b = 21{,}25$ cm „ $c = 26{,}75$ cm.

b) Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die dritte Seite und die beiden anderen Winkel zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 13$ cm, $b = 9$ cm und $\gamma = 30^0$.
2. $a = 25$ cm, $c = 18$ cm „ $\beta = 45^0$.
3. $b = 32$ cm, $c = 36$ cm „ $\alpha = 60^0$.

95. a*) Aus einer Seite, der Summe der Quadrate der beiden anderen und dem Inhalt die Winkel des Dreiecks zu berechnen. (Zuerst II, dann V!)

Beispiele. 1. $a = 13{,}7$ cm, $b^2 + c^2 = 320$ qcm und $J = 74{,}25$ qcm.
2. $b = 4{,}9$ cm, $a^2 + c^2 = 68{,}75$ qcm „ $J = 12{,}40$ qcm.
3. $c = 61{,}25$ cm, $a^2 + b^2 = 11650$ qcm „ $J = 2329$ qcm.

b) Aus dem Inhalt, der Summe der Quadrate zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel die dritte Seite eines Dreiecks zu berechnen.

Beispiele. 1. $J = 1666$ qcm, $a^2 + b^2 = 6905$ qcm und $\gamma = 79^0\ 7{,}4'$.
2. $J = 21{,}79$ qcm, $a^2 + c^2 = 108{,}5$ qcm „ $\beta = 57^0\ 6{,}8'$.
3. $J = 1490$ qcm, $b^2 + c^2 = 66{,}25$ qcm „ $\alpha = 78^0\ 11{,}8'$.

c*) Aus einer Seite, der zu ihr gehörigen Höhe und der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 6{,}5$ cm, $b^2 + c^2 = 65{,}25$ qcm und $h_a = 5{,}2$ cm.
2. $b = 16{,}2$ cm, $a^2 + c^2 = 510$ qcm „ $h_b = 13\frac{3}{4}$ cm.
3. $c = 29{,}8$ cm, $a^2 + b^2 = 812{,}5$ qcm „ $h_c = 14{,}6$ cm.

96. Aus den Bestimmungsstücken eines Dreiecks

a) $a = 24$ cm, $b + c = 70$ cm und $J = 325$ qcm
b) $a = 9{,}65$ cm, $b - c = 2{,}54$ cm „ $J = 29{,}95$ qcm
c) $b = 51{,}4$ cm, $a + c = 110{,}6$ cm „ $J = 1110$ qcm
d) $c = 23{,}5$ cm, $a - b = 3{,}8$ cm „ $J = 228{,}8$ qcm
e) $a = 8{,}1$ cm, $b + c = 16{,}2$ cm „ $h_a = 6{,}05$ cm
f) $a = 19{,}7$ cm, $b - c = 4{,}8$ cm „ $h_a = 23{,}23$ cm
g) $b = 43{,}2$ cm, $a - c = 16$ cm „ $h_b = 51{,}4$ cm
h) $c = 56{,}46$ cm, $a + b = 82{,}48$ cm „ $h_c = 30$ cm

seine Winkel zu berechnen.

97. Aus der Summe oder Differenz zweier Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und dem Inhalt die dritte Seite zu berechnen.

a) $a + b = 28$ cm, $\gamma = 59^0\,29{,}4'$ und $J = 84$ qcm.
b) $a + b = 31{,}25$ cm, $\gamma = 66^0\,27{,}3'$ „ $J = 110$ cm.
c) $a - b = 2$ cm, $\gamma = 59^0\,36{,}6'$ „ $J = 110$ qcm.
d) $a - b = 7{,}75$ cm, $\gamma = 44^0\,29{,}8'$ „ $J = 2180$ cm.

d. Aufgaben über die Halbmesser der Berührungskreise.†)

98. Aus den drei Seiten eines Dreiecks die Halbmesser der Berührungskreise zu berechnen.

Beispiele. 1. $a = 98{,}42$ cm, $b = 72{,}85$ cm und $c = 62{,}92$ cm.
2. $a = 41{,}45$ cm, $b = 48{,}35$ cm „ $c = 52{,}8$ cm.
3. $a = 112{,}8$ cm, $b = 98{,}6$ cm „ $c = 143{,}2$ cm.

99. Aus dem Halbmesser eines Berührungskreises und den Winkeln die Seiten eines Dreiecks zu berechnen.

a) $\varrho = 2{,}5$ cm, $\alpha = 37^0\,25{,}4'$ und $\beta = 86^0\,19{,}8'$.
b) $\varrho_a = 17{,}5$ cm, $\alpha = 86^0\,42{,}6'$ „ $\beta = 49^0\,49{,}6'$.
c) $\varrho_b = 22{,}25$ cm, $\alpha = 62^0\,19{,}8'$ „ $\beta = 38^0\,19{,}6'$.
d) $\varrho_c = 87{,}53$ cm, $\alpha = 115^0\,41{,}2'$ „ $\beta = 12^0\,24{,}4'$.

100. Aus dem Halbmesser eines Berührungskreises, einer Seite und der Summe oder Differenz der beiden anderen Seiten die Winkel eines Dreiecks zu berechnen.

a) $\varrho = 25$ cm, $b + c = 92$ cm und $a = 59$ cm.
b) $\varrho = 28{,}25$ cm, $b - c = 12$ cm „ $a = 85$ cm.
c) $\varrho_a = 57$ cm, $b + c = 153$ cm „ $a = 97$ cm.
d) $\varrho_a = 18$ cm, $b - c = 2{,}8$ cm „ $a = 20$ cm.

101. Aus dem Halbmesser eines Berührungskreises, einer Seite und einem Winkel eines Dreiecks die nicht-gegebenen Seiten und Winkel zu berechnen.

a) $\varrho = 12$ cm, $a = 55$ cm und $\alpha = 75^0\,37{,}8'$.
b) $\varrho = 8$ cm, $a = 37$ cm „ $\beta = 50^0\,27{,}4'$.
c) $\varrho = 20$ cm, $b = 74$ cm und $\gamma = 44^0\,37{,}8'$.
d) $\varrho_a = 15$ cm, $a = 21$ cm „ $\alpha = 44^0\,6{,}4'$.
e) $\varrho_a = 25$ cm, $b = 49$ cm „ $\gamma = 67^0\,25{,}2'$.
f) $\varrho_a = 35$ cm, $c = 27{,}5$ cm „ $\beta = 75^0\,32{,}8'$.
g) $\varrho_b = 14$ cm, $a = 14$ cm „ $\gamma = 53^0\,7{,}3'$.
h) $\varrho_c = 32{,}6$ cm, $b = 25{,}2$ cm „ $\alpha = 53^0\,58{,}2'$.

102. Aus dem Halbmesser eines Berührungskreises, einem Winkel und dem Inhalt eines Dreiecks seine Seiten zu berechnen.

---

†) Die Formeln für die Halbmesser stehen in Nr. 37, IV und VI.

a) $\varrho = 12$ cm, $\alpha = 63^0\,7{,}4'$ und $J = 350$ qcm.
b) $\varrho_a = 32$ cm, $\alpha = 39^0\,42{,}6'$ „ $J = 742$ qcm.
c) $\varrho_a = 36$ cm, $\beta = 69^0\,27{,}4'$ „ $J = 240$ qcm.
d) $\varrho_b = 41$ cm, $\gamma = 67^0\,53{,}8'$ „ $J = 325$ qcm.
e) $\varrho_c = 86{,}17$ cm, $\alpha = 47^0\,35{,}4'$ „ $J = 2413$ qcm.

103. Aus dem Halbmesser eines Berührungskreises, einer Höhe und dem zugehörigen Winkel oder der Differenz der beiden nicht-zugehörigen Winkel die Seiten eines Dreiecks zu berechnen.

a) $\varrho = 6$ cm, $h_a = 25$ cm und $\alpha = 35^0\,44{,}6'$.
b) $\varrho = 24$ cm, $h_a = 72$ cm „ $\beta - \gamma = 48^0\,41{,}2'$.
c) $\varrho_a = 11{,}5$ cm, $h_a = 24{,}8$ cm „ $\alpha = 36^0\,12{,}4'$.
d) $\varrho_a = 14{,}25$ cm, $h_a = 23{,}23$ cm „ $\beta - \gamma = 26^0\,9{,}6'$.
e) $\varrho_b = 42{,}81$ cm, $h_a = 37{,}14$ cm „ $\alpha = 98^0\,20{,}8'$.
f) $\varrho_c = 90$ cm, $h_a = 72{,}6$ cm „ $\beta - \gamma = 6^0\,55{,}6'$.

Nr. 43. Einige Aufgaben aus der angewandten Geometrie und aus der Physik.

104. a) An zwei Punkten A und B wird ein Turm unter dem Winkel $\alpha = 53^0\,8'$ und $\beta = 85^0\,25'$ gegen die Verbindungslinie der beiden Punkte gesehen. Wie weit ist der Turm von A entfernt, wenn AB die Länge $l = 20$ m besitzt?

b) Auf einer ebenen Straße, in deren Richtung der Gipfel eines Berges sichtbar ist, wird an zwei auf einander folgenden Punkten A und B, deren Entfernung $d = 120$ m beträgt, der Gipfel des Berges unter den Winkeln $\alpha = 30^0$ und $\beta = 31^0\,53'$ gegen die Straße gesehen. Wie hoch ist der Berg, wenn die Straße bereits 72 m über dem Meeresspiegel liegt und die Krümmung der Erde nicht berücksichtigt wird?

c) An einem Ufer eines Flusses ist eine Standlinie AB von 25 m Länge abgesteckt. Wie breit ist an der Beobachtungsstelle der Fluß, wenn ein am anderen Ufer stehender Pfahl C in A und B unter den Winkeln $\alpha = 51^0\,15'$, bez. $\beta = 84^0\,50'$ gegen die Standlinie gesehen wird?

d) Geht man am Ufer eines Flusses, das eine Steigung von $\varphi = 32\frac{1}{2}^0$ besitzt, 8 m hinauf, so wird der Fluß unter dem Winkel $\alpha = 27^0\,43'$ gesehen. Wie breit ist der Fluß an der Beobachtungsstelle?

e) Von der 44 m hohen Plattform eines Turmes wird ein Fluß unter dem Winkel $\alpha = 48^0\,29'$ und das jenseitige Ufer unter dem Winkel $\beta = 12^0\,42'$ gegen den Horizont gesehen. Wie breit ist der Fluß?

f) Auf dem rechten Ufer eines Flusses steht in einer Entfernung von 8 m vom Ufer ein Turm mit zwei senkrecht über einander liegenden

Fenstern, deren untere Simse 10 m von einander entfernt sind. Wie breit ist der Fluß, wenn Visierlinien von den Simsen nach dem linken Ufer mit der Lotlinie die Winkel $82^0\,25'$ und $76^0\,15'$ bilden?

g) Um die Höhe eines Kirchturms zu messen, der auf einer Anhöhe jenseits eines Flusses steht, steckt man eine Standlinie von 65 m Länge ab, die nach dem Fußpunkt des Turmes führt und mit der Horizontallinie einen Winkel von 20^0 bildet, und mißt die Winkel, unter denen der Turm an den Endpunkten der Standlinie gegen diese gesehen wird. Wie hoch ist der Turm, wenn diese Winkel gleich $25^0\,24'$, bez. $38^0\,42'$ sind?

105. a) Zwei Orte A und B werden an einem dritten Orte, der von A 6 km und von B $4\frac{1}{2}$ km entfernt ist, unter dem Winkel $\gamma = 82^0\,15'$ gesehen. Wie weit ist A von B entfernt?

b) Ein Radfahrer fährt, um von einem Orte A nach einem Orte B zu gelangen, zu dem der direkte Weg über einen steilen Berg führt, auf ebenen geraden Straßen zuerst in $2\frac{1}{2}$ Stunden nach einem dritten Orte C und von da in $1\frac{3}{4}$ Stunden nach B. Wie weit ist A von B entfernt (Luftlinie!), wenn die beiden Straßen sich in C unter einem Winkel von $52\frac{1}{2}^0$ kreuzen und der Radfahrer in einer Stunde 15 km zurücklegt?

c) Wenn die (als geradlinig gedachte) Bahn eines Blitzes unter einem Winkel von $43\frac{1}{2}^0$ gesehen wird, wenn ferner zwischen Blitz und Donner 15 Sekunden vergehen und die Dauer des Donners auf $3\frac{1}{2}$ Sekunden geschätzt wird, wie lang ist dann der Blitz?

106. (Nach Martus.) Für eine Reiterfigur von 7,25 m Höhe soll ein Sockel so angefertigt werden, daß ein Beschauer, dessen Auge sich 1,60 m über dem Boden befindet, in einer Entfernung von 22 m das ganze Denkmal unter dem Winkel $\varphi = 17^0\,10'$ sieht. Wie hoch muß der Sockel sein?

107. a) Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung bewegt sich ein Körper unter dem gleichzeitigen Einfluß zweier Kräfte, die mit einander einen Winkel von 105^0 bilden und dem Körper in ihren Richtungen Geschwindigkeiten von 16 m, bez. 12 m erteilen würden?

b) Eine Kraft von 120 kg soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, welche mit ihr die Winkel $\alpha = 25^0\,20'$ und $\beta = 36^0\,45'$ bilden. Wie groß werden die beiden Kräfte sein?

c) Auf einen Körper (Punkt) wirken zwei Kräfte ein, die im Verhältnis $4:5$ stehen und dem Körper eine Geschwindigkeit von 27 m erteilen. Wie groß sind die beiden Kräfte, wenn ihre Richtungen einen Winkel von $67\frac{1}{2}^0$ mit einander bilden?

d) Mit einer Kraft, die einem Körper eine Geschwindigkeit von 25 m in der Sekunde erteilen würde, wirkt gleichzeitig auf den Körper eine zweite Kraft, die mit der ersten einen Winkel von $72\frac{1}{4}^0$ bildet.

Wie groß ist diese Kraft, wenn der Körper eine Geschwindigkeit von 40 m in der Sekunde erhält?

e) Eine Kraft von 250 kg soll so in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, daß die erste von diesen 92 kg groß ist und mit ihr einen Winkel von 36° bildet. Wie groß wird die zweite Seitenkraft sein?

f) Zwei Kräfte von 130 kg und 140 kg erteilen einem Körper dieselbe Bewegung wie eine dritte Kraft von 85 kg. Welche Winkel bildet die dritte mit den beiden ersten Kräften?

108. a) Zwei Punkte A und B sind von der Ebene eines Spiegels 3 m, bez. 1,8 m entfernt. Wie lang ist die Strecke AB, wenn ein von A ausgehender Lichtstrahl, der den Spiegel unter einem Winkel von 25° 36′ trifft, nach B reflektiert wird?

b) Ein Lichtstrahl wird durch einen ebenen Spiegel nach einem Punkte B reflektiert, der von der Lichtquelle A 9 m entfernt ist. Wie groß ist der Reflexionswinkel, wenn der Strahl den Spiegel an einer Stelle trifft, deren Entfernung von A 5 m und von B 8 m beträgt?

Neuntes Kapitel.

Stereometrische Aufgaben.

Nr. 44. Berechnung des Würfels.

Ist a die Kante, d die Körperdiagonale, O die Oberfläche, F die Diagonalfläche und V der Rauminhalt eines Würfels, so hat man

$$d = a\sqrt{3},\quad O = 6a^2,\quad F = a^2\sqrt{2} \text{ und } V = a^3.$$

1. Wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt eines Würfels mit der Kante

1. $a = 12$ cm? 2. $a = 15$ cm? 3. $a = 22{,}45$ cm?

2. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Oberfläche

1. $O = 216$ qcm? 2. $O = 1350$ qcm? 3. $O = 464{,}48$ qcm?

3. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels mit dem Rauminhalt

1. $V = 343$ ccm? 2. $V = 729$ ccm? 3. $V = 4227{,}5$ ccm?

4. Wie groß ist die Körperdiagonale und die Diagonalfläche eines Würfels mit der Kante

1. $a = 8$ cm? 2. $a = 14$ cm? 3. $a = 13{,}25$ cm?

5. Ein Würfel habe die Körperdiagonale

a) $d = 7{,}25$ cm; wie groß ist seine Oberfläche?

b) $d = 490$ cm; „ „ „ sein Rauminhalt?

c) $d = 52{,}5$ cm; „ „ „ seine Diagonalfläche?

6. Ein Würfel habe die Diagonalfläche
a) $F = 216$ qcm; wie groß ist seine Oberfläche?
b) $F = 725$ qcm; „ „ „ sein Rauminhalt?
c) $F = 98{,}45$ qcm; „ „ „ seine Körperdiagonale?

Nr. 45. Berechnung des Quaders.

Sind a, b und c die Kanten eines Quaders, so hat man
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $O = 2\,(ab + ac + bc)$, $V = abc$,
$F_a = a\sqrt{b^2 + c^2}$, $F_b = b\sqrt{a^2 + c^2}$ und $F_c = c\sqrt{a^2 + b^2}$.

7. Ein Quader habe die Grundkanten a und b und die Seitenkante c; wie groß ist seine Oberfläche und sein Rauminhalt?
Beispiele. 1. $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm.
2. $a = 2{,}5$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 4{,}5$ cm.
3. $a = 43{,}8$ cm, $b = 39{,}5$ cm, $c = 49{,}6$ cm.

8. Ein Quader habe die Grundkanten a und b und die Oberfläche O; wie groß ist sein Rauminhalt?
Beispiele. 1. $a = 45$ cm, $b = 5{,}5$ cm, $O = 190{,}5$ qcm.
2. $a = 22{,}5$ cm, $b = 17{,}5$ cm, $O = 1787{,}5$ qcm.
3. $a = 41{,}25$ cm, $b = 34{,}75$ cm, $O = 5280{,}4$ qcm.

9. Ein Quader habe die Grundkanten a und b und den Rauminhalt V; wie groß ist seine Oberfläche?
Beispiele. 1. $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $V = 3240$ ccm.
2. $a = 6{,}5$ cm, $b = 5{,}5$ cm, $V = 302{,}5$ ccm.
3. $a = 48{,}34$ cm, $b = 36{,}92$ cm, $V = 86740$ ccm.

10.*) Ein Quader habe die Oberfläche O und den Rauminhalt V und eine seiner Grundkanten habe die Länge a. Wie groß ist die andere Grundkante und die Seitenkante?
Beispiele. 1. $a = 9$ cm, $O = 510$ qcm, $V = 756$ ccm.
2. $a = 12$ cm, $O = 392$ qcm, $V = 480$ ccm.
3. $a = 2{,}6$ cm, $O = 37{,}48$ qcm, $V = 15{,}6$ ccm.

11. Ein Quader habe die Grundkanten a und b und die Seitenkante c; wie groß sind seine Körperdiagonale und seine Diagonalflächen?
Beispiele. 1. $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 16$ cm.
2. $a = 17{,}3$ cm, $b = 15{,}7$ cm, $c = 11{,}4$ cm.
3. $a = 245{,}8$ cm, $b = 327{,}4$ cm, $c = 625$ cm.

12. Ein Quader mit den Grundkanten a und b habe die Körperdiagonale d; wie groß ist seine Oberfläche und sein Rauminhalt?
Beispiele. 1. $a = 18$ cm, $b = 9$ cm, $d = 27$ cm.
2. $a = 52{,}5$ cm, $b = 41{,}75$ cm, $d = 83{,}48$ cm.

13. Von einem Quader kennt man zwei Kanten und eine seiner Diagonalflächen; wie groß ist sein Rauminhalt?

Beispiele. 1. $a = 25$ cm, $b = 18$ cm, $F_a = 750$ qcm.
2. $a = 32$ cm, $c = 24$ cm, $F_b = 1080$ qcm.
3. $a = 12{,}7$ cm, $b = 14{,}5$ cm, $F_c = 315{,}5$ qcm.

14.*) Von einem Quader kennt man eine Kante, die zugehörige Diagonalfläche und die Summe l der beiden anderen Kanten. Wie groß ist seine Oberfläche?

Beispiele. 1. $a = 19$ cm, $F_a = 665$ qcm, $l = 49$ cm.
2. $b = 25$ cm, $F_b = 750$ qcm, $l = 42$ cm.
3. $c = 18{,}5$ cm, $F_c = 342{,}25$ qcm, $l = 23{,}5$ cm.

15.*) Von einem Quader kennt man eine Kante, eine nicht zu ihr gehörige Diagonalfläche und die Körperdiagonale; wie groß ist sein Rauminhalt?

Beispiele. 1. $a = 20$, $F_b = 841$ qcm, $d = \sqrt{1682}$ cm.
2. $b = 15$, $F_c = 289$ qcm, $d = \sqrt{578}$ cm.
3. $c = 7{,}8$, $F_a = 84{,}5$ qcm, $d = \sqrt{211{,}25}$ cm.

Nr. 46. Berechnung des Prismas.

16. Die Grundfläche eines geraden Prismas sei ein Parallelogramm mit den Seiten a und b und dem Winkel α. Wie groß ist seine Oberfläche und sein Rauminhalt, wenn seine Seitenkante die Länge c besitzt?

Beispiele. 1. $a=27{,}4$ cm, $b=23{,}9$ cm, $c=32{,}3$ cm, $\alpha=67^0\,24{,}7'$.
2. $a=b=19{,}75$ cm, $c=13{,}25$ cm, $\alpha=81^0\,57{,}4'$.
3. $a=b=c=6{,}275$ cm, $\alpha=42^0\,29{,}5'$.

17. Eine gerade $n$seitige Säule mit regelmäßiger Grundfläche habe die Grundkante a und die Seitenkante b. Wie groß ist ihr Mantel, ihre Oberfläche und ihr Rauminhalt?

Beispiele. 1. $n = 3$, $a = 24{,}5$ cm, $b = 33{,}8$ cm.
2. $n = 3$, $a = 9{,}35$ cm, $b = 12{,}45$ cm.
3. $n = 5$, $a = 5{,}75$ cm, $b = 15{,}64$ cm.
4. $n = 6$, $a = 29{,}85$ cm, $b = 17{,}43$ cm.
5. $n = 8$, $a = 51{,}3$ cm, $b = 39{,}7$ cm.
6. $n = 10$, $a = 32{,}75$ cm, $b = 115{,}6$ cm.
7. $n = 12$, $a = 8{,}45$ cm, $b = 456{,}8$ cm.

18. Die Grundfläche einer geraden Säule sei ein regelmäßiges n-Eck und sei einem Kreise mit dem Halbmesser r (ϱ) eingeschrieben (umgeschrieben). Wie groß ist die Oberfläche der Säule, wenn ihre Seitenkante die Länge b hat?

a) $n = 6$, $r = 15$ cm, $b = 62$ cm.
b) $n = 10$, $r = 37{,}5$ cm, $b = 425$ cm.
c) $n = 12$, $\varrho = 8{,}4$ cm, $b = 376$ cm.
d) $n = 15$, $\varrho = 22{,}5$ cm, $b = 518$ cm.

19. Von einer geraden $n$seitigen Säule mit regelmäßiger Grundfläche kennt man den Mantel (die Summe der Seitenflächen) und eine Kante oder den Halbmesser des der Grundfläche um-, bez. eingeschriebenen Kreises. Wie groß ist ihr Rauminhalt?

a) $n = 5$, $a = 12{,}8$ cm, $M = 15\,360$ qcm.
b) $n = 6$, $b = 325$ cm, $M = 14\,625$ qcm.
c) $n = 8$, $r = 15{,}4$ cm, $M = 18\,425$ qcm.
d) $n = 10$, $\varrho = 13{,}2$ cm, $M = 24\,250$ qcm.

20. Von einer geraden $n$seitigen Säule mit regelmäßiger Grundfläche kennt man die Oberfläche und eine Kante oder den Halbmesser der Grundfläche des um-, bez. eingeschriebenen Kreises. Wie groß ist ihr Rauminhalt?

a) $n = 6$, $a = 7{,}74$ cm, $O = 1970$ qcm.
b) $n = 8$, $r = 9{,}25$ cm, $O = 7400$ qcm.
c) $n = 10$, $\varrho = 12{,}72$ cm, $O = 8125$ qcm.
d*) $n = 12$, $b = 95{,}5$ cm, $O = 6000$ qcm.

21. Von einer geraden $n$seitigen Säule mit regelmäßiger Grundfläche kennt man den Rauminhalt und eine Kante oder den Halbmesser des der Grundfläche um-, bez. eingeschriebenen Kreises. Wie groß ist ihre Oberfläche?

a) $n = 5$, $a = 15{,}27$ cm, $V = 25\,430$ ccm.
b) $n = 8$, $b = 13{,}85$ cm, $V = 5675$ ccm.
c) $n = 12$, $r = 17{,}25$ cm, $V = 42\,650$ ccm.
d) $n = 15$, $\varrho = 14{,}68$ cm, $V = 37\,840$ ccm.

22. Von einer geraden $n$seitigen Säule mit regelmäßiger Grundfläche kennt man den Rauminhalt und den Mantel. Wie groß sind ihre Kanten?

Beispiele. 1. $n = 8$, $V = 30\,250$ ccm, $M = 4296$ qcm.
2. $n = 10$, $V = 4562$ ccm, $M = 1184$ qcm.

Nr. 47. Berechnung des geraden Cylinders.

Ist r der Halbmesser des Grundkreises und h die Höhe (Seitenlinie) eines geraden Cylinders, so hat man

für seinen Mantel die Formel: $M = 2\pi r h$,
„ seine Oberfläche die Formel: $O = 2\pi r(r + h)$,
„ seinen Achsenschnitt die Formel: $A = 2rh$,
„ „ Rauminhalt „ „ $V = \pi r^2 h$.

23. Von einem Cylinder kennt man den Halbmesser seines Grundkreises und seine Seitenlinie (Höhe). Wie groß ist sein Mantel, seine Oberfläche und sein Rauminhalt?

Beispiele. 1. $r = 18$ cm, $s = 43$ cm.
2. $r = 56{,}25$ cm, $s = 24{,}74$ cm.
3. $r = 72{,}86$ cm, $s = 324{,}5$ cm.

24. Von einem Cylinder kennt man den Mantel und den Halbmesser seines Grundkreises oder seine Seitenlinie oder das Verhältnis oder die Summe, bez. Differenz dieser Strecken. Wie groß ist sein Rauminhalt?

a) $M = 1760$ qcm, $r = 14$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$
b) $M = 2112$ qcm, $s = 16$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$
c) $M = 785$ qcm, $s : r = 8 : 3$.
d*) $M = 1056$ qcm, $s + r = 26$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$
e*) $M = 440$ qcm, $s - r = 9$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$

25. Von einem Cylinder kennt man die Oberfläche und den Halbmesser des Grundkreises oder die Seitenlinien oder den Umfang des Achsenschnittes. Wie groß ist sein Rauminhalt?

a) $O = 528$ qcm, $r = 7$ cm.
b*) $O = 3256$ qcm, $s = 23$ cm.
c) $O = 4725$ qcm, $u = 84$ cm.

26. Von einem Cylinder kennt man den Rauminhalt und den Halbmesser des Grundkreises oder die Seitenlinie oder den Inhalt des Achsenschnitts. Wie groß ist seine Oberfläche?

a) $V = 2304$ ccm, $r = 8{,}25$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$
b) $V = 3450$ ccm, $s = 15$ cm. $(\pi = \frac{22}{7}.)$
c) $V = 615{,}85$ ccm, $A = 66{,}45$ qcm.

27. Bei einem Cylinder mit dem Rauminhalt $V = 8824$ ccm sei das Verhältnis der Seitenlinie zu dem Halbmesser des Grundkreises gleich 5,25. Wie groß ist seine Oberfläche?

Nr. 48. Berechnung der geraden Pyramide.

Ist a die Grundkante, b die Seitenkante, h die Höhe, h' die Höhe der Seitenflächen, n die Anzahl der Seitenflächen einer geraden Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche und sind r und ϱ die Halbmesser der Kreise, welche der Grundfläche um-, bez. eingeschrieben werden können, so hat man:

$$b^2 = h^2 + r^2,$$
$$h'^2 = h^2 + \varrho^2,$$
$$b^2 = h'^2 + \frac{1}{4}a^2,$$

$$G\,(\text{Grundfläche}) = n \cdot \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n} = n \cdot \varrho^2 \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{360^0}{n},$$

M (Summe der Seitenflächen) $= n \cdot \frac{1}{2} a h'$

und

V (Rauminhalt) $= \frac{1}{3} G \cdot h$.

28. a) Eine quadratische Pyramide habe die Grundkante a und die Höhe h. Wie groß ist ihre Seitenkante b, ihr Mantel M, ihre Oberfläche O und ihr Rauminhalt V?

b) Eine quadratische Pyramide habe die Grundkante a und die Seitenkante b. Wie groß ist ihre Höhe, ihre Oberfläche und ihr Rauminhalt?

c) Eine quadratische Pyramide habe die Seitekante b und die Höhe h. Wie groß ist ihre Oberfläche und ihr Rauminhalt?

29. Von einer quadratischen Pyramide kennt man die Bestimmungsstücke:

a) $a = 18$ cm und $h = 12$ cm. Wie groß sind M, O und V?
b) $a = 16$ cm „ $b = 20$ cm. „ „ „ M, O „ V?
c) $b = 19$ cm „ $h = 17$ cm. „ „ „ M, O „ V?
d) $M = 672$ qcm und $a = 14$ cm. Wie groß sind O „ V?
e*) $M = 1680$ qcm „ $b = 37$ cm. „ „ „ O „ V?
f*) $M = 544$ qcm „ $h = 15$ cm. „ „ „ O „ V?
g) $O = 3280$ qcm „ $a = 40$ cm. „ „ ist V?
h*) $O = 340$ qcm „ $b = 13$ cm. „ „ „ V?
i*) $O = 96$ qcm „ $h = 4$ cm. „ „ „ V?
k) $V = 6720$ ccm „ $a = 24$ cm. „ „ „ O?
l) $V = 324$ ccm „ $h = 12$ cm. „ „ „ O?
m*) $V = 144\sqrt{51}$ ccm, $b = 15$ cm. „ „ „ O?

30. Von einer $n$seitigen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche kennt man die Stücke

a) $n = 3$, $a = 15$ cm und $b = 12$ cm. Wie groß ist O?
b) $n = 6$, $a = 21$ cm „ $b = 29$ cm. „ „ „ V?
c) $n = 6$, $a = 24$ cm „ $h = 32$ cm. „ „ „ M?
d) $n = 6$, $b = 17$ cm „ $h = 15$ cm. „ „ „ O?
e) $n = 5$, $M = 1375$ qcm und $a = 24{,}5$ cm. Wie groß ist V?
f) $n = 8$, $O = 3235$ qcm „ $a = 37{,}5$ cm. „ „ „ V?
g) $n = 10$, $V = 32\,450$ ccm und $a = 18{,}25$ cm. Wie groß ist O?
h) $n = 12$, $V = 832{,}7$ ccm „ $h = 15{,}35$ cm. „ „ „ O?

31. Der regelmäßigen Grundfläche einer $n$seitigen Pyramide sei ein Kreis mit dem Halbmesser r (ϱ) umgeschrieben (eingeschrieben); man kennt außerdem die Seitenkante b oder die Höhe h. Wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt der Pyramide?

a) $n = 3$, $r = 23{,}8$ cm, $b = 36{,}24$ cm.
b) $n = 6$, $\varrho = 17{,}5$ cm, $b = 21{,}95$ cm.
c) $n = 8$, $r = 13{,}75$ cm, $h = 47{,}8$ cm.
d) $n = 12$, $\varrho = 32{,}85$ cm, $h = 56{,}24$ cm.

32. a) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines regelmäßigen Vierflachs (Tetraeders), dessen Kanten Diagonalen der Flächen eines Würfels mit der Kante $a = 75{,}5$ cm sind?

b) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines regelmäßigen Achtflachs (Oktaeders), dessen Ecken die Mitten der Flächen eines Würfels mit der Kante $a = 14{,}5$ cm sind?

c) Wie groß ist die Oberfläche eines regelmäßigen Zwölfflachs mit der Kante $a = 4{,}25$ cm?

d) Wie groß ist die Oberfläche eines regelmäßigen Zwanzigflachs mit der Kante $a = 12{,}4$ cm?

e) Wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt einer doppeltsechsseitigen Pyramide (Dihexaeder), deren Kanten die Länge $a = 9{,}5$ cm besitzen?

f) Wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt eines Quadratoktaeders mit der Hauptachse $a = 15$ cm und den Nebenachsen $b = 12$ cm?

g) Wie groß ist die Oberfläche eines Oktaeders im rhombischen System, wenn seine Achsen die Länge $a = 16$ cm, $b = 11$ cm und $c = 12$ cm besitzen?

Nr. 49. Berechnung des Kegels.

Ist r der Halbmesser des Grundkreises, h die Höhe (Achse) und s die Seitenlinie eines geraden Kegels, so hat man:

$$s^2 = h^2 + r^2,$$
$$M \text{ (Mantel)} = \pi r s,$$
$$O = \pi r (r + s),$$
$$A \text{ (Achsenschnitt)} = r h,$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

33. Von einem geraden Kegel kennt man die Stücke

a) $r = 5$ cm und $h = 12$ cm. Wie groß sind M, O und V?
b) $r = 12{,}7$ cm und $h = 8{,}25$ cm. Wie groß sind M, O und V?
c) $r = 12$ cm „ $s = 37$ cm. „ „ ist V?
d) $r = 24{,}5$ cm „ $s = 33{,}7$ cm. „ „ „ V?
e) $h = 15$ cm „ $s = 17$ cm. „ „ sind O und V?
f) $h = 46{,}25$ cm „ $s = 67{,}85$ cm. „ „ „ O „ V?
g) $M = 1625$ qcm und $r = 16$ cm. „ „ ist V?
h) $M = 1674$ qcm „ $s = 32$ cm. „ „ „ V?

i) $M = 3586$ qcm und $h = 21$ cm. Wie groß ist V?
k) $O = 2592$ qcm „ $r = 18{,}5$ cm. „ „ „ V?
l*) $O = 2556$ qcm „ $s = 52$ cm. „ „ „ V?
m) $O = 1728$ qcm „ $h = 15{,}8$ cm. „ „ „ V?
n) $V = 675$ ccm „ $r = 5{,}75$ cm. „ „ „ O?
o) $V = 583{,}2$ ccm „ $h = 12{,}25$ cm. „ „ „ O?

34. a) Der Achsenschnitt eines geraden Kegels mit dem Mantel $M = 219{,}45$ qcm ist ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

b) Der Achsenschnitt eines geraden Kegels mit der Oberfläche $O = 625{,}8$ qcm ist ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

c) Der Achsenschnitt eines geraden Kegels mit dem Rauminhalt $V = 284$ ccm ist ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

d) Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, das

1. einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 14$ cm eingeschrieben ist.
2. „ „ „ „ „ $r = 12$ cm umgeschrieben ist.

Welchen Rauminhalt besitzt der Kegel?

e) Der Achsenschnitt eines geraden Kegels mit dem Mantel $M = 515{,}8$ qcm hat an der Spitze den Winkel $\alpha = 47^\circ\, 25{,}4'$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

f) Bei einem geraden Kegel mit dem Rauminhalt $V = 6750$ ccm bildet die Seitenlinie mit der Grundfläche einen Winkel von $\varphi = 67\frac{1}{2}^\circ$. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

g) Die Höhe des Achsenschnitts eines geraden Kegels mit der Oberfläche $O = 748{,}4$ qcm steht zu seiner Grundlinie im Verhältnis $2 : 3$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

h*) Der Schenkel des Achsenschnitts eines geraden Kegels mit der Oberfläche $O = 1685{,}8$ qcm ist 7,5 cm größer als seine Grundlinie. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels?

35. a) Ein Dreieck mit den Seiten $a = 48$ cm, $b = 36$ cm und $c = 28$ cm dreht sich um die Seite a (BC). Wie groß ist der Rauminhalt des dadurch entstehenden Doppelkegels?

b) Ein Dreieck mit den Seiten $a = 53$ cm, $b = 46$ cm und $c = 35$ cm dreht sich um die Seite c (AB). Wie groß ist der Rauminhalt des ausgebohrten Kegels, der durch diese Drehung entsteht?

c) Ein Quadrat dreht sich um eine seiner Diagonalen. Wie groß ist die Seite des Quadrats, wenn der entstehende Körper 625 ccm groß sein soll?

36. a) Ein gerader Kegel mit der Höhe $h = 16{,}5$ cm hat an der

Spitze des Achsenschnitts den Winkel $\alpha = 83^\circ 19{,}5'$. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnitts, der durch Aufrollen des Kegelmantels entsteht?

b) Der aufgerollte Mantel eines geraden Kegels ist ein zu dem Mittelpunktswinkel $\varphi = 67^\circ 30'$ gehöriger Kreisausschnitt und die Seitenlinie habe die Länge $s = 45{,}8$ cm. Wie groß ist der Winkel an der Spitze des Achsenschnitts?

c) Der aufgerollte Mantel eines geraden Kegels sei ein zu dem Mittelpunktswinkel $\varphi = 57^\circ 29{,}8'$ gehöriger Kreisausschnitt und der Halbmesser des Grundkreises habe die Länge $r = 13{,}8$ cm. Wie groß ist der Winkel an der Spitze des Achsenschnitts?

d) Der aufgerollte Mantel eines geraden Kegels sei ein zu dem Mittelpunktswinkel $\varphi = 125^\circ 48'$ gehöriger Kreisausschnitt und die Höhe des Kegels habe die Länge $h = 24{,}5$ cm. Wie groß ist der Winkel an der Spitze des Achsenschnitts?

Nr. 50. Berechnung des Pyramidenstumpfs und des Kegelstumpfs.

Sind die Grundflächen G_1 und G_2 eines geraden Pyramidenstumpfs regelm. n-Ecke mit den Seiten a_1, bez. a_2, so sind seine Seitenflächen kongruente Trapeze mit den Grundlinien a_1 und a_2. Werden die Bezeichnungen entsprechend wie in Nr. 48 gewählt, so ergiebt sich:

$$b^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2,$$
$$h'^2 = h^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2,$$
$$b^2 = h'^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2.$$

Der Rauminhalt wird nach der Formel berechnet:

$$V = \frac{1}{3} h (G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 \cdot G_2}).$$

Für den Kegelstumpf bestehen die Formeln:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2,$$
$$M = \pi s \,(r_1 + r_2),$$
$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2).$$

37. a) Ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf hat die Grundkante $a = 28$ cm, die Endkante $b = 15$ cm und die Höhe $h = 20$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

b) Die parallelen Flächen eines 6seitigen Pyramidenstumpfs mit der Höhe $h = 23{,}5$ cm seien Kreisen mit den Halbmessern $r_1 = 34{,}8$ cm und $r_2 = 26{,}4$ cm eingeschrieben. Wie groß ist sein Rauminhalt?

c) Die parallelen Flächen eines 8seitigen Pyramidenstumpfs mit der Höhe $h = 17{,}25$ cm seien Kreisen mit den Halbmessern $r_1 = 27{,}4$ cm und $r_2 = 16{,}8$ cm umgeschrieben. Wie groß ist sein Rauminhalt?

38. a) Ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf hat die Grundkante $a = 85$ cm, die Endkante $b = 26$ cm und die Seitenkante $c = 45$ cm. Wie groß ist seine Oberfläche und sein Rauminhalt?

b) Ein gerader 6seitiger Pyramidenstumpf hat die Grundkante $a = 8$ cm, die Endkante $b = 5$ cm und die Seitenkante $c = 7$ cm. Wie groß ist seine Oberfläche und sein Rauminhalt?

c) Ein gerader 10seitiger Pyramidenstumpf hat die Grundkante $a = 12$ cm, die Seitenkante $c = 13$ cm und die Höhe $h = 12$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

39. a) Ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf mit der Höhe $h = 8$ cm hat den Rauminhalt $V = 1176$ ccm und seine Grundkante steht zur Endkante im Verhältnis 5 : 3. Wie groß ist seine Oberfläche?

b) Ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf mit der Grundkante $a = 23$ cm und der Endkante $b = 18$ cm hat die Oberfläche $O = 1837$ qcm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

40. a) Die Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs haben die Halbmesser $r_1 = 19{,}5$ cm und $r_2 = 12{,}5$ cm und seine Höhe sei $h = 14{,}8$ cm. Wie groß ist sein Mantel, seine Oberfläche und sein Rauminhalt?

b) Die Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Seitenlinie $s = 41$ cm haben die Halbmesser $r_1 = 43$ cm und $r_2 = 34$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

c) Die Grundfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Seitenlinie $s = 37$ cm und der Höhe $h = 12$ cm hat den Halbmesser $r_1 = 54$ cm. Wie groß ist sein Mantel?

41. a) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit dem Mantel $M = 476$ qcm unterscheiden sich um $d = 6$ cm und die Seitenlinie hat die Länge $s = 10$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

b) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs unterscheiden sich um $d = 7$ cm und die Höhe hat die Länge $h = 24$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt, wenn sein Mantel die Größe $M = 1275\pi$ qcm besitzt?

c) Ein gerader Kegelstumpf hat den Mantel $M = 540$ qcm, die Seitenlinie $s = 12$ cm und die Seitenlinie bildet mit der Grundfläche den Winkel $\varphi = 72^\circ\,24'$. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegelstumpfs?

d) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 20$ cm ist ein Kegelstumpf umgeschrieben. Wie groß ist sein Rauminhalt, wenn der Halbmesser seiner Grundfläche 4 mal so groß ist wie der Halbmesser der Endfläche?

e) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 24$ cm ist ein Pyramiden-

stumpf umgeschrieben. Wie groß ist sein Mantel, wenn die Halbmesser seiner Endflächen sich wie 8 : 3 verhalten?

42. a) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Oberfläche $O = 1500\pi$ qcm unterscheiden sich um $d = 12$ cm und die Seitenlinie hat die Länge $s = 37$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

b) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Oberfläche $O = 216\pi$ qcm unterscheiden sich um $d = 5$ cm und die Höhe hat die Länge $h = 12$ cm. Wie groß ist sein Rauminhalt?

43. a) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Höhe $h = 48$ cm und dem Rauminhalt $V = 26\,176\pi$ ccm stehen in dem Verhältnis 15 : 8. Wie groß ist seine Oberfläche?

b*) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit dem Rauminhalt $V = 511\pi$ ccm sind zusammen 26 cm groß und die Höhe hat die Länge $h = 3$ cm. Wie groß ist seine Oberfläche?

c*) Die Halbmesser der Grund- und Endfläche eines geraden Kegelstumpfs mit der Seitenlinie $s = 61$ cm und dem Rauminhalt $V = 76\,220\pi$ ccm unterscheiden sich um $d = 11$ cm. Wie groß ist seine Oberfläche?

Nr. 51. Berechnung der Kugel.

Bei einer Kugel mit dem Halbmesser r berechnet man

die Oberfläche nach der Formel $O = 4\pi r^2$,

den Rauminhalt nach der Formel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

eine Kappe mit der Höhe h nach der Formel $K = 2\pi r h$,

„ Zone „ „ „ h „ „ „ $Z = 2\pi r h$,

einen Kugelabschnitt mit der Höhe h nach der Formel $A_b = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$,

den zugehörigen Kugelausschnitt nach der Formel $A_a = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

44. Eine Kugel habe

a) den Halbmesser $r = 15{,}4$ cm. Wie groß ist ihre Oberfläche?

b) „ „ $r = 32{,}5$ cm. „ „ „ ihr Rauminhalt?

c) die Oberfläche $O = 386{,}4$ qcm. Wie groß ist ihr Rauminhalt?

d) „ „ $O = 2827{,}5$ qcm. „ „ „ „ „ ?

e) den Rauminhalt $V = 6553{,}8$ ccm. Wie groß ist ihre Oberfläche?

f) „ „ $V = 95{,}25$ ccm. „ „ „ „ „ ?

45. Eine Hohlkugel habe die Halbmesser

1. $r_1 = 27{,}3$ cm u. $r_2 = 16{,}8$ cm. Wie groß ist d. Rauminh. d. Kugelschale?
2. $r_1 = 512{,}5$ cm „ $r_2 = 387{,}5$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?
3. $r_1 = 87{,}34$ cm „ $r_2 = 29{,}86$ cm. „ „ „ „ „ „ „ ?

46. Welche Größe besitzt eine Kappe oder Zone mit der Höhe

1. $h = 12$ cm auf einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 21$ cm?
2. $h = 21{,}8$ cm „ „ „ „ „ „ $r = 25{,}3$ cm?
3. $h = 52{,}25$ cm „ „ „ „ „ „ $r = 71{,}75$ cm?
4. $h = 319{,}4$ cm „ „ „ „ „ „ $r = 285{,}6$ cm?

47. Welchen Rauminhalt hat bei einer Kugel mit dem Halbmesser

1. $r = 17{,}2$ cm der zu der Höhe $h = 11{,}6$ cm gehörige Kugelausschnitt?
2. $r = 85{,}4$ cm „ „ „ „ $h = 64{,}9$ cm „ „ ?
3. $r = 224{,}8$ cm „ „ „ „ $h = 165{,}3$ cm „ „ ?

48. Welchen Rauminhalt hat bei einer Kugel mit dem Halbmesser

1. $r = 18$ cm der zu der Höhe $h = 16$ cm gehörige Kugelabschnitt?
2. $r = 49{,}7$ cm „ „ „ „ $h = 41{,}5$ cm „ „ ?
3. $r = 457{,}8$ cm „ „ „ „ $h = 312{,}1$ cm „ „ ?

49. a) Wie groß ist bei einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 27{,}6$ cm ein Kugelabschnitt, dessen Kappe die Größe $K = 1725$ qcm besitzt? Wie groß ist der zugehörige Kugelausschnitt?

b) Wie groß ist bei einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 15$ cm eine Kappe, die zu einem Kugelausschnitt mit dem Rauminhalt $A_s = 1056$ ccm gehört?

c) Wie groß ist bei einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 27$ cm ein Kugelabschnitt, wenn der zugehörige Ausschnitt den Rauminhalt $A_s = 10\,000$ ccm besitzt?

d) Wie groß ist ein Kugelabschnitt, wenn die zugehörige Kappe die Höhe $h = 12$ cm und den Flächeninhalt $k = 726{,}25$ qcm besitzt?

e) Wie groß ist bei einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 18{,}4$ cm ein Kugelabschnitt und ein Kugelausschnitt, dessen Kappe und Kegelmantel einander gleich sind?

Nr. 52. Vermischte Aufgaben.

50. An den beiden Enden eines geraden Cylinders mit der Höhe $l = 40$ cm sind genau auf seine Endflächen passende Kugelabschnitte mit der Höhe $h = 5$ cm aufgesetzt. Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche, wenn die Oberfläche des ganzen Körpers 3200 qcm beträgt?

51. a) Einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante

$a = 35$ cm und der Höhe $h = 67$ cm ist ein Kegel eingeschrieben. Wie groß ist dessen Oberfläche?

b) Einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 84$ cm und der Höhe $h = 212$ cm ist ein Kegel umgeschrieben. Wie groß ist dessen Oberfläche?

c) Einem geraden Kegel mit der Höhe $h = 62$ cm und dem Halbmesser des Grundkreises $r = 18$ cm ist eine regelmäßige quadratische Pyramide eingeschrieben. Wie groß ist deren Oberfläche?

d) Einem geraden Kegel mit der Höhe $h = 48$ cm und dem Halbmesser des Grundkreises $r = 16$ cm ist eine regelmäßige 6seitige Pyramide 1. eingeschrieben,
2. umgeschrieben.
Wie groß ist deren Oberfläche?

52. a) Einem Kegel mit der Höhe $h = 26{,}8$ cm und dem Halbmesser des Grundkreises $r = 15{,}7$ cm ist ein Cylinder so eingeschrieben, daß seine Grundfläche auf der Grundfläche des Kegels liegt. Wie groß ist der Rauminhalt des Cylinders, wenn die Länge seiner Höhe 17,8 cm beträgt?

b) Einem Kegel mit der Höhe $h = 21{,}5$ cm und dem Halbmesser des Grundkreises $r = 13{,}4$ cm ist eine quadratische Säule mit der Grundkante $a = 8{,}5$ cm eingeschrieben. Wie groß ist der Rauminhalt der Säule?

53. a) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 48{,}7$ cm ist ein Cylinder mit der Höhe $h = 60$ cm eingeschrieben. Wie groß ist der Mantel und der Rauminhalt des Cylinders?

b) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 36{,}5$ cm ist eine quadratische Säule mit der Grundkante $a = 19{,}5$ cm eingeschrieben. Wie groß ist die Oberfläche der Säule?

c) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 54{,}5$ cm ist eine regelmäßige 6seitige Säule mit der Höhe $h = 72$ cm eingeschrieben. Wie groß ist der Rauminhalt der Säule?

54. a) An eine Kugel mit dem Halbmesser $r = 42$ cm ist aus der Entfernung $d = 125$ cm von der Kugelfläche der Berührungskegel gelegt. Wie groß ist der Mantel des durch den Berührungskreis begrenzten Kegels?

b) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 6{,}5$ cm ist ein Kegel mit der Höhe $h = 10{,}4$ cm eingeschrieben. Wie groß ist der Mantel des Kegels?

c) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 75$ cm ist
1. eine gerade quadratische Pyramide mit der Höhe $h = 105$ cm
2. eine gerade regelm. 6seitige Pyramide mit der Höhe $h = 95$ cm
eingeschrieben. Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide?

d) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 53$ cm ist ein gerader Kegel eingeschrieben, dessen Höhe durch den Mittelpunkt der Kugel

1. im Verhältnis $p : q = 9 : 4$,
2. nach dem goldenen Schnitt

geteilt ist. Welchen Inhalt hat der Kegel?

e) Einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 42$ cm ist eine gerade quadratische Pyramide eingeschrieben, deren Höhe durch den Mittelpunkt der Kugel

1. im Verhältnis $p : q = 7 : 5$,
2. nach dem goldenen Schnitt

geteilt ist. Welche Oberfläche besitzt die Pyramide?

Nr. 53. Anwendungen.

55. a) Wie schwer ist ein Balken von 6,25 m Länge, 45 cm Breite und 35 cm Dicke, wenn das Holz das spezifische Gewicht 0,495 besitzt?

b) Aus Messing mit dem spezifischen Gewicht 8,354 ist eine cylindrische Säule von der Höhe $h = 76{,}5$ cm und dem Halbmesser des Grundkreises $r = 4{,}8$ cm hergestellt. Wie groß ist das Gewicht der Säule?

Von einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 22$ cm ist ein Abschnitt mit der Höhe $h = 15$ cm abgeschnitten. Wie groß ist das Gewicht der Kugel, wenn der Abschnitt 10,125 kg wiegt?

d*) Aus Kupfer mit dem spezifischen Gewicht $s = 8{,}9$ soll eine Hohlkugel mit einem Gewicht von $p = 10$ kg und einer Wandstärke von $a = 5$ mm hergestellt werden. Wie groß ist der Halbmesser der Kugel zu nehmen?

e) Von einer Hohlkugel aus Gußeisen mit dem spezifischen Gewicht $s = 7{,}75$, deren Halbmesser die Länge $r_1 = 12$ cm, bez. $r_2 = 8{,}5$ cm besitzen, ist eine Schale von der Höhe $h = 8$ cm abgeschnitten. Wie viel kg wiegt die Schale?

f) Aus Buchenholz mit dem spezifischen Gewicht $s = 0{,}75$ ist ein gerader quadratischer Pyramidenstumpf mit der Grundkante $a = 27{,}4$ cm, der Endkante $b = 16{,}6$ cm und der Seitenkante $c = 31{,}5$ cm hergestellt. Wie groß ist sein Gewicht?

g) Der Sockel eines Denkmals hat die Form eines abgestumpften Kegels und wiegt 3294 kg. Seine Höhe beträgt 1,05 m und der Halbmesser des Endkreises ist 0,5 m groß. Welche Länge hat der Halbmesser des Grundkreises, wenn das spezifische Gewicht des Steins 2,95 beträgt?

h) Ein Kegelstumpf mit den Halbmessern $r_1 = 22$ cm, bez. $r_2 = 17$ cm und der Höhe $h = 32$ cm hat parallel zu seiner Achse eine cylindrische Durchbohrung von $d = 8$ cm Durchmesser. Wie

viel kg wiegt der Körper, wenn er aus Stahl mit dem spezifischen Gewicht $s = 7{,}7$ hergestellt ist?

56. a) Eine Holzkugel mit dem Halbmesser $r = 16{,}8$ cm sinkt im Wasser von 4^0 18,2 cm tief ein. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht?

b) Eine Hohlkugel mit den Halbmessern $r_1 = 18{,}3$ cm und $r_2 = 16{,}9$ cm sinkt in Wasser von 4^0 15 cm tief ein. Wie groß ist das spezifische Gewicht des für die Hohlkugel verwandten Materials?

c) Aus Holz mit dem spezifischen Gewicht 0,525 ist eine Kugel mit dem Halbmesser $r = 13{,}5$ cm gedreht. Wie groß ist das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit, in welche diese Kugel 14,3 cm tief einsinkt?

d) Eine Hohlkugel mit dem äußeren Halbmesser $r = 25$ cm sinkt in Wasser von 4^0 so tief ein, daß

1. die Wasserlinie ihre Oberfläche im Verhältnis 7 : 8 teilt.†)
2. " " " " " " stetig teilt.†)
3. eine Kappe von der Größe K = 3000 qcm aus dem Wasser hervorragt. Wie groß ist der innere Halbmesser, wenn das spezifische Gewicht des verwandten Metalls 8,25 beträgt?

57. a) Aus einem Marmorkegel mit der Höhe $h = 21$ cm und der Seitenlinie $s = 29$ cm ist ein Kegel von $h' = 14$ cm Höhe so ausgebohrt, daß seine Spitze auf der Achse des Marmorkegels liegt nnd seine Seitenlinie zu dessen Seitenlinie parallel ist, und der Raum mit Blei ausgefüllt. Wie groß ist nun das spezifische Gewicht des ganzen Kegels, wenn Marmor und Blei die spezifischen Gewichte 2,84, bez. 11,35 besitzen?

b) Um eine Walze aus Holz mit dem spezifischen Gewicht 0,682, die 2,5 m lang ist und einen Umfang von 1,4 m besitzt, ist aus Eisen mit dem spezifischen Gewicht 7,75 eine cylindrische Schale von 5 cm Dicke gelegt. Wie groß ist das Gewicht der ganzen Walze?

c) Aus Messing mit dem spezifischen Gewicht 8,354 ist ein Hohlcylinder mit der Höhe $h = 48$ cm und den Halbmessern $r_1 = 6$ cm, bez. $r_2 = 5$ cm hergestellt und mit Wasser von 4^0 gefüllt. Wie groß ist nun das spezifische Gewicht des ganzen Cylinders, wenn der Boden und der Deckel 2 cm dick sind?

d) Aus Glas mit dem spezifischen Gewicht 2,74 ist eine kugelförmige Schale mit den Halbmessern $r_1 = 16{,}2$ cm, bez. $r_2 = 15{,}2$ cm hergestellt und mit Quecksilber (spezifisches Gewicht = 13,59) gefüllt. Wie groß ist nun das spezifische Gewicht der ganzen Schale, wenn sie die Höhe $h = 11$ cm besitzt?

58. a) Aus einem Stück Holz, das die Form einer quadratischen Säule mit der Grundkante $a = 25$ cm und der Seitenkante $b = 42$ cm besitzt, soll ein Kegel von $h = 38$ cm Höhe so herausgedreht werden,

---

†) 1. und 2. enthalten je 2 Aufgaben. Inwiefern?

daß der Abfall möglichst gering wird. Wie schwer wird der Abfall sein, wenn das spezifische Gewicht des Holzes gleich 0,715 ist?

b) Eine gerade 6seitige Säule mit regelmäßiger Grundfläche aus Marmor vom spezifischen Gewicht 2,84 soll so zu einem Cylinder von gleicher Höhe abgeschliffen werden, daß der Abfall möglichst gering ist. Wie groß ist die Grundkante der Säule, wenn ihre Höhe 1,85 m beträgt und der Cylinder ein Gewicht von 215 kg besitzen wird?

c) Aus einem geraden Balken von 13,45 m Länge, dessen rechteckiger Querschnitt die Seiten 0,25 m und 0,31 m besitzt, sollen möglichst viel Kugeln mit dem Halbmesser 0,125 m herausgeschnitten werden. Wie viel kg wird der Abfall wiegen, wenn das spezifische Gewicht des Holzes gleich 0,48 ist?

d) Wie viel Kugeln mit dem Halbmesser $r = 15$ m können aus einem Bleirohr von 1,8 m Länge, 3 cm Wandstärke und 9 cm innerem Durchmesser hergestellt werden, wenn beim Schmelzen 4 % verloren gehen, und wie schwer ist jede Kugel, wenn das spezifische Gewicht des Bleies 11,346 beträgt?

e) Aus einem cylindrischen Baumstamm von 4,35 m Länge und 1,75 m Umfang soll eine 8seitige gerade Säule mit regelmäßiger Grundfläche so herausgeschnitten werden, daß der Abfall möglichst gering wird. Wie schwer wird die Säule sein, wenn das Holz das spezifische Gewicht 0,748 besitzt?

f) Aus einem geraden Baumstamm von 2,25 m Höhe, dessen parallele Endflächen die Umfänge $u_1 = 1{,}57$ m und $u_2 = 1{,}42$ m besitzen, soll der größte quadratische Pyramidenstumpf herausgeschnitten werden. Wie groß wird das Gewicht desselben sein, wenn das spezifische Gewicht des Holzes gleich 0,495 ist?

Nr. 54. Anhang. Dreieckstafel.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
a	14	15	17	53	85	93	66	65	a
b	15	16	25	64	73	115	76	47	b
c	13	17	29	75	61	72	86	72	c
α	59°29,4′	53°58,1′	35°44,1′	43°56,8′	78°10,6′	53°53,2′	47°35,4′	62°5,4′	α
β	67°23,3′	59°36,6′	59°11,4′	56°55,8′	57°12,2′	87°23,9′	58°14,2′	39°42,8′	β
γ	53° 7,3′	66°25,3′	85°4,5′	79°7,4′	44°37,2′	38°42,9′	74°10,4′	78°11,8′	γ
h_a	12	14,66	24,9	62,85	51,28	71,93	73,12	46,01	h_a
h_b	11,2	13,75	16,94	52,05	59,71	58,17	63,5	63,62	h_b
h_c	12,9	12,94	14,6	44,42	71,45	92,9	56,11	41,53	h_c
J	84	109,98	211,71	1665,6	2179,2	3344,6	2412,9	1495,2	J
r	8,125	9,27	14,55	38,19	43,42	57,56	32,15	36,78	r
ϱ	4	4,58	5,96	17,35	19,9	23,89	21,17	16,25	ϱ
ϱ_a	12	12,22	11,44	38,73	88,95	71,16	50,27	55,38	ϱ_a
ϱ_b	14	13,75	20,16	52,05	59,71	133,8	63,5	33,23	ϱ_b
ϱ_c	10,5	14,34	32,57	79,31	44,93	49,18	86,17	74,76	ϱ_c
w_α	12,1	14,69	25,56	64,05	51,59	78,95	73,83	48,88	w_α
w_β	11,2	13,83	18,64	54,6	62,36	58,68	65,25	64,16	w_β
w_γ	12,9	12,96	15,92	44,7	72,66	97,02	56,35	42,34	w_γ
m_a	12,2	14,7	25,71	64,48	52,14	83,92	74,14	51,38	m_a
m_b	11,24	13,89	20,22	56,51	64,35	60,09	66,57	64,44	m_b
m_c	12,96	12,97	15,71	45,24	73,12	98,19	56,71	43,83	m_c

	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	
a	91	19,7	38,2	43,2	87,5	63,7	54,35	71,25	a
b	81	23,5	32,7	67,4	63,4	77,3	67,68	85,23	b
c	71	28,3	46,5	51,4	51,8	81,5	43,64	63,74	c
α	73°13,2′	43°29,2′	54°21,2′	39°51,6′	98°20,8′	47°12,4′	53°17,4′	54°53′	α
β	58°27,2′	55°10,6′	44°4,6′	90°26,8′	45°47,8′	62°56′	86°38,6′	78°5,2′	β
γ	49°19,6′	81°20,2′	81°34,2′	49°41,6′	35°51,4′	69°51,6′	40°4′	47°1,8′	γ
h_a	60,51	23,23	32,35	51,4	37,14	72,58	54,26	62,36	h_a
h_b	67,98	19,48	37,79	32,94	51,25	59,81	34,99	52,13	h_b
h_c	77,55	16,17	26,57	43,19	62,73	56,72	43,57	69,72	h_c
J	2753,1	228,83	617,81	1110,2	1624,7	2311,5	1183,9	2221,7	J

	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	
r	47,52	14,31	23,5	33,7	44,22	43,4	33,9	43,55	r
ϱ	22,66	6,4	10,53	13,71	16,02	20,78	14,29	20,18	ϱ
ϱ_a	90,27	14,26	30,14	29,38	117,3	48,61	41,56	57,18	ϱ_a
ϱ_b	67,98	16,68	23,76	81,63	42,81	68,09	78,12	89,3	ϱ_b
ϱ_c	54,52	30,76	50,64	37,51	32,79	89,96	30,21	47,91	ϱ_c
w_α	60,75	23,85	34,16	54,83	37,27	72,71	47,43	64,73	w_α
w_β	69,61	20,59	38,88	33,07	59,92	60,39	35,22	52,26	w_β
w_γ	78,2	16,26	26,68	47,78	69,96	57,26	56,64	71,17	w_γ
m_a	61,08	24,07	35,37	55,91	37,91	72,76	50,04	66,29	m_a
m_b	70,86	21,37	39,29	33,44	64,54	62,1	39,18	52,48	m_b
m_c	78,49	16,43	26,9	50,44	70,12	57,93	57,37	71,8	m_c

	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	
a	64,72	43,25	44,75	98,42	52,75	11,35	37,24	6,79	a
b	48,54	56,46	34,40	75,45	95,35	16,52	23,82	8,14	b
c	51,86	39,23	51,25	61,75	61,25	23,75	47,56	5,92	c
α	80°12,4′	49°51,2′	59°9,8′	91°6,6′	30°32′	25°31,2′	50°27,4′	55°3,4′	α
β	47°39,2′	86°15,2′	41°18,2′	50°2,3′	113°18,8′	38°49,8′	29°33,2′	79°19,4′	β
γ	52°8,4′	43°53,6′	79°32′	38°51,1′	36°9,2′	115°39′	99°59,4′	45°37,2′	γ
h_a	38,33	39,15	33,83	47,33	56,25	14,89	23,47	5,82	h_a
h_b	51,10	29,99	44,01	61,74	31,12	10,23	36,68	4,85	h_b
h_c	47,83	43,16	29,58	75,44	48,44	7,12	18,37	6,67	h_c
J	1240,3	846,54	756,88	2329,1	1483,6	84,51	437	19,75	J
r	32,8	28,29	26,06	49,22	51,92	13,17	24,15	4,14	r
ϱ	15,02	12,19	11,61	19,77	14,17	3,27	8,04	1,89	ϱ
ϱ_a	69,52	32,29	37,01	120,11	28,57	5,84	25,59	5,43	ϱ_a
ϱ_b	36,46	65,07	24,57	54,99	159,1	9,10	14,33	8,64	ϱ_b
ϱ_c	40,4	27,99	54,26	41,55	34,17	41,03	64,71	4,38	ϱ_c
w_α	38,36	41,98	35,79	47,56	71,96	19	28,72	6,08	w_α
w_β	52,67	30,03	44,71	68,77	31,16	14,49	40,39	4,87	w_β
w_γ	49,83	45,43	29,9	80,56	64,57	7,17	18,68	6,83	w_γ
m_a	38,41	43,51	37,47	48,28	75,67	19,65	32,68	6,26	m_a
m_b	53,39	30,21	44,93	72,98	31,53	16,68	41,02	4,9	m_b
m_c	48,48	46,36	30,6	82,08	70,71	7,74	20,29	6,89	m_c

☞ Im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Bardey, Dr. E., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. In alter und neuer Ausgabe. gr. 8.

Alte Ausgabe. 25. Auflage. [XIV u. 330 S.] 1900. Dauerhaft geb. *M.* 3.20. (Abschnitt XXII hieraus besonders abgedruckt. *M.* —.30.)

Neue Ausgabe. Besorgt von F. Pietzker, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Oberlehrer an der Ober-Realschule zu Hannover. [VII u. 376 S.] 1900. Dauerhaft geb. *M.* 3.20.

——— arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien. In alter und neuer Ausgabe. gr. 8.

Alte Ausgabe. 11. Auflage. [X u. 269 S.] 1900. Dauerhaft geb. *M.* 2.40.

Neue Ausgabe. Besorgt von F. Pietzker, Professor am Gymnasium zu Nordhausen, und O. Presler, Oberlehrer an der Ober-Realschule zu Hannover. 1900. [Erscheint im Herbst 1900.]

——— arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von Dr. H. Hartenstein. Ausgabe A: mit Logarithmentafel. 3. Auflage. [IV u. 202 S.] gr. 8. 1900. Dauerhaft geb. *M.* 2.—

——— ——— Ausgabe B: ohne Logarithmentafel. 3. Auflage. [IV u. 170 S.] gr. 8. 1900. geb. *M.* 1.80.

Zu dieser Ausgabe sind die auf mehrfachen Wunsch von Dr. Hartenstein bearbeiteten „fünfstelligen logarithm. u. trigonom. Tafeln" zu gebrauchen.

[———] Fünfstellige Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 000 nebst den sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10 000 bis 10 800 für Realschulen u. verwandte Anstalten, namentlich zu Dr. E. Bardey's Arithmetischen Aufgaben und Lehrbuch der Arithmetik, herausgegeben von Dr. H. Hartenstein. [32 S.] gr. 8. 1896. Steif geh. *M.* —.30.

——— Resultate zu den 5 Sammlungen je *M.* 1.—

[Dieselben sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einsendung von *M.* 1.— (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.]

——— Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. I. Teil: Aufgaben mit einer Unbekannten. [VI u. 95 S.] gr. 8. 1887. geh. *M.* 1.50.

——— algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und Methoden zu ihrer Auflösung. 4. Aufl. [XIII u. 378 S.] gr. 8. 1893. geh. *M.* 6.—

——— quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2. verb. Auflage. [IV u. 94 S.] gr. 8. 1887. geh. *M.* 1.60.

——— zur Formation quadratischer Gleichungen. 2. Ausg. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1894. geh. *M.* 3.—

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Gymnasium zu Cleve, Materialien zu Dreiecks-Konstruktionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh. *M.* 1.20.

——— planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

——— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. [VI u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

Diekmann, Prof. Dr. **Jos.**, Rektor des Realprogymnasiums zu Viersen, Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauche beim Unterricht an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. [VIII u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.60.

Eichhorn, Dr. **W.**, Oberlehrer an der Kaiser Wilhelm-Realschule zu Göttingen, arithmetische Regelhefte mit Wiederholungstafeln. In 4 Heften. gr. 8. Steif geh.

Heft 1. Quarta (Quinta): Rechnen als Vorstufe der Mathematik. In dauerhaftem Umschlag. [40 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 2. Untertertia: Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [32 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 3. Obertertia: Proportionen, Potenzen, Wurzeln, Gleichungen. In dauerhaftem Umschlag. [42 S.] 1900. *M.* —.40.

Heft 4. Untersekunda: Logarithmen, Reihen, Zinses-Zins- und Rentenrechnung. In dauerhaftem Umschlag. [23 S.] 1900. *M.* —.30.

Erler, Dr. **W.**, weil. Professor am Kgl. Pädagogium Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Prima höherer Lehranstalten. Fünfte Auflage besorgt von Dr. L. Huebner, Professor am Gymnasium zu Schweidnitz. Mit 30 Figuren im Text. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1898. kart. *M.* 1.20.

Fuhrmann, **W.**, Oberlehrer an der Realschule auf der Burg in Königsberg/Ostpr., Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niederen Analysis, bestehend in einer geordneten Sammlung von Begriffen, Formeln und Lehrsätzen in diesen Disziplinen. [63 S.] gr. 8. 1886. kart. *M.* 1.—

Ganter, Dr. **H.**, Professor an der Kantonschule in Aarau, und Dr. **F. Rudio**, Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. Mit 54 Figuren im Text. 4. verb. Aufl. [VIII u. 180 S.] gr. 8. 1900. geb. *M.* 3.—

Siehe auch: Rudio, Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.

Girndt, **Martin**, Königl. Baugewerkschul-Lehrer, Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. 2 Teile. gr. 8. 1897. kart. *M.* 3.40.

I. Teil. Lehre von den ebenen Figuren. Mit 276 Fig. im Text u. 287 der Baupraxis entlehnten Aufgaben. [VIII u. 99 S.] In Lnw. kart. *M.* 2.40.

II. — Körperlehre. Mit 64 Textfiguren. [VIII u. 55 S.] kart. *M.* 1.—

Henrici, **Julius**, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein**, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.60.

I. Teil. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbild. ohne Maßänderung. Mit 193 Fig. in Holzschn. 3. Aufl. [VIII u. 144 S.] 1897. *M.* 2.—

II. — Abbildung in verändertem Maße. Berechnung der Größen der ebenen Geometrie. Mit 188 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. 2. Auflage. [IX u. 248 S.] 1896. *M.* 2.80.

III. — Lage und Größe der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für Prima. Mit 134 Fig. in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] 1883. *M.* 2.80.

Hochheim, Dr. **Adolf**, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 2. verb. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1894. geh. *M.* 3.20. A. Aufgaben. [IV u. 86 S.] *M.* 1.60. B. Auflösungen. [106 S.] *M.* 1.60.

———— Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 2. Aufl. 2 Teile. gr. 8. 1898. geh. *M.* 3.—. A. Aufgaben. [IV u. 81 S.] *M.* 1.40. B. Auflösungen. [96 S.] *M.* 1.60.

———— Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2 Teile. gr. 8. 1886. geh. *M.* 2.80. A. Aufgaben. [67 S.] *M.* 1.20. B. Auflösungen. [94 S.] *M.* 1.60.

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav**, Dir. der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Im engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) gr. 8. In Lnw. geb.

Allgemeine Ausgabe A. In 3 Teilen. gr. 8. In Lnw. geb.

I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Vollanstalten reichend. 3. Doppel-Auflage. Mit 142 Figuren im Text. [VIII u. 289 S.] 1898. *M* 2.40.

II. — für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. 2. Auflage. Mit 210 Figuren im Text. [VIII u. 292 S.] 1897. *M* 3.—

III. — Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Mit 160 Figuren im Text. [VIII u. 224 S.] 1895. *M* 2.80.

Ausgabe B, für Gymnasien. In 2 Teilen. gr. 8. In Lnw. geb.

I. Teil, im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Untersekunda reichend. Mit 138 Figuren im Text. [VIII u. 228 S.] 1896. *M* 2.40.

II. — im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Mit 196 Figuren im Text. [VIII u. 279 S.] 1896. *M* 3.—

Begleitwort des Verfassers hierzu, nur für Lehrer bestimmt, liefert die Verlagsbuchhandlung auf Wunsch unentgeltlich.

Prix, **Ernst**, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg, Elemente der darstellenden Geometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M* 3.20.

I. Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projektionen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VII u. 72 S.] 1883. *M* 1.20.

II. — Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projektionen. Centralprojektion. Mit in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 120 S.] 1883. *M* 2.—

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M* 7.—

I. Teil. Trigonometrie. 4., verb. Aufl. [X u. 250 S.] 1894. *M* 4.—

II. — Stereometrie. 4., verb. Aufl. bearb. v. A. Much. [VIII u. 194 S.] 1897. *M* 3.—

———— Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. *M* 2.80.

I. Teil. Trigonometrie. 4. Aufl. [88 S.] 1894. *M* 1.80.

II. — Stereometrie. 4. Aufl. bearb. v. A. Much. [58 S.] 1897. *M* 1.—

———— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. *M* 1.20.

Rudio, Dr. **F.**, Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. 2. Auflage. [X u. 184 S.] gr. 8. 1899. geb. *M* 3.—

———— u. Ganter, analytische Geometrie der Ebene, siehe: Ganter u. Rudio.

Sürchinger, **E.**, und Dr. **V. Eitel**, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Chemnitz, Aufgabensammlung für den Rechen-Unterricht in den Unterklassen der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. 2. verbesserte Auflage. 3 Hefte. gr. 8. 1899. kart.

I. Heft. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen einfach und mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 91 S.] *M* 1.—

II. — Bruchrechnung. [104 S.] *M* 1.20.

III. — Schlußrechnung. Prozent-, Zins- und Diskontorechnung. [70 S.] *M* —.80.

(Resultate hierzu nur durch die Verlagsbuchhandlung.)

Schilke, Dr. phil. **E.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i./L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] gr. 8. 1890. kart. *M* 1.—

Schotten, Dr. **Heinrich**, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. I. Band. [IV u. 370 S.] gr. 8. 1890. geh. *M.* 6.—

——— ——— II. Band. [IV u. 410 S.] gr. 8. 1893. geh. *M.* 8.—

Schubert, Dr. **Hermann**, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg, fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. In Leinwand geb. *M.* 4.—

Schülke, Dr. **A.**, vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tafeln. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. Dritte verbesserte Auflage. [II u. 18 S.] gr. 8. 1900. Steif geh. *M.* —.60.

——— trigonometrische Tafel. 2. Aufl. [1 Bl.] gr. 8. 1896. *M.* —.15.

Schüller, **Werner Jos.**, Seminarlehrer in Boppard am Rhein, ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet. Mit 54 Figuren im Text. Zweite, um die Logarithmen vermehrte, wohlfeile Ausgabe. [XXVI u. 478 S.] gr. 8. 1897. Dauerhaft geb. *M.* 2.50.

Schulze, Dr. **Karl**, Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg, Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- u. Realschulen. Mit Figuren im Text. 2 Hefte gr. 8. 1890. kart. je *M.* 1.20.

I. Heft. Trigonometrie. [VIII u. 72 S.]
II. — Stereometrie. [IV u. 60 S.]

Schuster, Prof. Dr. **M.**, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Oldenburg, geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen. gr. 8.

Ausgabe A: für Vollanstalten. [VIII u. 147 S.] Mit 2 lithograph. Tafeln 1899. In Leinwand geb. *M.* 2.—

Ausgabe B: für Progymnasien und Realschulen. [VII u. 111 S.] Mit 2 lithogr. Tafeln. 1899. In Leinwand geb. *M.* 1.60.

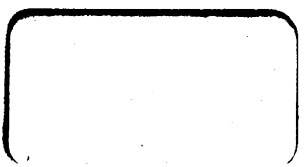
Servus, Dr. **H.**, Privatdozent an der königl. technischen Hochschule zu Charlottenburg und ord. Lehrer an der V. städtischen höheren Bürgerschule zu Berlin, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Gymnasien, Realgymnasien und höhere Bürgerschulen. 4 Hefte. gr. 8. kart. *M.* 2.70.

I. Heft. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division. [IV u. 47 S.] 1888. *M.* —.60.
II. — Quadrierung und Kubierung von Summen, Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche, Proportionen, der größte gemeinschaftliche Faktor, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, Addition und Subtraktion von Brüchen, die Quadratwurzel, die Kubikwurzel. [51 S.] 1888. *M.* —.60.
III. — Potenzierung, Radicierung, Logarithmierung. [II u. 94 S.] 1888. *M.* —.75.
IV. — Gleichungen ersten Grades, Anwendungen der Gleichungen ersten Grades, Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten, Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten, transscendente Gleichungen, arithmetische Reihen, geometrische Reihen, Diophantische Gleichungen. [II u. 78 S.] 1889. *M.* —.75.

Die Hefte sind so eingeteilt, daß jedes für einen Jahreskursus ausreicht: I. für Untertertia, II. für Obertertia, III. für Untersekunda, IV. für Obersekunda.

Thieme, Dr. **H.**, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluss an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. *M.* 1.20.

Wehner, Dr. **Hermann**, Lehrer an der städtischen Realschule zu Plauen i. V., Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 54 S.] gr. 8. 1892. kart. *M.* —.80.

Wolff, **H.**, Lehrer der Mathematik an der K. Baugewerkenschule in Leipzig, Sätze und Regeln der Arithmetik und Algebra nebst Beispielen und gelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an Baugewerkenschulen, Gewerbeschulen ꝛc. [IV u. 102 S.] gr. 8. 1888. kart. *M.* 1.60.

APR 6 - 1954